ECUACIONES DIFERENCIALES
(Grupo A)

Teoría Fundamental

En esta parte del curso nos dedicaremos a establecer los resultados teóricos fundamentales del curso. Nos interesaremos por las condiciones de existencia y de unicidad de la solución, la determinación del dominio de definición de la solución y por la dependencia continua de ésta con respecto a los datos. En la última sección estudiaremos la estabilidad de las soluciones.

El esquema del capítulo es el siguiente:

1. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES

2. SOLUCIONES MAXIMALES

3. DEPENDENCIA CONTINUA DE LOS DATOS

4. ESTABILIDAD

1. Existencia y unicidad de la solución

Recordamos aquí algunos conceptos así como los resultados de existencia y unicidad (probablemente) introducidos en el curso anterior .

1.1. La condición de Lipschitz.

Definición 1.1. *Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $\mathcal{O}$ un dominio de $\mathbb{R}^n$, una función $f(t,x) \in \mathcal{C}^0(I \times \mathcal{O}; \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ es* **lipschitziana** *respecto a la variable x si existe una constante L tal que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\| \quad \textit{para todo } t \in I \textit{ y todo } (x,y) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}.$$

L se denomina constante de Lipschitz de la función f en $I \times \mathcal{O}$.

Diremos que f es **localmente lipschitziana** *respecto a la variable x en $I \times \mathcal{O}$ si para cualquier intervalo compacto $J \subset I$ y para cualquier compacto $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}$, f es lipschitziana en $J \times \mathcal{A}$.* □

Nota 1. *Dado que en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes, la lipschitzianidad de una función f no depende de la norma elegida. En todo lo que sigue podremos suponer que trabajamos con la norma euclídea, para $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n$*

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \right)^{1/2} \overset{(notada)}{=} \|z\|_2. \quad \square$$

Nota 2. *Uno podrá comprobar fácilmente que si una función $f(t,x) \in \mathcal{C}^0(I \times \mathcal{O}; \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ y es continuamente diferenciable en x_i para $i = 1, 2, \cdots, n$ sobre $I \times \mathcal{O}$ entonces esta función es localmente lipschitziana sobre $I \times \mathcal{O}$.* □

1.2. Existencia global y unicidad.

Teorema 1.2. *Sea f una función de $\mathcal{C}^0([a,b] \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}; \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$, lipschitziana con respecto a x en $[a,b] \times \mathbb{R}^n$, entonces, para cualquier $(t_0, x_0) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ existe una única solución del problema de valor inicial*

$$\left\{ \begin{array}{ll} x' = f(t,x) & \textit{para } t \in [a,b], \\ x(t_0) = x_0. & \square \end{array} \right. \tag{1}$$

Para la demostración de este teorema necesitaremos el teorema del punto fijo de Banach que recordamos a continuación:

Teorema 1.3. *(teorema de la aplicación contractiva/punto fijo de Banach/Picard) Sea $\mathcal{M}$ un espacio métrico completo, sea $T : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ una aplicación contractiva, i.e., existe $k < 1$ tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq k d(x,y)$$

para todo x, $y \in \mathcal{M}$. *Entonces* T *admite un único punto fijo* ξ *y para todo* $\xi_0 \in \mathcal{M}$ *la sucesión* $(\xi_n)_{n\in N}$, *donde* $\xi_{n+1} = T(\xi_n)$, *converge a* ξ. *Además,*

$$d(\xi_n, \xi) \leq \frac{k^n}{1-k} d(\xi_1, \xi_0).$$

Demostración.

Consideremos el término $d(\xi_{i+1}, \xi_i)$, tenemos:

$$d(\xi_{i+1}, \xi_i) = d(T(\xi_i), T(\xi_{i-1})) \leq kd(xi_i, \xi_{i-1})$$

por lo que deducimos:

$$d(\xi_{i+1}, \xi_i) \leq k^i d(\xi_1, \xi_0). \tag{2}$$

Por otra parte, suponiendo $n > m$, de la desigualdad triangular deducimos que

$$d(\xi_n, \xi_m) \leq d(\xi_n, \xi_{n-1}) + d(\xi_{n-1}, \xi_{n-2} + \ldots + d(\xi_{m+1}, \xi_m))$$

luego, aplicando (2) a cada uno de los términos de la parte derecha de la anterior desigualdad tenemos:

$$\begin{aligned} d(\xi_n, \xi_m) &\leq k^{n-1} d(\xi_1, \xi_0) + k^{n-2} d(\xi_1, \xi_0) + \ldots + k^m d(\xi_1, \xi_0) \\ &= (k^{n-1} + k^{n-2} + \ldots + k^m) d(\xi_1, \xi_0) = \frac{k^m - k^n}{1-k} d(\xi_1, \xi_0) \end{aligned}$$

luego deducimos que, para $n > m$,

$$d(\xi_n, \xi_m) \leq \frac{k^m}{1-k} d(\xi_1, \xi_0) \tag{3}$$

por lo que $(\xi_n)_{n\in N}$ es una sucesión de Cauchy por lo que tiene un límite, que notaremos ξ en el espacio completo $\mathcal{M}$. Dado que $\xi_{n+1} = T(\xi_n)$, dejando tender n al infinito obtenemos $\xi = T(\xi)$, luego T tiene un punto fijo. Este es único, en efecto, supongamos que ξ y ζ son puntos fijos entonces

$$d(\xi, \zeta) = d(T(\xi), T(\zeta)) \leq kd(\xi, \zeta)$$

con $k < 1$ lo cual es imposible si $d(\xi, \zeta) \neq 0$, luego $\xi = \zeta$. La estimación del teorema se deduce de (3) cuando n tiende a infinito. **Q.E.D.**

Podemos deducir el siguiente resultado:

Corolario 1.4. *Sea* $\mathcal{M}$ *un espacio métrico completo, sea* $T : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ *una aplicación tal que para algún* $m \in I\!N$ T^m *sea contractiva. Entonces* T *admite un único punto fijo* ξ

Demonstración: Aplicando el anterior teorema sabemos que T^m tiene un único punto fijo ξ, $\xi = T^m(\xi)$. Aplicandp T a cada parte de la igualdad tenemos:

$$T(\xi) = T(T^m(\xi)) = T^{m+1}(\xi) = T^m(T(\xi))$$

por lo que se deduce que $T(\xi)$ es punto fijo de T^m, luego, por la unicidad del punto fijo, tenemos $\xi = T(\xi)$, i.e. ξ es punto fijo de T. Además es el uńico punto fijo de T ya que todo punto fijo de T es punto fijo de T^m. **Q.E.D.**

Demostración del teorema 1.2

Consideremos el espacio $\mathcal{C}^0([a,b];I\!\!R^{\rm n})$ dotado de la norma

$$\|\!|\phi|\!\| = \max_{t\in[a,b]} \|\phi(t)\|. \tag{4}$$

Se comprueba fácilmente que $\mathcal{C}^0([a,b];I\!\!R^{\rm n})$ es un espacio de Banack (i.e. es un espacio vectorial completo para la topología de la norma).

Sea la aplicación

$$\Phi:\ \mathcal{C}^0([a,b];I\!\!R^{\rm n}) \mapsto \mathcal{C}^0([a,b];I\!\!R^{\rm n})$$

definida por

$$\Phi(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds$$

para todo $y \in \mathcal{C}^0([a,b];I\!\!R^{\rm n})$. *Vamos a demostrar que Φ tiene un único punto fijo para lo cual demostraremos que para cierto entero m Φ^m es una contracción.* Sean y y z dos funciones de $\mathcal{C}^0([a,b];I\!\!R^{\rm n})$, tenemos

$$\begin{aligned} \|\Phi(y(t)) - \Phi(z(t))\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s,y(s)) - f(s,z(s)))ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s,y(s)) - f(s,z(s))\| ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} \|y(s) - z(s)\| ds \right| \end{aligned} \tag{5}$$

De (5) deducimos

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leq L|t-t_0|\|\!|y-z|\!\| \tag{6}$$

que es el caso $m=1$ de la desigualdad más general:

$$\|\Phi^m(y)(t) - \Phi^m(z)(t)\| \leq \frac{L^m|t-t_0|^m}{m!}\|\!|y-z|\!\|. \tag{7}$$

Supongamos cierta esa desigualdad para m e intentemos deducirla para $m+1$. Aplicando (5):

$$\begin{aligned} &\|\Phi^{m+1}(y)(t) - \Phi^{m+1}(z)(t)\| \\ &\qquad = \|\Phi\left(\Phi^m(y)\right)(t) - \Phi\left(\Phi^m(z)\right)(t)\| \\ &\qquad\qquad \leq L \left| \int_{t_0}^{t} \|\Phi^m(y)(s) - \Phi^m(z)(s)\|\, ds \right| \end{aligned} \tag{8}$$

y aplicando (7)

$$\begin{aligned} &\|\Phi^{m+1}(y)(t) - \Phi^{m+1}(z)(t)\| \\ &\qquad \leq \frac{L^{m+1}}{m!} \left| \int_{t_0}^{t} |s-t_0|^m ds \right| \|\!|y-z|\!\| \\ &\qquad\qquad = \frac{L^{m+1}|t-t_0|^{m+1}}{(m+1)!}\|\!|y-z|\!\| \end{aligned} \tag{9}$$

por lo que (7) queda demostrado para todo entero $m \in I\!N$.

Más aún, dado que $|t - t_0| \leq b - a$ tenemos:

$$\|\Phi^m(y)(t) - \Phi^m(z)(t)\| \leq \frac{L^m(b-a)^m}{m!} |\!|\!|y - z|\!|\!| \quad \text{para todo } t \in [a,b],$$

luego, aplicando (4) tenemos

$$|\!|\!|\Phi^m(y) - \Phi^m(z)|\!|\!| \leq \frac{L^m(b-a)^m}{m!} |\!|\!|y - z|\!|\!|. \tag{10}$$

Como

$$\frac{L^m(b-a)^m}{m!} \to 0 \quad \text{cuando } m \to \infty,$$

existe $m_0 \in I\!N$ tal que para todo $m \geq m_0$ tengamos

$$\frac{L^m(b-a)^m}{m!} \leq \frac{1}{2},$$

luego

$$|\!|\!|\Phi^{m_0}(y) - \Phi^{m_0}(z)|\!|\!| \leq \frac{1}{2} |\!|\!|y - z|\!|\!|$$

para todo par $(y, z) \in \mathcal{C}^0([a,b]; I\!R^{\mathrm{n}}) \times \mathcal{C}^0([a,b]; I\!R^{\mathrm{n}})$.

Al ser Φ^{m_0} una contracción el teorema de punto fijo de Picard permite deducir que Φ tiene un único punto fijo $x \in \mathcal{C}^0([a,b]; I\!R^{\mathrm{n}})$, i.e. $x = \Phi(x)$ luego:

$$x(t) = \Phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \quad \text{para todo } t \in [a,b]$$

y es solución del problema de valor inicial (1). Además la unicidad del punto fijo garantiza que x es la única solución de (1) dado que cualquier solución sería punto fijo de Φ. **Q.E.D.**

Del teorema 1.2 podemos deducir

Corolario 1.5. *Sea $(\alpha, \omega) \subseteq I\!R$ un intervalo no necesariamente acotado*[1] *y sea f una función de $\mathcal{C}^0((\alpha,\omega) \times I\!R^{\mathrm{n}}, I\!R^{\mathrm{n}})$ lipschitziana sobre $(\alpha,\omega) \times I\!R^{\mathrm{n}}$. Entonces, para todo $(t_0, x_0) \in (\alpha,\omega) \times I\!R^{\mathrm{n}}$ existe una única solución del problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) & \text{para } t \in (\alpha,\omega), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{11}$$

□

Demostración. Consideremos dos sucesiones $(\alpha_k)_{k \in N}$ y $(\omega_k)_{k \in N}$ tales que

$$\left[\begin{array}{ll} \alpha < \alpha_{k+1} < \alpha_k < t_0 \quad \forall\, k \in I\!N, & \alpha_k \overset{k\to\infty}{\to} \alpha, \\ \omega > \omega_{k+1} > \omega_k > t_0 \quad \forall\, k \in I\!N, & \omega_k \overset{k\to\infty}{\to} \omega. \end{array} \right.$$

[1] Abusando de la notación incluimos la posibilidad que $\alpha = -\infty$ o que $\omega = +\infty$.

Aplicando el teorema 1.2 sabemos que el problema

$$\text{(PVI(k))} \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) & \text{para } t \in (\alpha_k, \omega_k), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

posee una única solución que notamos x_k. Es obvio comprobar que para cualquier $m \leq k$ la restricción de x_k a $[\alpha_m, \omega_m]$ es solución de (PVI(m)) luego, por la unicidad de la solución de (PVI(m)) tenemos

$$x_k(t) = x_m(t) \quad \text{para todo } k,\, m \in I\!N \text{ tales que } k \geq m \text{ y para todo } t \in [\alpha_m, \omega_m].$$

Luego, teniendo en cuenta que

$$(\alpha, \omega) = \bigcup_{k \in N} [\alpha_k, \omega_k]$$

definimos la función x como:

$$\text{para todo } t \in [\alpha, \omega] \quad x(t) = x_k(t) \quad \text{siendo } k \text{ cualquier entero tal que } t \in [\alpha_k, \omega_k].$$

Se comprueba trivialmente que x es solución del problema de valor inicial (11). **Q.E.D.**

Con alguna ligera modificación se puede demostrar que

Corolario 1.6. *Sea $\alpha > -\infty$ (respectivamente $\omega < +\infty$), sea $I = [\alpha, \omega) \subseteq I\!R$ (respectivamente $I = (\alpha, \omega] \subseteq I\!R$) un intervalo no necesariamente acotado y sea f una función de $\mathcal{C}(I \times I\!R^{\mathrm{n}}; I\!R^{\mathrm{n}})$ lipschitziana sobre $I \times I\!R^{\mathrm{n}}$. Entonces, para todo $(t_0, x_0) \in I \times I\!R^{\mathrm{n}}$ existe una única solución del problema de valor inicial:*

$$(12) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) & \textit{para } t \in I, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \qquad \square$$

1.3. Existencia local y unicidad.

Teorema 1.7. *Sea $f \in \mathcal{C}^0([a,b] \times \mathcal{O}; I\!R^{\mathrm{n}})$ donde $[a,b]$ es un intervalo cerrado de $I\!R$ y $\mathcal{O}$ es un abierto de $I\!R^n$. Suponemos que f es lipschitziana, de constante L, respecto a x en el dominio $[a,b] \times \mathcal{O}$. Entonces, para todo $(t_0, x_0) \in [a,b] \times \mathcal{O}$ existe un intervalo $[a_0, b_0]$ con $t_0 \in [a_0, b_0] \subseteq [a,b]$ tal que el problema de valor inicial*

$$(13) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) & \textit{para todo } t \in [a_0, b_0] \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

tenga una única solución $x \in \mathcal{C}^1[a_0, b_0]$.

Además, podemos establecer la siguiente estimación para el intervalo $[a_0, b_0]$. Sean

$$(14) \qquad \begin{cases} \delta_0 > 0 \quad \textit{tal que la bola cerrada } B_0 = \{x \in I\!R^{\mathrm{n}} / \|x - x_0\| \leq \delta_0\} \subset \mathcal{O}, \\ M = \max\limits_{t \in [a,b]} \|f(t, x_0)\|, \end{cases}$$

entonces

$$\left[\begin{array}{ll} a_0 = \max(a, t_0 - \dfrac{\delta_0}{M + L\delta_0}) & \left(= t_0 - \min(t_0 - a, \dfrac{\delta_0}{M + L\delta_0})\right) \\ b_0 = \min(b, t_0 + \dfrac{\delta_0}{M + L\delta_0}) & \left(= t_0 + \min(b - t_0, \dfrac{\delta_0}{M + L\delta_0})\right). \end{array}\right. \tag{15}$$ □

Demostración:

Nota 3. *Como primer paso en la demostración de este teorema intentaremos dar una idea del por qué de esta estimación de* $[a_0, b_0]$.

En primer lugar veamos que el término $(M + L\delta_0)(t - t_0)$ *constituye una estimación o cota a priori del crecimiento de una eventual solución dentro de la bola* B_0. *En efecto, supongamos que en el entorno* (t_1, t_2) *de* t_0 *la solución* $x(t)$ *se mantenga en la bola* B_0, *entonces, como*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \tag{16}$$

para $t \in (t_1, t_2)$ *tenemos:*

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s))\|\, ds \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_0) + f(s, x(s)) - f(s, x_0)\|\, ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_0)\|\, ds \right| + \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, x_0)\|\, ds \right| \\ &\leq M|t - t_0| + L \left| \int_{t_0}^{t} \|x(s) - x_0\|\, ds \right| < (M + L\delta_0)|t - t_0|. \end{aligned} \tag{17}$$

Por otra parte, si notamos t_1 *el último instante antes de* t_0 *en el que* $x(t_1)$ *estuvo en el borde de* B_0 *y* t_2 *el primer instante después de* t_0 *en el que* $x(t_2)$ *estará en el borde de* B_0, *entonces, para todo* $t \in (t_1, t_2)$ *tendremos* $\|x(t) - x_0\| < \delta_0$ *y, según* (17),

$$\delta_0 = \|x(t_i) - x_0\| < (M + L\delta_0)|t_i - t_0| \quad \textit{para } i = 1, 2,$$

de lo que obtenemos:

$$\left[\begin{array}{lll} t_2 - t_0 > 0: & M(t_2 - t_0) + L\delta_0(t_2 - t_0) > \delta_0 & \Rightarrow \quad t_2 > t_0 + \dfrac{\delta_0}{M + L\delta_0} \geq b_0 \\ t_1 - t_0 < 0: & M(t_0 - t_1) + L\delta_0(t_0 - t_1) > \delta_0 & \Rightarrow \quad t_1 < t_0 - \dfrac{\delta_0}{M + L\delta_0} \leq a_0. \end{array}\right.$$

Luego, en el intervalo (a_0, b_0), *delimitado por las cotas establecidas en el teorema, una eventual solución del problema de valor inicial* (13) *permanecería dentro de la bola* B_0. ◇

En lo sucesivo a_0 y b_0 son las cotas definidas en el teorema. Llamaremos χ a la aplicación definida por:

$$\chi : \mathbb{R}^n \mapsto B_0, \quad \chi(y) = x_0 + (y - x_0) \min\left(1, \frac{\delta_0}{\|y - x_0\|}\right).$$

Comprobamos fácilmente que χ es lipschitziana y que:

$$\|\chi(y) - \chi(z)\| \leq \|y - z\| \quad \text{para todo par } (y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Definimos la función $F \in \mathcal{C}^0([a, b] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ como

$$F(t, y) = f(t, \chi(y)) \quad \text{para todo } (t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n,$$

luego esta función es lipschitziana sobre $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ y su constante es L, la misma que la de f dado que

$$\|F(t, y) - F(t, z)\| = \|f(t, \chi(y)) - f(t, \chi(z))\| \leq L\|\chi(y) - \chi(z)\| \leq L\|y - z\|.$$

Nota 4. *Atendiendo a la nota 3 del principio de esta demostración, cualquier eventual solución del problema de valor inicial*

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} x' = F(t, x) & \textit{para todo } t \in [a_0, b_0], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

estará contenida en la bola B_0 por lo que $x(t) = \chi(x(t))$ y $F(t, x(t)) = f(t, x(t))$ para todo $t \in [a_0, b_0]$, resultando ser también solución del problema de valor inicial (13). Del mismo modo cualquier solución del problema de valor inicial (13) será solución del problema de valor inicial (18).

Dado que el teorema 1.2 garantiza la existencia y unicidad de la solución de (18) deducimos la existencia y unicidad de solución de (13). **Q.E.D.**

Uno comprueba trivialmente que

Corolario 1.8. *Las conclusiones del teorema 1.7 siguen siendo válidas si en su enunciado sustituimos $[a, b]$ y $[a_0, b_0]$ por $[a, b)$ y $[a_0, b_0)$, por $(a, b]$ y $(a_0, b_0]$ o por (a, b) y (a_0, b_0).*

1.4. Existencia sin condición de Lipchitz: Teorema de Peano. Aún sin la condición de Lipchitz podemos demostrar la existencia de soluciones.

Teorema 1.9. (Teorema de existencia local de Peano) *Sea $f(t, x)$ una función continua en un conjunto abierto $\mathcal{D}$. Entonces, para cualquier (t_0, x_0) de $\mathcal{D}$ existe $a > 0$ tal que el problema de valor inicial*

$$\text{(19)} \qquad x' = f(t, x) \qquad x(t_0) = x_0$$

tenga, al menos, una solución en el intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$. $\square$

Demostración. Sea $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ y sean τ_0 y δ_0 tales que el conjunto $\mathcal{A} = [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0] \times \{x \in I\!R^n \,/\, \|x - x_0\| \leq \delta_0$ esté contenido en $\mathcal{D}$. Sea

$$M = \max_{\mathcal{A}} \|f(t,x)\|.$$

Definimos

$$a = \min\left(\tau_0, \frac{\delta_0}{M}\right).$$

Nos damos $0 < h_0 < a$ y construimos una familia de funciones $(\varphi_h)_{(h \in (0,h_0))}$.

Para cada $h \in (0, h_0)$, para $i = 0, 1, 2, \cdots, k_h, k_h+1$, tal que $k_h h < a \leq (k_h+1)h$ definimos

$$t^h_{\pm i} = t_0 \pm ih$$

y construimos

$$\varphi^h_{\pm(i+1)} = \varphi^h_{\pm i} \pm h f(t^h_{\pm i}, \varphi^h_{\pm i}), \quad \text{fijando } \varphi^h_0 = x_0 \text{ para todo } h \tag{20}$$

y obtenemos las poligonales de Euler:

$$\varphi_h(t) = \varphi^h_i + \frac{t - t^h_i}{h}\left(\varphi^h_{i+1} - \varphi^h_i\right) \tag{21}$$

para $t \in [t^h_i, t^h_{i+1}] \cap [t_0 - a, t_0 + a]$ y para $i = -k_h - 1, -k_h, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, k_h$.

Veamos que $(\varphi_h)_{(h\in(0,h_0))}$ es una familia uniformemente acotada y equicontinua sobre el intervalo $[t_0-a, t_0+a]$. Dado que M es la cota superior de $\|f(t,x)\|$ sobre $\mathcal{A}$, se comprueba fácilmente que

$$\|\varphi_h(t) - \varphi_h(t')\| \leq M|t - t'| \quad \text{para todo } t \text{ y } t' \in [t_0 - a, t_0 + a], \tag{22}$$

por lo que $(\varphi_h)_{(h\in(0,h_0))}$ es una familia equicontinua sobre el intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$.

De (22), teniendo en cuenta que $\varphi_h(t_0) = x_0$, deducimos también que

$$\|\varphi_h(t)\| \leq \|x_0\| + M|t - t_0| \leq \|x_0\| + Ma, \tag{23}$$

luego $(\varphi_h)_{(h\in(0,h_0))}$ es una familia uniformemente acotada sobre el intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Aplicando el teorema de Ascoli-Arzela (ver Apéndice) podemos extraer de esta familia una sucesión infinita, denotada por $(\varphi_{h_n})_{(n\in N)}$, uniformemente convergente sobre $[t_0 - a, t_0 + a]$ cuando $n \to \infty$ (es decir cuando $h_n \to 0$). Llamemos φ al límite de la sucesión, entonces $\varphi \in \mathcal{C}([t_0 - a, t_0 + a]; I\!R^n)$.

Vamos a comprobar que φ es solución del problema de valor inicial (19). Nos situamos en el caso en que $t^{h_n}_{i+1} \geq t \geq t^{h_n}_i \geq t_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_{h_n}(t) &= \varphi^{h_n}_i + \frac{t - t^{h_n}_i}{h_n}\left(\varphi^{h_n}_{i+1} - \varphi^{h_n}_i\right) \\
&\overset{(20)\Rightarrow}{=} \varphi^{h_n}_i + (t - t^{h_n}_i) f(t^{h_n}_i, \varphi^{h_n}_i) \\
&\overset{\text{dado que } (t^{h_n}_i, \varphi^{h_n}_i) \text{ no depende de } s}{=} \varphi^{h_n}_i + \int_{t^{h_n}_i}^{t} f(t^{h_n}_i, \varphi^{h_n}_i)\, ds.
\end{aligned} \tag{24}$$

También, de (20) tenemos

$$(25)\qquad \left[\begin{array}{ll} \varphi_i^{h_n} & = \varphi_{i-1}^{h_n} + h_n f(t_{i-1}^{h_n}, \varphi_{i-1}^{h_n}) \\ & = \varphi_{i-1}^{h_n} + \int_{t_{i-1}^{h_n}}^{t_i^{h_n}} f(t_{i-1}^{h_n}, \varphi_{i-1}^{h_n}) ds \\ & = \varphi_{i-2}^{h_n} + \int_{t_{i-2}^{h_n}}^{t_{i-1}^{h_n}} f(t_{i-2}^{h_n}, \varphi_{i-2}^{h_n}) ds + \int_{t_{i-1}^{h_n}}^{t_i^{h_n}} f(t_{i-1}^{h_n}, \varphi_{i-1}^{h_n}) ds \\ & \cdots \\ & = x_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^{h_n}}^{t_{j+1}^{h_n}} f(t_j^{h_n}, \varphi_j^{h_n}) ds; \end{array}\right.$$

de (24) y de (25) obtenemos

$$(26)\qquad \varphi_{h_n}(t) = x_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^{h_n}}^{t_{j+1}^{h_n}} f(t_j^{h_n}, \varphi_j^{h_n}) ds + \int_{t_i^{h_n}}^{t} f(t_i^{h_n}, \varphi_i^{h_n}) ds.$$

La parte derecha de la anterior identidad la podemos escribir como:

$$(27)\qquad \begin{aligned} x_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^{h_n}}^{t_{j+1}^{h_n}} f(t_j^{h_n}, \varphi_j^{h_n}) ds + \int_{t_i^{h_n}}^{t} f(t_i^{h_n}, \varphi_i^{h_n}) ds \\ = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds \\ + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^{h_n}}^{t_{j+1}^{h_n}} (f(t_j^{h_n}, \varphi_j^{h_n}) - f(s, \varphi(s))) ds \\ + \int_{t_i^{h_n}}^{t} (f(t_i^{h_n}, \varphi_i^{h_n}) - f(s, \varphi(s))) ds. \end{aligned}$$

De (26) y de (27) deducimos

$$
\begin{aligned}
(28)\quad \|\varphi_{h_n}(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds\| \\
&= \|\sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^{h_n}}^{t_{j+1}^{h_n}} (f(t_j^{h_n}, \varphi_j^{h_n}) - f(s,\varphi(s)))ds \\
&\quad + \int_{t_i^{h_n}}^{t} (f(t_i^{h_n}, \varphi_i^{h_n}) - f(s,\varphi(s)))ds\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j^{h_n}}^{t_{j+1}^{h_n}} \big(\|(f(t_j^{h_n}, \varphi_j^{h_n}) - f(s,\varphi(t_j^{h_n})))\| \\
&\quad + \|f(s,\varphi(t_j^{h_n}))) - f(s,\varphi(s))\|\big)\, ds \\
&\quad + \int_{t_i^{h_n}}^{t} \big(\|(f(t_i^{h_n}, \varphi_i^{h_n}) - f(s,\varphi(t_i^{h_n})))\| \\
&\qquad + \|f(s,\varphi(t_i^{h_n}))) - f(s,\varphi(s))\|\big)\, ds,
\end{aligned}
$$

donde, para $j = 0, 1, \cdots, i$, hemos acotado

$$
\begin{aligned}
&\|(f(t_j^{h_n}, \varphi_j^{h_n}) - f(s,\varphi(s)))\| \\
&\qquad \leq \|(f(t_j^{h_n}, \varphi_j^{h_n}) - f(s,\varphi(t_j^{h_n})))\| + \|f(s,\varphi(t_j^{h_n}))) - f(s,\varphi(s))\|.
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que

$$
\left[\begin{array}{l}
\|(f(t_j^{h_n}, \varphi_j^{h_n}) - f(s,\varphi(t_j^{h_n})))\| \leq \omega_f(h_n + \varepsilon_n) \\
\|f(s,\varphi(t_j^{h_n}))) - f(s,\varphi(s))\| \leq \omega_f(\omega_\varphi(h_n))
\end{array}\right.
$$

donde ω_f y ω_φ representan respectivamente los módulos de continuidad de las funciones f y φ:

$$
\left[\begin{array}{ll}
\omega_f(\varepsilon) = \displaystyle\max_{\substack{(t,y),\,(\tau,z)\in\mathcal{A} \\ |t-\tau|+\|y-z\|<\varepsilon}} \|f(t,y) - f(\tau,z)\| & \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \\
\omega_\varphi(\eta) = \displaystyle\max_{\substack{t,\,\tau\in[t_0-a,t_0+a] \\ |t-\tau|<\eta}} \|\varphi(t) - \varphi(\tau)\| & \stackrel{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0,
\end{array}\right.
$$

y

$$
\varepsilon_n = \max_{t\in[t_0-a,t_0+a]} |\varphi^{h_n}(t) - \varphi(t)| \stackrel{h_n\to 0}{\longrightarrow} 0
$$

De lo anterior deducimos que

$$
\|\varphi_{h_n}(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds\| \leq (t - t_0)\,(\omega_f(h_n + \varepsilon_n) + \omega_f(\omega_\varphi(h_n)))
$$

El término izquierdo de la desigualdad converge a

$$\|\varphi(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds\|$$

mientras que el segundo converge a 0 de lo que concluimos que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$$

para todo $t \in [t_0, t_0 + a]$. Un razonamiento similar para el caso en que $t \in [t_0 - a, t_0]$ que φ es solución de

$$x' = f(t, x) \quad \text{con } x(t_0) = x_0$$

sobre el intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$. **Q.E.D.**

Apéndice

Teorema de Ascoli-Arzelà *Sea* $(\varphi_\sigma)_{(\sigma \in \mathfrak{S})}$ *una familia de funciones de* $\mathcal{C}([\alpha, \omega]; I\!R^n)$ *tal que*

- $(\varphi_\sigma)_{(\sigma \in \mathfrak{S})}$ *es uniformemente acotada i.e. existe* M *tal que* $\|\varphi(t)\| \leq M$ *para todo* $t \in [\alpha, \omega]$,
- $(\varphi_\sigma)_{(\sigma \in \mathfrak{S})}$ *es equicontinua i.e. para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* t *y todo* τ *de* $[\alpha, \omega]$ *tales que* $|t - \tau| < \delta$, *tenemos* $\|\varphi_\sigma(t) - \varphi_\sigma(\tau)\| < \varepsilon$.

Entonces se puede extraer de $(\varphi_\sigma)_{(\sigma \in \mathfrak{S})}$ *una sucesión* $(\varphi_{\sigma_k})_{(k \in N)}$ *uniformemente convergente.* $\square$

2. Soluciones maximales

Hemos visto que un problema de valor inicial de la forma

$$\left\{\begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right. \tag{29}$$

tiene solución única en un entorno de t_0 cuando f es una función de $\mathcal{C}^0((a,b)\times\mathcal{O};\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ localmente lipschitziana en $(a,b)\times\mathcal{O}$ y (t_0,x_0) es un punto de $(a,b)\times\mathcal{O}$. En esta sección vamos a intentar estudiar el intervalo más amplio para el cual la solución de (29) está definida.

Definición 2.1. *Sea y una solución de la ecuación diferencial $x' = f(t,x)$ definida sobre un intervalo I_y. Se dice que z es una prolongación de y si es una solución de $x' = f(t,x)$ en un intervalo $I_z \supsetneq I_y$ y si $y(t) = z(t)$ para todo $t \in I_y$.*

Una solución x de la ecuación $x' = f(t,x)$ definida en I_x es una solución maximal (en el dominio $(a,b)\times\mathcal{O}$) si no admite ninguna prolongación (en el dominio $(a,b)\times\mathcal{O}$). □

Proposición 2.2. *Sea $f \in \mathcal{C}^0((a,b)\times\mathcal{O};\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ y localmente lipschitziana en $(a,b)\times\mathcal{O}$, siendo $\mathcal{O}$ un dominio abierto de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Sea $(t_0,x_0)\in(a,b)\times\mathcal{O}$ y sean y y z dos soluciones del problema de valor inicial*

$$\left\{\begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right.$$

definidas respectivamente en $I_y \ni t_0$ y $I_z \ni t_0$. Entonces:

- *$y(t) = z(t)$ para todo $t \in I_y \cap I_z$*
- *Suponiendo que $I_y \not\subseteq I_z$ y $I_z \not\subseteq I_y$ entonces la función x definida por*

$$\left[\begin{array}{ll} x(t) = y(t) & \forall\, t \in I_y \\ x(t) = z(t) & \forall\, t \in I_z \end{array}\right.$$

es una prolongación de y y de z. □

La demostración de esta proposición es consecuencia inmediata de la unicidad de la solución establecida en el teorema 1.7 (y el corolario 1.8). **Q.E.D.**

Entonces tenemos:

Teorema 2.3. *Sea $f \in \mathcal{C}^0((a,b)\times\mathcal{O};\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ y localmente lipschitziana en $(a,b)\times\mathcal{O}$, siendo $\mathcal{O}$ un dominio abierto de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Sea $(t_0,x_0)\in(a,b)\times\mathcal{O}$. Entonces el problema de valor inicial*

$$\left\{\begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right. \tag{30}$$

tiene una única solución maximal definida en un intervalo abierto $(\alpha,\omega)\subseteq(a,b)$. □

Demostración: Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de las soluciones de (30) y sea

$$I = \bigsqcup_{z\in\mathcal{S}} I_z,$$

siendo I_z el intervalo de definición de la solución z. Definimos

$$x(t) = z(t) \quad \text{para todo } t \in I_z.$$

Según la anterior proposición la función x está bien definida. Además $x(t_0) = x_0$ y $x' = f(t,x)$ en I dado que para todo $t \in I$ existe $I_z \ni t$ y $x \equiv z$ en I_z. Finalmente I es abierto, de otro modo supongamos que uno de sus extremos pertenezca a I: $I = [\alpha, \omega) \subset (a,b)$ entonces el punto $(\alpha, x(\alpha)) \in (a,b) \times \mathcal{O}$ luego existe un entorno de α: $(\alpha - \tau_0, \alpha + \tau_0)$ y una función y tal que

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & \text{en } (\alpha - \tau_0, \alpha + \tau_0) \\ y(\alpha) = x(\alpha). \end{cases}$$

Sea entonces z definida por

$$z(t) = \begin{cases} x(t) & \forall\, t \in I \\ y(t) & \forall\, t \in (\alpha - \tau_0, \alpha + \tau_0) \end{cases}$$

es una prolongación de x en $I \cup (\alpha - \tau_0, \alpha + \tau_0)$ lo que contradice el que x sea solución maximal.

Obviamente la solución maximal es única. **Q.E.D.**

También tenemos:

Teorema 2.4. *Sea $f \in \mathcal{C}^0((a,b) \times \mathcal{O}; \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ y localmente lipschitziana en $(a,b) \times \mathcal{O}$, siendo $\mathcal{O}$ un dominio abierto de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Sea $(t_0, x_0) \in (a,b) \times \mathcal{O}$ y sea x una solución maximal de*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definida sobre el intervalo maximal (α, ω). Entonces, para cualquier compacto $\mathcal{K} \subset (a,b) \times \mathcal{O}$ existen $t_1 \in [t_0, \omega)$ y $t_2 \in (\alpha, t_0]$ tales que $(t_i, x(t_i)) \notin \mathcal{K}$ para $i = 1, 2$. En otros términos la trayectoria de la solución: $\gamma_{(t_0,x_0)} = \{(t, x(t))/\, t \in (\alpha, \omega)$ sale de cualquier subconjunto compacto de $(a,b) \times \mathcal{O}$. $\square$

Demostración: Supongamos que $(t, x(t)) \in \mathcal{K}$ para todo $t \in [t_0, \omega)$. Sea

$$M = \max_{(t,x) \in \mathcal{K}} \|f(t,x)\|$$

entonces, para t, $t' \in [t_0, \omega)$ tenemos

$$\|x(t) - x(t')\| = \left\| \int_{t'}^{t} f(s, x(s))\, ds \right\| \leq \left| \int_{t'}^{t} \|f(s, x(s))\|\, ds \right| \leq M|t - t'|. \tag{31}$$

Consideremos una sucesión $(\tau_k)_{k \in N}$, $\tau_k \in [t_0, \omega)$ tal que

$$\tau_k \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} \omega.$$

dado que $(\tau_k)_{k \in N}$ es una sucesión de Cauchy, de (31) deducimos que $(x(\tau_k))_{k \in N}$ también es de Cauchy luego $x(\tau_k)$ tiene un límite cuando $\tau_k \to \omega$. Por otra parte este límite no depende de la sucesión $(\tau_k)_{k\in N}$ elegida. En efecto, consideremos otra sucesión de Cauchy $(\theta_m)_{m\in N}$, entonces por (31) tenemos

$$\|x(\tau_k) - x(\theta_m)\| \leq M|\tau_k - \theta_m| \overset{\tau_k,\theta_m\to\omega}{\longrightarrow} 0.$$

Luego, por continuidad, podemos definir

$$x(\omega) = \lim_{t\to\omega} x(t),$$

y dado que $\mathcal{K}$ es cerrado tenemos

$$(\omega, x(\omega)) \in \mathcal{K} \subset (a,b)\times\mathcal{O}.$$

Además, x es continua en $[t_0,\omega]$ y $s \mapsto f(s,x(s))$ también es continua en $[t_0,\omega]$ luego

$$x(\omega) = \lim_{t\nearrow\omega}\left(\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds\right) = \int_{t_0}^{\omega} f(s,x(s))\,ds$$

por lo tanto

$$x'(\omega) = f(\omega, x(\omega)).$$

Entonces, existirá un entorno de ω: $(\omega-\varepsilon,\omega+\varepsilon)$ tal que $(\omega-\varepsilon,\omega+\varepsilon)\times\mathcal{O}\subset(a,b)\times\mathcal{O}$ en el que el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y' &= f(t,y) \\ y(\omega) &= x(\omega) \end{aligned}$$

tenga definida una solución única. La unicidad implica que $x(t) = y(t)$ para todo $t \in [t_0,\omega]\cap[\omega-\varepsilon,\omega]$ luego la función

$$z(t) = \begin{cases} x(t) & \text{para } t\in[t_0,\omega] \\ y(t) & \text{para } t\in[\omega,\omega+\varepsilon] \end{cases}$$

es una prolongación de la solución x lo que contradice el hecho de que x es solución maximal. **Q.E.D.**

Corolario 2.5. *Sea $f\in\mathcal{C}^0((a,b)\times\mathcal{O};\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ y localmente lipschitziana en $(a,b)\times\mathcal{O}$, siendo $\mathcal{O}$ un dominio abierto de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Sea $(t_0,x_0)\in(a,b)\times\mathcal{O}$ y sea x una solución maximal de*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definida sobre el intervalo maximal (α,ω). Sea $\mathcal{A}$ un subconjunto compacto de $\mathcal{O}$ tal que $x(t)\in\mathcal{A}$ para todo $t\in(\alpha,t_0]$ (respectivamente $t\in[t_0,\omega)$ entonces $\alpha = a$ (respectivamente $\omega = b$). $\square$

Corolario 2.6. *Sea $f\in\mathcal{C}^0((a,b)\times\mathbb{R}^{\mathrm{n}};\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ y localmente lipschitziana en $(a,b)\times\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Sea $(t_0,x_0)\in(a,b)\times\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ y sea x una solución maximal de*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definida sobre el intervalo maximal (α, ω). *Suponemos que existe una función continua* $\varphi \in \mathcal{C}^0((a,b); \mathbb{R})$ *tal que* $\|x(t)\| \leq \varphi(t)$ *para todo* $t \in [t_0, \omega)$ *(respectivamente* $(\alpha, t_0]$*) entonces* $\omega = b$ *(respectivamente* $\alpha = a$*).* $\square$

finalmente

Corolario 2.7. *Sea* $f \in \mathcal{C}^0((a,b) \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}; \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ *y localmente lipschitziana en* $(a,b) \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. *Supongamos que* f *está acotada sobre* $(a,b) \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *entonces las soluciones de* $x' = f(t,x)$ *están definidas sobre* (a,b). $\square$

Corolario 2.8. *Sea* $f \in \mathcal{C}^0((a,b) \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}; \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ *y localmente lipschitziana en* $(a,b) \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. *Supongamos que existen dos funciones* h, $g \in \mathcal{C}(a,b)$ *tales que* $\|f(t,x)\| \leq g(t)\|x\| + h(t)$ *entonces las soluciones de* $x' = f(t,x)$ *están definidas sobre* (a,b). $\square$

Corolario 2.9. *Sea* $f \in \mathcal{C}^0((a,b) \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}; \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ *y localmente lipschitziana en* $(a,b) \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. *Supongamos que existen una función* $k \in \mathcal{C}(a,b)$ *tales que* $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k(t)\|x - y\|$ *entonces las soluciones de* $x' = f(t,x)$ *están definidas sobre* (a,b). $\square$

Teorema 2.10. *Sea* $f \in \mathcal{C}^0((a,b) \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}; \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ *y localmente lipschitziana en* $(a,b) \times \mathcal{O}$, *siendo* $\mathcal{O}$ *un dominio abierto de* $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

Si $\mathcal{O}$ *es acotado se tiene:*

$$\lim_{t\to\omega} d(x(t), \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \setminus \mathcal{O}) = 0 \quad \textbf{o} \ \omega = b\textbf{,}$$
$$\lim_{t\to\alpha} d(x(t), \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \setminus \mathcal{O}) = 0 \quad \textbf{o} \ \alpha = a\textbf{.}$$

Si $\mathcal{O}$ *no es acotado se tiene:*

$$\lim_{t\to\omega} d(x(t), \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \setminus \mathcal{O}) = 0 \quad \textbf{o} \ \lim_{t\to\omega} \|x(t)\| = \infty \quad \textbf{o} \ \omega = b\textbf{,}$$
$$\lim_{t\to\alpha} d(x(t), \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \setminus \mathcal{O}) = 0 \quad \textbf{o} \ \lim_{t\to\alpha} \|x(t)\| = \infty \quad \textbf{o} \ \alpha = a\textbf{.}$$

En particular, si $\mathcal{O} = \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *se tiene*

$$\lim_{t\to\omega} \|x(t)\| = \infty \quad \textbf{o} \ \omega = b\textbf{,}$$
$$\lim_{t\to\alpha} \|x(t)\| = \infty \quad \textbf{o} \ \alpha = a\textbf{.} \ \square$$

(Dejamos como problemas las demostraciones de los corolarios 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9 y del teorema 2.10.)

3. Dependencia de los datos

En lo que sigue estudiaremos en que modo la solución depende de los datos del problema. Los datos en cuestión son de dos tipos: los datos iniciales y los datos de la ecuación. los datos iniciales son t_0 el instante en el que "iniciamos" el proceso, x_0 el valor de la solución en el "inicio". Los datos de la ecuación tienen que ver con la función f que define la ecuación. La función f podrá depender de algunos parámetros cuya alteración afecte a la solución. También se puede estudiar el comportamiento de la solución si introducimos un cambio más radical en la ecuación.

Una herramienta clave para este estudio será el lema de Gronwall:

Lema 3.1. Lema de Gronwall generalizado *Sean $\phi \geq 0$ y $\psi \geq 0$ dos funciones continuas de $(\alpha, \omega) \subseteq I\!R$ a valores en $I\!R$, sea $C \geq 0$ una constante y sea $t_0 \in (\alpha, \omega)$. Suponemos que*

$$\phi(t) \leq C + \left| \int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s)ds \right| \quad \text{para todo } t \in (\alpha, \omega), \tag{32}$$

entonces

$$\phi(t) \leq C e^{\left| \int_{t_0}^{t} \psi(s)ds \right|} \quad \text{para todo } t \in (\alpha, \omega). \quad \square$$

Demostración. Supongamos $t \geq t_0$, siendo el otro caso, $(t \leq t_0)$, análogo a éste. Por otra parte, supongamos $C > 0$. Definamos

$$\Psi(t) = \int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s)ds.$$

Entonces

$$\Psi'(t) = \psi(t)\phi(t)$$

por lo que

$$\Psi'(t) = \psi(t)\phi(t) \leq \psi(t) \left(C + \int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s)ds \right) = \psi(t)(C + \Psi(t)).$$

Luego, dado que $C + \Psi(t) \geq C > 0$ tenemos

$$\frac{\Psi'(t)}{C + \Psi(t)} \leq \psi(t)$$

e integrando entre t_0 y t tenemos

$$\ln(C + \Psi(t)) - \ln(C) \leq \int_{t_0}^{t} \psi(s)ds$$

de lo que deducimos

$$C + \Psi(t) \leq C e^{\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds}$$

y por lo tanto

$$\phi(t) \leq C e^{\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds}.$$

Si $C = 0$ entonces la desigualdad (32) sigue válida si introducimos cualquier $\varepsilon > 0$ en el lugar de C luego

$$\phi(t) \leq \varepsilon e^{\int_{t_0}^{t} \psi(s)} ds$$

para todo $\varepsilon > 0$ por lo que $\phi(t) = 0$.

Un razonamiento análogo para $t \leq t_0$ nos lleva a la conclusión. **Q.E.D.**

Corolario 3.2. (Lema de Gronwall) *Sea $\phi \geq 0$ una función continua de (α, ω) a valores en $I\!R$. Suponemos que existen dos constantes $K_1 \geq 0$ y $K_2 \geq 0$ tales que ϕ verifica la siguiente desigualdad:*

$$\phi(t) \leq K_1 + K_2 \left| \int_{t_0}^{t} \phi(s) ds \right|, \quad \text{para todo } t \in (\alpha, \omega).$$

Entonces

$$\phi(t) \leq K_1 e^{K_2 |t - t_0|}, \quad \text{para todo } t \in (\alpha, \omega). \quad \square$$

Demostración. Aplicamos el lema 3.1 con $C = K_1$ y $\psi \equiv K_2$. **Q.E.D.**

Proposición 3.3. *Sea $f(t,x)$ una función continua en un conjunto abierto $\mathcal{D} \subset I\!R^{n+1} \mapsto I\!R^n$ y lipschitziana con respecto a x:*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{para todo } (t,x) \text{ y todo } (t,y) \text{ de } \mathcal{D}.$$

Para (t_0, x_0) y (t_0, y_0) en $\mathcal{D}$ sean $x(t)$ e $y(t)$ las soluciones de

$$x'(t) = f(t(x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

e

$$y'(t) = f(t(y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

en un intervalo $I = [t_0 - a, t_0 + a]$ entonces se tiene

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| \, e^{L\,|t - t_0|} \quad \text{para todo } t \in [t_0 - a, t_0 + a]. \quad \square$$

Demostración. tenemos

$$\left[\begin{array}{ll} x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds, & \text{para todo } t \in [t_0 - a, t_0 + a], \\ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds, & \text{para todo } t \in [t_0 - a, t_0 + a]; \end{array} \right.$$

y restando

$$x(t) - y(t) = x_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds,$$

$$\text{para todo } t \in [t_0 - a, t_0 + a].$$

Entonces,

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \|(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))\| ds \right|,$$

para todo $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$.

Aplicamos el anterior lema de Gronwall con $\phi(t) = \|x(t) - y(t)\|$, $K_1 = \|x_0 - y_0\|$ y $K_2 = 1$.
Q.E.D.

Cuando la variación de los datos afecta a la propia ecuación, el lema de Gronwall todavía nos permite acotar la diferencia dentre las soluciones:

Proposición 3.4. *Sean $f(t, x)$ y $g(t, x)$ dos funciones continuas en un conjunto abierto $\mathcal{D} \subset I\!R^{n+1} \mapsto I\!R^n$ tales que f sea lipschitziana con respecto a x con constante L y $f - g$ es acotada :$|f - g| \leq K$.*

Entonces si $x(t)$ y $y(t)$ son soluciones de

$$\begin{array}{ll} x'(t) = f(t(x(t)) & \textit{para } t \in [a, b] \\ y'(t) = g(t(y(t)) & \textit{para } t \in [a, b] \end{array}$$

para algún intervalo $[a, b]$ que contiene t_0, se tiene:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq [\|x(t_0) - y(t_0)\| + K(b - a)]\, e^{L|t - t_0|} \quad \textit{para todo } t \in [a, b]. \quad \square$$