Tema 16: Juegos de Votaciones

1. En muchos procesos de votación, como pudimos ver en el video de presentación de la asignatura, caben comportamientos estratégicos. Los índices de poder de votación se pueden aplicar también a coaliciones como los cárteles. Los juegos de votación más sencillos tienen dos candidatos y las diferencias entre éstos son muy simples (muchas veces, la localización en tres posibles lugares, como Izquierda, Derecha, Centro; Figura 16.1.a). Todo depende de cómo se distribuyan las preferencias de los votantes entre esas tres opciones. Si los votantes están equidistribuidos y prefieren a los candidatos más cercanos a sus preferencias, éstos irán al centro (Figura 16.2). Sólo si los votantes se concentran en uno de los extremos los candidatos irán a ese extremo (Figura 16.3).

2. Cuando las diferencias entre los dos candidatos de referencia son más sutiles la solución es lo que se conoce como el **teorema del votante mediano**. Los votantes aplican el mismo principio de antes, votando por el candidato más cercano a su posición. Los candidatos, para maximizar su utilidad –sus votos– se sitúan donde está el votante mediano. Cuando los votantes están equidistribuidos –digamos que hay un votante en cada punto del espectro político que va de 0 a 1– la mediana y la media coinciden y el votante mediano está justo en el centro. Allí irán los candidatos, repartiéndose cada uno la mitad de los votos. Se puede demostrar matemáticamente con facilidad: imaginemos que los dos candidatos se sitúan en dos puntos separados del segmento [0,1], con coordenadas s_1 y s_2; ocurrirá que el candidato más a la izquierda se llevará todos los votos entre 0 y la mitad de la distancia que le separa del otro candidato $(s_1 + s_2)/2$, y este se llevará todos los que hay desde ahí hasta el extremo derecho. Por tanto, la función de utilidad del primero será $u_1 = (s_1 + s_2)/2$ y del segundo $u_2 = 1 - (s_1 + s_2)/2$. Dado que hay simetría en el juego, deberá darse que $u_1 = u_2$, y ello sólo es posible si $s_1 = s_2$, lo que conduce a que $s_1 = s_2 = 1/2$.

3. Si los votantes no están equidistribuidos –es decir, están más concentrados a la derecha o a la izquierda- la media será la misma, pero la mediana ya no. Éste es el punto del espacio [0,1] tal que a su derecha y a su izquierda quedan el 50% de los votantes. Por tanto, si éstos están más concentrados a la derecha (más cerca del 1), la mediana estará a la derecha de la media (mediana > media); y al contrario si los votantes se concentran a la izquierda (más cerca del 0). En este caso el teorema del votante *mediano* se cumple igualmente, siendo lo importante la mediana, no la media. Los candidatos se situarán en la mediana, y por eso se irán a la derecha si los votantes se acumulan allí, y a la izquierda si lo hacen ahí. Imaginemos que el 50% de los votantes prefieren opciones situadas entre 0 y 0,75, y el otro 50% prefieren posiciones situadas entre 0,75 y 1. La media seguirá siendo 0,5, pero la mediana será 0,75. Los candidatos se situarán precisamente en ese punto, de forma que $s_1 = s_2 = 3/4$.

4. Cuando el número de candidatos es tres, las complicaciones y posibilidades se multiplican. Vimos un ejemplo en el video de presentación de la asignatura, con la entrada de posibles socios en un club. En el epígrafe 16.3 se analiza con carácter general ese mismo tipo de problemas. Imaginemos tres candidatos (s_1, s_2 y s_3), y tres votantes cuyas preferencias son: *votante 1*, $s_1 > s_2 > s_3$; *votante 2*, $s_2 > s_3 > s_1$; *votante 3*, $s_3 > s_1 > s_2$. Hay 20 votantes del primer tipo y 15 de los otros dos. Si todos los votantes votan según sus preferencias, ganará s_1 por tener más votos que los otros dos (**regla de la pluralidad**). Pero los votantes de tipo 2 y 3 habrían preferido a s_3 antes que a s_1. Cuando hay una

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

5. Lo que cuenta el libro de las propiedades deseables de un sistema de elección (eficiencia, sinceridad, neutralidad y decisividad) y el teorema de imposibilidad de Arrow no es más que una curiosidad (el teorema asegura que sólo una dictadura es compatible con las cuatro propiedades). Es mucho más interesante el ***sistema de votación de Condorcet***, que en algunos casos ofrece mejores soluciones que el sistema de elección basado en el candidato más votado (y cumple con las 3 primeras propiedades deseables). Ahora tenemos tres únicos votantes con las siguientes preferencias: *votante 1*, $s_1 > s_2 > s_3$; *votante 2*, $s_2 > s_3 > s_1$; *votante 3*, $s_3 > s_2 > s_1$. Dado que el candidato s_2 es preferido a s_1 dos veces frente a una vez en que ocurre lo contrario, y lo mismo respecto de s_3, el elegido debe ser s_2. El sistema de Condorcet no cumple con la propiedad de decisividad porque hay casos en los que no consigue señalar a un ganador. Para verlo sólo tenemos que sustituir las preferencias del *votante 3* por $s_3 > s_1 > s_2$. Ahora todos los candidatos son preferidos 2 a 1 frente a otro. Si se impone una decisión cualquiera, los votantes empiezan a votar estratégicamente y el sistema deja de ser sincero.

6. Hay otras alternativas, además de las dos anteriores (Arrow y Condorcet), como **la regla de Borda** (o **regla de votación posicional**). Ésta consiste en asignar puntos a cada candidato en función de su posición en el orden de preferencias. Por ejemplo, 3 puntos al preferido, 2 al segundo y 1 al tercero. Por tanto, no se suman votos, sino puntos. Pero como con la regla de pluralidad –gana el candidato con más votos- hay posibilidades de explotar con ventaja el voto estratégico. El libro presenta en el epígrafe 16.5 un ejemplo muy sencillo.

7. El epígrafe 16.6 nos prepara para el importante tema de los índices de poder en los procesos de negociación, y más en concreto, para el concepto de **valor de Shapley**. El libro utiliza el mecanismo del *velo de la ignorancia* para generar las probabilidades que utiliza para calcular los valores esperados del producto marginal de la participación de cada individuo en la coalición. El libro lo explica bien, pero apunta también (nota al pie 14 de la página 514) al *índice de Banzhaf* como alternativa. Apliquemos este al ejemplo que plantea el texto. Los tres jugadores, 1, 2 y 3 pueden formar coaliciones ganadoras, que requieren al menos dos participantes. La coalición de tres participantes es ganadora (123, da igual el orden), pero en ella ninguno de los participantes es imprescindible para ello, pues si uno sale, los otros dos se bastan para hacer ganadora a la coalición que queda. En las coaliciones de dos cualquiera de los dos es imprescindible, y hay tres de ellas (12, 13, 23). Las coaliciones de uno no son ganadoras. El total de coaliciones ganadoras es de cuatro (123, 12, 13, 23), en las que 1 es imprescindible en dos casos, 2 en otros dos, y 3 en otros dos. Por tanto el número total de casos en los que un jugador es imprescindible es de seis, y de esos seis el jugador 1 es imprescindible en $p_1 = 2/6$, el jugador 2 en $p_2 = 2/6$ y el jugador 3 en $p_3 = 2/6$. Esos son los "pesos" relativos, el poder, de cada jugador en cualquier negociación o coalición. En el epígrafe 16.8 se analiza con esta nueva herramienta un caso real, que incluye la posibilidad de veto, usando el mecanismo del *velo de la ignorancia*. Para entenderlo, hay que recordar que la tabla registra cuándo la *entrada* de un jugador determinado aporta el paso de una coalición insuficiente a una suficiente o ganadora. En la primera fila, por ejemplo, la coalición es 123. El jugador con veto 1 ya está dentro de la coalición –entra el primero- y cuando entra, su aportación no es decisiva;

después entra el jugador 2, y esta entrada ya hace "saltar" a la coalición de insuficiente a suficiente. Por eso el jugador 2 tiene un 1 en esa fila y los demás un 0. Cuando vamos al mundo real suele haber más de tres jugadores, y las posibles combinaciones son tantas que no resulta práctico montar una tabla como la de la Figura 16.9. El libro ofrece un procedimiento de cálculo. Primero hay que calcular la probabilidad de que se de la configuración apropiada, y después multiplicarla por la probabilidad de que sea el jugador

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

8. Aunque no vienen en el libro, vamos a dar tres definiciones importantes. En los juegos con transferencia de utilidad se llama ***solución*** a una propuesta de reparto y coalición que garantiza *estabilidad*, es decir, en la que ninguno de los participantes en la coalición suficiente pueda estar interesado en romper el acuerdo. Se llama ***valor del juego*** al pago que un jugador tiene garantizado que puede recibir de un juego si toma una decisión racional, independientemente de las decisiones de los demás jugadores; y ocurrirá que ningún jugador aceptará formar parte de una coalición si no recibe como pago al menos el *valor del juego*. Se llama ***valor de Shapley*** a lo que corresponde a cada jugador en una propuesta de reparto según un criterio de arbitraje diseñado por Lloyd S. Shapley, y que consiste en asignar a cada jugador una parte en proporción al número de coaliciones potencialmente vencedoras en las que este participa de forma no redundante.

Votar es un juego, un acto importante en el mundo de los negocios y en la vida económica.

Juegos de votación en forma formal: primero juegan los candidatos y luego los votantes.

Para resolver estos juegos de votación se utiliza la perfección en subjuegos.

Cuando los votantes se distribuyen de manera simétrica en el espectro, cada candidato tiene una estrategia dominante, situarse en el centro→ Teorema del votante mediano.

Reglas de votación en elecciones con tres candidatos:

- Regla de la pluralidad: típica de EEUU. Los votantes votan de forma que no se corresponde con sus auténticas preferencias para conseguir un mejor resultado.

  Esta votación estratégica solo se puede evitar mediante decisiones dictatoriales.

  Con tres candidatos se plantean dificultades especiales a los votantes que quieren maximizar su utilidad.

- Regla de Borda: Utilizada en EEUU para elegir el MVP (jugador más valioso); grandes comportamientos estratégicos.

Los juegos en forma de coalición, adecuados para formar partidos y coaliciones de gobierno.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

izquierda, centro o derecha) o continuo (donde puede elegir cualquier punto entre extrema izquierda y extrema derecha).

La diferencia entre ambos espectros está en su capacidad para distinguir entre posiciones políticas diferentes.

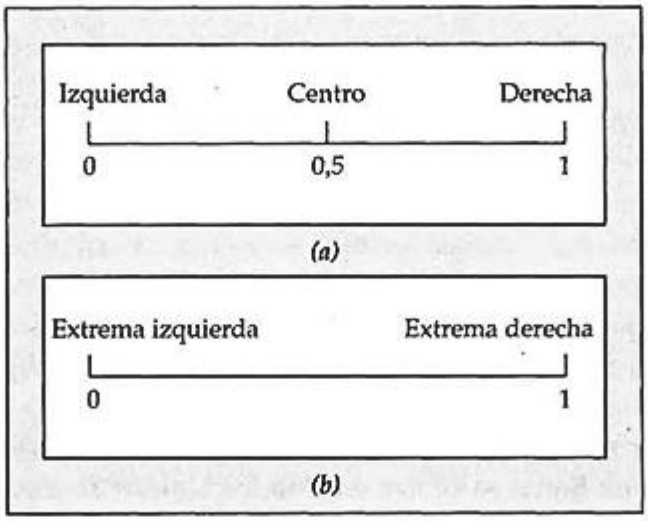


Figura 16.1. Espectros de temas: (*a*) espectro discreto; (*b*) espectro continuo.

Estrategias corporativas o puntos del espectro: cuanto más liberal, más amante del riesgo y más posibilidades de beneficios; y cuanto más conservadora, más aversa al riesgo, y menos beneficios.

En un juego de votación, primero actúan los candidatos: cada candidato i escoge simultáneamente una posición, si, sobre el espectro.

Después actúan los votantes, en función de lo próximos que se encuentren a los candidatos:

Si cada votante j tiene una posición preferida en el espectro, vj → la utilidad del votante i, ui, que le proporciona un candidato que tome la posición, si, se mide en términos de

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

donde el signo menos refleja el hecho de que cuanto más lejos esté el candidato del punto ideal del votante, menor será la utilidad que el votante obtiene de ese candidato.

Un votante maximiza su utilidad votando al candidato más próximo a su posición favorita. Si hay dos candidatos a igual distancia se utiliza una estrategia mixta, echando la moneda al aire, con probabilidad de 0,5 para cada uno.

La utilidad de los candidatos se mide por los votos recibidos.

Si hay 4 millones de votantes:

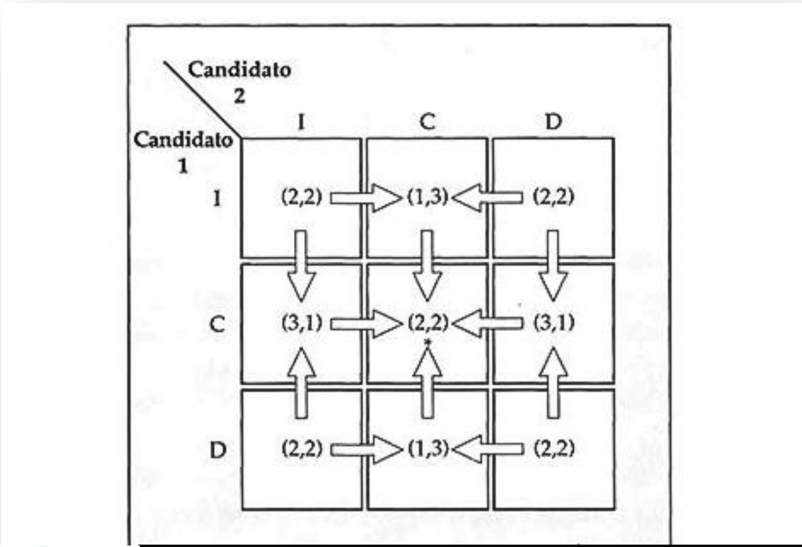
En la Izquierda, 1 millón
En el Centro, 2 millones
En la Derecha, 1 millón

las estrategias óptimas de los candidatos dependerá de cómo se distribuyen los votantes. Aquí lo hacen de forma simétrica sobre el espectro de temas.

Los candidatos no tienen por qué saber lo que votarán los votantes.

Si el candidato 1 escoge izquierda y el 2 escoge centro→ el 1 se llevará todos los votos de la izquierda, 1 millón, ya que es el más cercano a estos votantes, a distancia cero. Y el candidato 2 se llevará el resto, por ser el más cercano de los dos a la derecha.

Utilizando la perfección en subjuegos se genera la matriz 3x3:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Cuando ambos candidatos se encuentran en la misma posición, se reparten los votos totales: Teorema del votante mediano (teorema de Black)

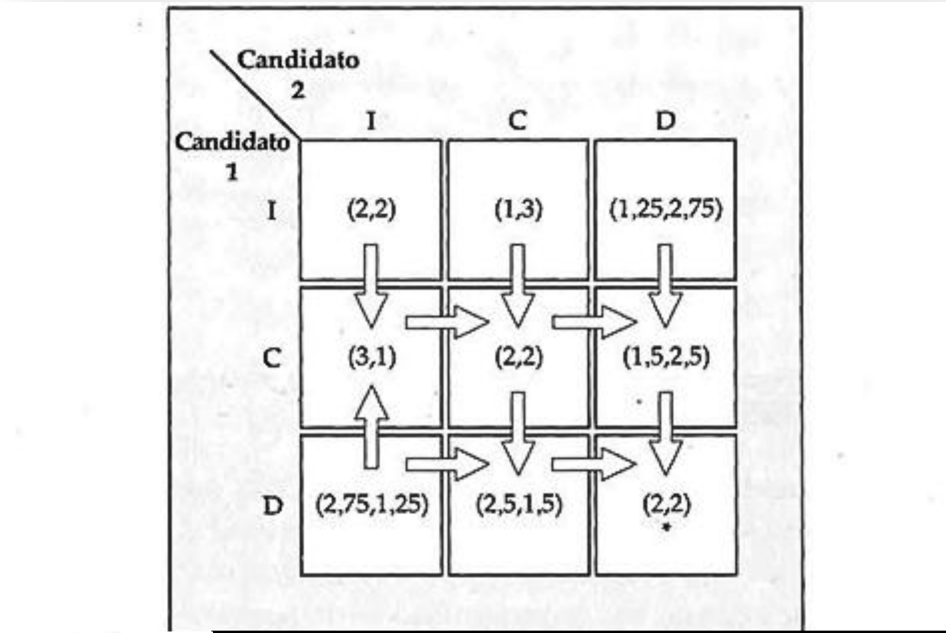
El juego de votación tiene un único equilibrio perfecto en subjuegos. Todos los candidatos adoptan una posición en el centro, estrategia dominante para todos los candidatos→Los votantes responden votando por cada candidato con la misma intensidad, y los candidatos se reparten los votos totales, 2 millones para cada uno.

Si el votante medio o mediano está en el centro del espectro político, también lo querrán estar los candidatos.

Si los candidatos no buscan el centro, supongamos la distribución de votantes siguiente:

En la Izquierda, 1 millón de votantes
En el Centro, 0,5 millones de votantes
En la Derecha, 2,5 millones de votantes

El votante mediano no está al centro, sino a la derecha→obtendremos la matriz de la primera ronda:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Tomar una posición en la Izquierda, I, está dominada dos veces, por tomar posición Centro, C, y tomar posición Derecha, D.

En el único equilibrio, ambos candidatos toman posiciones D, repartiéndose los votos totales.

Que ambos se sitúen en el centro no es equilibrio; uno puede moverse a la D y recoger 500.000 votos más.

En el centro, el candidato obtendría votos de la izquierda y del centro, 1,5 millones. Moviéndose a la derecha, renunciará a la mitad de votos de la izquierda, 0,5 millones, y a la mitad de los del centro, 0, 25 millones, pero obtiene la mitad de los de la derecha, 1,25 millones, es decir, llevaría medio millón más de votos→ en un equilibrio de votación, el votante mediano obtiene exactamente lo que quiere.

16.2.- <u>Juegos de votación con dos candidatos y un espectro de temas continuo:</u>

Teorema del votante mediano: supongamos que hay dos candidatos y que los votantes se distribuyen continuamente sobre el espectro de temas [0, 1].

Sea s* la mediana de la distribución de votantes.

El vector de posición de los candidatos (s*, s*) es una solución del juego.

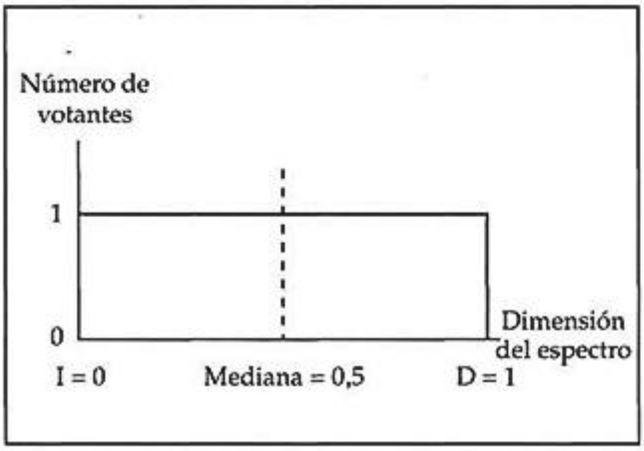


Figura 16.4. Espectro de temas continuo, votantes

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Los candidatos juegan en primer lugar; cada candidato i escoge un punto, si, en el espectro. Después los votantes se enfrentarán al vector s=(s1, s2) de posiciones de los candidatos. Cada votante ordena a sus candidatos por proximidad a su posición.

Un votante j con posición ideal en el punto vj maximiza su utilidad así:

$$
\begin{aligned}
u_j(s) &= -d(v_j, s_1) \quad \text{si } d(v_j, s_1) \leq d(v_j, s_2) \\
&= -d(v_j, s_2) \quad \text{si } d(v_j, s_2) \leq d(v_j, s_1)
\end{aligned}
$$

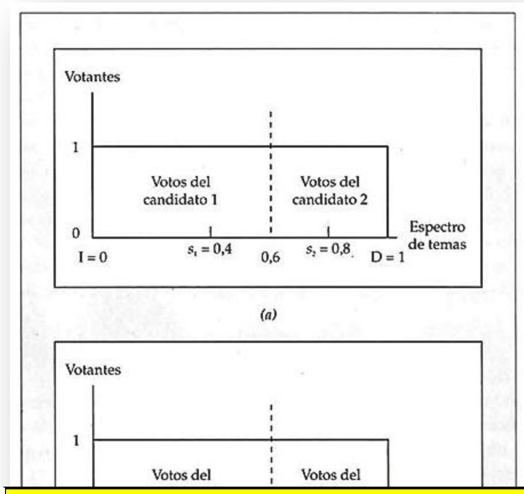
donde d() es la función de distancia.

Si s=(0,4, 0,8) y vj = 0,5 →la distancia del votante j al candidato 1 es 0,1 y al candidato 2 será 0,3. Por tanto, como el 1 está más cerca, el votante j votará por este candidato.

Usando perfección en subjuegos se pueden establecer totales de votos para ambos candidatos en el turno de votación, basándonos en el vector de posiciones adoptado, s→estableciéndose una función de utilidad de los candidatos en la primera etapa, que resuelta nos lleva a una solución de todo el juego de votación.

Establecer los votos totales se simplifica si el juego es simétrico, cuando para ambos candidatos existe una misma estrategia, [0, 1], y por tanto se reparten los votos.

Si los dos se cambian los papeles al final también se intercambian los totales de votos:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

En 16.5a, el vector de posiciones de candidatos es s=(0,4, 0,8)→ El candidato 1 obtiene todos los votos a la izquierda de la posición 0,6, es decir el 60% de los votantes; y el 2 obtiene todos los de la derecha de 0,6, es decir el 40% de votantes.

En 16.5b, se intercambian los papeles, con vector de posiciones s=(0,8, 0,4)→ El candidato 1 obtiene el 40% de votos y el 2 un 60%

Intercambiarse los papeles significa intercambiarse los totales de votos. En términos de utilidades:

$$u_1(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2)$$

La función de utilidad general para los dos candidatos en la primera etapa del juego, por simetría, bastará calcular la del candidato 1, **u1=(s)**

Hay tres casos a considerar, dependiendo de la relación entre las estrategias de los dos candidatos:

Caso 1: s1<s2: El candidato 1 consigue todos los votantes desde 0 hasta el valor frontera (s1+s2)/2; como es una distribución uniforme→fig 16.5a.

$$u_1(s) = \frac{s_1 + s_2}{2}$$

creciente.

Caso 2: s1=s2: Los candidatos se reparten los votos.

$$u_1(s) = 0{,}5$$

Caso 3: s1>s2: El candidato 1 consigue todos los votos desde el valor frontera, (s1+s2)/2, hasta 1. fig 16.5b. Como la distribución es uniforme:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Como el porcentaje total de votos es 100%=1, el juego es de suma 1→ la función de utilidad del candidato 2 será:

$$u_2(s) = 1 - u_1(s)$$

Las curvas de indiferencia de la función de utilidad del candidato 1:

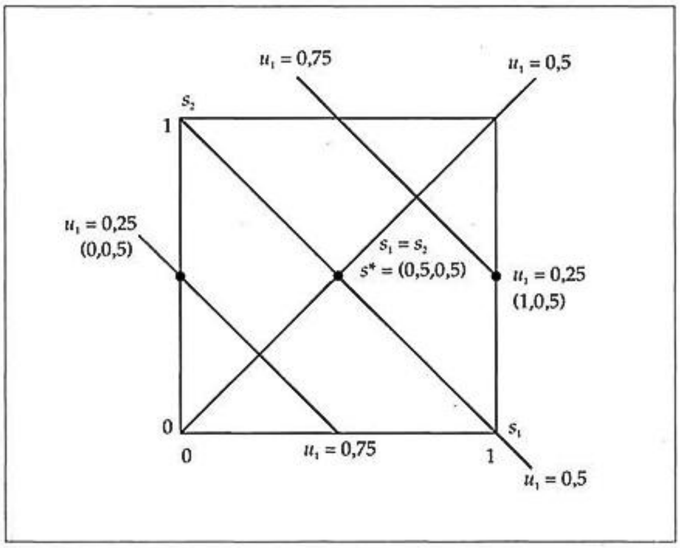


Figura 16.6. Curvas de indiferencia, candidato 1, espectro de temas continuo.

Su función de utilidad tiene gran discontinuidad cerca de la recta s1=s2, lo impide utilizar cálculo diferencial para hallar el equilibrio:

En s=(0,24, 0,26)→ u1=0,25

En s=(0,26, 0,24)→ u1=0,75

En s=(0,25, 0,25)→ u1=0,50

Pero se puede hallar el equilibrio por simetría: El equilibrio debe estar en la recta donde s1=s2=0,5. Como el juego es de suma constante, se puede utilizar el teorema de

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

El teorema del votante mediano también sirve para cualquier distribución simétrica de puntos favoritos de los votantes, no solo para distribución uniforme.

La mediana de cualquier distribución simétrica en [0, 1] está en 0,5

Las curvas de indiferencia de u1 tendrán aspecto diferente pero los candidatos se situarán donde está el votante mediano.

Si la distribución es asimétrica, la mediana no tiene por qué pasar por el centro, pero los candidatos aún se situarán donde esté el votante mediano.

Si la distribución de puntos favoritos de los votantes contiene discontinuidades, pueden haber dos votantes medianos y por tanto un candidato situado en cada a mediana.

16.3.- <u>Juegos de votación con múltiples candidatos:</u>

Si hay tres o más candidatos aumentan las consideraciones estratégicas; en particular las preferencias de los votantes pues a los votantes les puede interesar votar estratégicamente en vez de hacerlo de acuerdo con sus preferencias.

Supondremos en todo momento que los candidatos ya han fijado sus posiciones (programas…) y la complejidad surge del lado de los votantes.

Considerando una elección de tres candidatos s=(s1, s2, s3) y que en USA para elección con tres candidatos rige la regla de la pluralidad→el votante puede marcar el nombre de un candidato, ganando el que más marcas tiene (pluralidad)

Tenemos tres candidatos, ordenados de mejor a peor:

Votante tipo 1: $s_1 > s_2 > s_3$
Votante tipo 2: $s_2 > s_3 > s_1$
Votante tipo 3: $s_3 > s_1 > s_2$

Hay 20 votantes tipo 1, 15 del tipo 2 y 15 del tipo 3, todos votan sinceramente a sus candidatos respectivos, c1, c2 y c3.

La sinceridad conduce a que gane el c1. Gana c1.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

2. Los candidatos que ganan pueden en realidad tener una mayoría contraria a su elección.

   En esta elección los v2 y v3 prefieren a c3 antes que a c1 (30/50=60%); aquí c3 pierde frente a c1, vencedor→mayoría en contra.

3. Siempre que haya mayoría en contra, existen incentivos para votar estratégicamente→ cualquier voto que no coincida con las preferencias del votante→ conducirá al resultado preferido por el votante si votase sinceramente.

Si todos los votantes tipo 2 y 3 votan a c3→ votación sincera por parte de v3 y estratégica por v2.

c3 es elegido por margen 60% frente a c1, 40%

La elección de c3 es mejor para todos los votantes tipo 2 a la elección de c1→ que los v2 votaran estratégicamente ha dado mejor resultado.

Se han buscado otras propiedades deseables y comúnmente aceptadas que deban cumplir las elecciones:

a) **Eficiencia**: No hay ningún candidato que sea preferido al vencedor por todos los votantes.

b) **Decisividad**: El proceso conduce a un único vencedor cada vez→ se necesitan mecanismos para deshacer empates.

c) **Sinceridad**: Ningún votante tiene en ningún momento incentivos para votar estratégicamente.

d) **Neutralidad**: El vencedor no depende de los nombres de los candidatos ni del orden en que aparecen sus nombres en la papeleta.

Hay muchas maneras de arrancar una victoria en una elección no neutral.

La única regla que satisface al mismo tiempo los criterios de eficiencia, decisividad, sinceridad y neutralidad cuando hay al menos tres votantes y tres candidatos se llama dictadura: incompatible con los principios democráticos por sus consecuencias

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

El esquema de votación del marqués de Condorcet casi cumple las cuatro propiedades deseables sin ser dictatorial (eficiencia, sinceridad y neutralidad): él propuso que el vencedor de una elección con tres candidatos debería ser el que obtuviera una mayoría contra cualquier otro candidato en comparaciones dos a dos→ si existe, todos los jugadores tienen una estrategia dominante, votar sinceramente.

Ejemplo de Condorcet: hay tres tipos con preferencias:

Votante tipo 1: $s_1 > s_2 > s_3$
Votante tipo 2: $s_2 > s_3 > s_1$
Votante tipo 3: $s_3 > s_2 > s_1$

Si hay un votante de cada tipo, c2 tiene pluralidad de 2 a 1 sobre c1 y de 2 a 1 sobre c3→ el c2 es el vencedor.

La regla de la pluralidad conduciría a un empate a tres bandas y el voto estratégico llevaría a un resultado peor para los votantes.

> Si v1 para manipular el resultado votara por c3 en vez de por c2 en la pugna por los candidatos c2 y c3→ c3 obtendría pluralidad frente a c2 y frente a c1, saldría elegido.

Si modelamos la elección como un juego en forma de coalición, la elección de c2 es el único resultado.

El esquema de votación de Condorcet nos es decisivo. P ej: Si

Votante tipo 1: $s_1 > s_2 > s_3$
Votante tipo 2: $s_2 > s_3 > s_1$

Votante tipo 3: $s_3 > s_1 > s_2$

El c2 tiene ventaja de 2 a 1 sobre c3, y c3 tiene ventaja 2 a 1 sobre c1 y c1 tiene ventaja 2 a 1 sobre c2→ ninguno tiene pluralidad sobre los otros, luego no hay decisión. Y como el esquema de Condorcet obliga a ser decisivo, se elige un resultado minoritario que crea oportunidades para el voto estratégico.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

16.4.- Elecciones presidenciales con múltiples candidatos, 1824-1992:

En la Convención constitucional estadounidense conocían la problemática en torno a la regla de la pluralidad, y para ello crearon una institución, el colegio electoral, que escoge al presidente y limita su papel.

Ha funcionado de forma similar a la regla de la mayoría en elecciones con dos candidatos; en elecciones con múltiples candidatos los resultados han sido mucho más volubles, dejando un amplio margen para el voto estratégico.

(…)

En todos los casos de elecciones con múltiples candidatos, los perdedores tuvieron la oportunidad de votar estratégicamente; pero al desperdiciarla, obtuvieron un mal resultado.

16.5.- Reglas de votación posicionales:

El conde de Borda, antes de la Revolución francesa, propuso una mejora de la regla de la pluralidad→reglas de votación posicionales, que asignan puntos a distintas posiciones en la lista de preferencias, basándose la preferencia final en los puntos totales.

Tres candidatos y una papeleta con tres líneas, en cada una se podría el candidato elegido y se les darían 3, 2 y 1 punto, respectivamente. Se sumarían todos los votos de cada candidato y el resultado final se confeccionaría de acuerdo con los puntos totales.

Consideremos los tres candidatos, c1, c2 y c3 y tres tipos de votantes:

Votante tipo 1: $s_1 > s_2 > s_3$
Votante tipo 2: $s_2 > s_3 > s_1$
Votante tipo 3: $s_3 > s_1 > s_2$

Hay 20 votantes tipo1, 15 del tipo 2 y 15 del tipo 3. Suponiendo que todos votan sinceramente, entonces:

- c1 obtiene: 20 primeras posiciones, 60 ptos., 15 segundas posiciones, 30 ptos., y 15 terceras posiciones, 15 ptos., en total 105 puntos.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

El resultado bajo la regla de Borda y bajo el de la pluralidad (ambas muy subceptibles de voto estratégico):

1. Candidato 1: 105 puntos
2. Candidato 2: 100 puntos
3. Candidato 3: 95 puntos

Los votantes de tipo 2 y 3 tienen los mismos incentivos para intentar que gane c3, en último lugar, en vez de c1 y además tienen votos para conseguirlo si rellenan las papeletas así:

Votante tipo 2: $s_3 > s_2 > s_1$
Votante tipo 3: $s_3 > s_2 > s_1$

pues resultaría:

1. Candidato 3: 110 puntos
2. Candidato 2: 100 puntos
3. Candidato 1: 90 puntos

la clave está en que los votantes de tipos 2 y 3 situaron al primer candidato en el último lugar.

Con votación posicional, otorgando votación descendente a los candidatos y dejando fuera a los que no interesa, también se puede hacer voto estratégico.

16.6 .- <u>Juegos de votación en forma función de coalición:</u>

En juego de votación, cuanto más en bloque actúen los votantes, más posibilidades de obtener lo que quieren. Por ello existen partidos, coaliciones, alianzas, camarillas…

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

El valor 1 significa 100% de control del proceso político.

La función coalición que corresponde a un juego de negociación es:

$$v(S) = 1 \quad \text{si } S = N$$
$$v(S) = 0 \quad \text{en caso contrario}$$

En un juego de negociación, la única coalición que controla algo es la coalición total; cualquier otra que se levanta de la mesa de negociación carece de poder para influir en los resultados.

Juego sencillo: juego en forma de función de coalición limitado a los valores 0 y 1. Algunas restricciones que tienen son:

- No pueden coexistir dos coaliciones ganadoras, disjuntas, tal que v(S) = v (T) = 1 pues evita la condición de exclusividad.
- Exclusividad: Si S es ganadora, N-S no es ganadora→ v(S) = 1 implica que v(N-S)=0
- Monotonicidad: Si S es ganadora y T contiene a S, entonces, T es ganadora → v(S) = 1 y T contiene a S, entonces v(T) = 1
- No nulidad: La coalición total N es ganadora, v(N) = 1

En juegos de negociación, solo la coalición total es ganadora.

Todos los juegos de votación que merecen la pena, cumplen las condiciones de exclusividad, monotonicidad y no nulidad.

Los procesos por los que un proyecto se convierte en ley en EE UU y las votaciones en el seno de las empresas, son ejemplos de formación de coaliciones ganadoras.

Sea un conjunto de N votantes, todos los accionistas con voto.

Sea i un accionista y w(i) la cantidad de acciones que tiene.

El total de acciones de una empres es: $\sum w(i)$, y cada acción es un voto.

Una coalición ganadora, que puede ser muy pequeña mientras tenga grandes

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Las luchas por el poder y otras batallas por el control de la empresa se concentran en obtener el 51% de las acciones, número mágico para obtener una coalición ganadora.

16.7.- **<u>Medidas de poder:</u>**

Necesitamos incluir otro concepto para resolver juegos sencillos, el valor Shapley, que se basa en la idea de que el poder consiste en la capacidad de un jugador para convertir una coalición no ganadora en otra ganadora.

Producto marginal del ji en la condición S, PM(i, S):

$$PM(i,S) = v(S \text{ y } i) - v(S)$$

En un juego sencillo, el producto marginal de un jugador solo puede tomar dos valores, 0 o 1.

Suponiendo que la coalición S es ganadora antes de que ji se una a ella, por monotonicidad, $\{S,i\}$, todavía es ganadora, por lo que el producto marginal de ji es

$$PM(i,S) = 1 - 1 = 0$$

Suponiendo que S no sea coalición ganadora antes de que ji se una, y que continúa sin serlo cuando se une, tenemos:

$$PM(i,S) = 0 - 0 = 0$$

En ambos casos el producto marginal del ji en la coalición S es 0→ este jugador no aporta nada.

Solo el producto marginal de un jugador es positivo cuando la coalición S no es ganadora antes de que ji se una a ella y sí sea ganadora después:

$$PM(i,S) = 1 - 0 = 1$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Jugador ficticio: el que bajo ninguna circunstancia será nunca decisivo, nadie necesitará su voto.

Dictador: el que siempre y en cualquier circunstancia es totalmente poderoso.

Para calcular la probabilidad de que un jugador sea decisivo, se necesita un mecanismo generador de probabilidades; nosotros adoptaremos la del velo de la ignorancias:

Supongamos que a los jugadores aún no se les han asignado sus identidades en el juego→ solo saben que tienen igual posibilidad de interpretar un papel, de cada una de las posiciones, y que estos se reparten aleatoriamente.

El valor de Shapley identifica el papel de un jugador con su posición en la ordenación aleatoria de todos los jugadores→ si hay dos jugadores, entonces hay 2!=(2)(1)=2 ordenaciones aleatorias posibles:

1, 2	(el jugador 1 es el primero)
2, 1	(el jugador 2 es el primero)

Cada una de estas ordenaciones ocurre con probabilidad de ½ cuando el velo de la ignorancia se levanta.

El valor de Shapley del jugador i, Shap(i), es el valor esperado del producto marginal de ese jugador en una ordenación aleatoria de todos los jugadores:

$$\begin{aligned}\text{Shap}(i) &= VE\ PM(i, S)\\ &= (\text{probabilidad de ser decisivo})\ (1)\\ &+ (\text{probabilidad de no ser decisivo})\ (0)\\ &= \text{probabilidad de ser decisivo}\end{aligned}$$

El producto marginal de un jugador es igual a 0 o 1, por lo que su valor esperado de es positivo solo si el jugador es decisivo (su producto marginal es 1)→el valor de Shapley de un jugador es la probabilidad con la que él es decisivo.

Con la figura 16.7 hacemos los cálculos para tres jugadores: 3! = 6 posibles ordenaciones aleatorias de los jugadores: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Cada una de estas ordenaciones tienen la misma probabilidad: 1/6

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

marginal de j3 en esta ordenación aleatoria es 0, ya que la coalición $\{1,2\}$ es ganadora y por tanto también lo es la $\{1,2,3\}$…

Orden aleatorio	$PM(1,S)$	$PM(2,S)$	$PM(3,S)$
1 2 3	0	1	0
1 3 2	0	0	1
2 1 3	1	0	0
2 3 1	0	0	1
3 1 2	1	0	0
3 2 1	0	1	0
Shap(i)	2/6 $i = 1$	2/6 $i = 2$	2/6 $i = 3$

Figura 16.7. Por mayoría, valor de Shapley, n = 3.

Como cada ordenación aleatoria tiene la misma probabilidad, cada uno de los productos marginales de los jugadores se multiplica por 1/6, resultando el valor de Shapley.

Para j1:

$$\text{Shap}(1) = \left(\frac{1}{6}\right)(0+0+1+0+1+0) = \frac{2}{6}$$

Al ser tres jugadores, todos tienen igual poder, 1/3.

Cuando todos los jugadores tienen el mismo impacto sobre la votación, el valor de Shapley establece que el poder esté repartido equitativamente; cuando tienen impactos diferentes, el valor de Shapley también lo recoge.

Un caso extremo: tres jugadores y donde cualquier coalición que incluya al j1 es ganadora y solo si lo incluye, entonces:

El j1 siempre es decisivo y obtiene un valor de Shapley de 1→j1 es un dictador.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Orden aleatorio	$PM(1,S)$	$PM(2,S)$	$PM(3,S)$
1 2 3	1	0	0
1 3 2	1	0	0
2 1 3	1	0	0
2 3 1	1	0	0
3 1 2	1	0	0
3 2 1	1	0	0
Shap(i)	6/6 $i = 1$	0/6 $i = 2$	0/6 $i = 3$

Figura 16.8. Dictadura, valor de Shapley, n = 3.

A veces un jugador puede ser ficticio en un juego de votación aunque aparente tener influencia.

Si en el ejemplo, j1 tiene el 51% de las acciones con voto de la empres, j2 el 25% y j3 el 24% →j1 puede ganar cualquier votación por sí mismo →toma de control por 51% contra 49% [Shap(1)=100%]

El jugador i tiene poder de veto que no puede ser anulado si alguna coalición puede ganar, a no ser que el jugador i sea miembro de ella→jugador con poder de veto.

Hay posibles coaliciones de tres jugadores. Una coalición de uno no es suficiente, una de dos sí, una de tres no es necesario.

Mire por ejemplo 312. El orden importa.

Mire la contribución del jugador 1 (primera columna). El jugador 1 entra en segundo lugar en la coalición, haciendo que esta pase de no servir para nada (coaliciones de uno no bastan) a servir (coalición de dos). Por tanto, en la columna del jugador 1 aparece una contribución marginal positiva.

Mire la contribución marginal del jugador 2 (segunda columna). Es cero. Lo es porque el jugador 2 entra en último lugar, y no añade

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Estuve viendo el video de presentación de juegos cooperativos y tengo alguna duda sobre el ejemplo de coaliciones de partidos políticos.

Mayoría absoluta serían 14 escaños.

Suficientes para gobernar:

(ABCDE), **(ABCD), (ABCE)**. **A(BDE)**, **A(CDE)**, BC(DE), **A(BC)**, AB(D), AC(D), BCD, AB(E), AC(E), BCE, ADE, AB, AC

Las que están en negrita no las entiendo. Entre paréntesis están las precindibles. A(BC) por ejemplo si hay una coalición entre A, B y C y B y C son prescindibles, en ningún momento A tiene la mayoría absoluta para gobernar.

En la coalición **(ABCDE)** cualquiera de ellos es prescindible, *considerado por separado*. Por ejemplo, si sale A, los demás (BCDE) tienen suficiente.

En la coalición **A(CDE)** tenemos que C, D y E son prescindibles, *considerados por separado*. Si Sale C nos queda ADE, que es suficiente; si sale D nos queda ACE, que es suficiente; si sale E nos queda ACD, que es suficiente. Pero si sale A lo que queda no es suficiente: CDE no lo es.

En la coalición **A(BC)** tanto B como C pueden salir y AB o AC son suficientes. Pero A es esencial, pues BC no basta.

Etc.

Veremos otra forma de describir las coaliciones en las PEC.

16.8.- <u>Ampliación del Consejo de seguridad de las Naciones Unidas:</u>

Las Naciones Unidas se fundaron en 1945 por los países victoriosos de la 2ªGM para asegurar la seguridad mundial. Para ello crearon un Consejo de Seguridad para autorizar el uso de la fuerza por parte de miembros en caso de amenazas a la paz mundial. Cinco grandes (USA, Rusia, Francia, Reino Unido y RPChina) tienen lugar permanente en el consejo y otros diez miembros lo tienen de forma rotativa.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

En 1993 EEUU propuso ampliar el Consejo incorporando a las segunda y tercera economías mundiales, Japón y Alemania, pero RUnido y Francia se opusieron→el valor de Shapley nos ayudará a explicar la oposición:

15 jugadores→ 15!=15*14*13…*3*2*1= más de 1,3 billones de ordenaciones aleatorias.

Dividimos el Consejo de Seguridad por cinco (1 pais, 1, con poder de veto, y dos países, 2 y 3, sin poder de veto)→con tres países solo nos preocuparemos de 3!=3*2*1=6 ordenaciones:

Orden aleatorio	$PM(1,S)$	$PM(2,S)$	$PM(3,S)$
1 2 3	0	1	0
1 3 2	0	0	1
2 1 3	1	0	0
2 3 1	1	0	0
3 1 2	1	0	0
3 2 1	1	0	0
Shap(i)	4/6 $i = 1$	1/6 $i = 2$	1/6 $i = 3$

Figura 16.9. Consejo de Seguridad, valor de Shapley, n = 3.

El único caso en que un país sin veto es decisivo es cuando está en segundo lugar, precedido en la ordenación aleatoria por el país con veto porque si el país con veto aún no está presente en la ordenación aleatoria, al añadir un país sin veto, no se hace ganadora la coalición→ en la 123, el país 2 es decisivo y en la 132, es decisivo el país 3.

Si todos los países con veto ya están presentes en la ordenación aleatoria, añadir un país sin veto es decisivo solo si a la coalición le falta un miembro para la mayoría→ por ello el país sin veto debe ser el segundo para ser decisivo.

Todos los países sin veto tienen el mismo valor de Shapley, 1/6, pues cada país es un sustituto perfecto de los otros→siempre que el país 2 sea decisivo, también lo será el 3 y viceversa.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

La función C(n, m)(escoger n objetos entre m disponibles) es esencial→el valor de C(n, m) es:

$$C(n,m) = \frac{n!}{[m!(n-m)!]}$$

Hay dos países disponibles para la primera posición en la ordenación aleatoria, uno con veto y otro sin él. La probabilidad de escoger uno con poder de veto es de ½.

Utilizando combinaciones obtendremos esta probabilidad:

$C(1,1) =$ número de maneras de escoger un país con veto de un conjunto que contiene un país con veto

$C(1,0) =$ número de maneras de escoger 0 países sin veto de un conjunto que contiene un país sin veto

$C(2,1) =$ número de maneras de escoger un país de un conjunto que contiene dos países

luego, la probabilidad de escoger un país con veto de un conjunto que contiene dos países es:

$$\frac{[C(1,1)][C(1,0)]}{C(2,1)} = \frac{(1)(1)}{(2)} = \frac{1}{2}$$

Este método es el que se utiliza para Consejos de Seguridad mayores.

La probabilidad de que el país 2 esté en segundo lugar es 1/3.

Multiplicando ambas, obtenemos Shap (2) = 1/3*(1/2) = 1/6

y aplicando la condición de simetría, Shap (2) = Shap (3) =1/6

Como Shap (1) = 1- Shap (2) - Shap (3) = 4/6

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Además, los cinco países con veto han de estar ya en esta ordenación aleatoria para que el país sin veto sea decisivo→ la probabilidad de que un país sin veto esté precedido por los cinco países con veto y tres países sin veto, viene dada por:

$$\frac{[C(5,5)][C(9,3)]}{C(14,8)} = \frac{1}{33}$$

Multiplicando estas dos probabilidades obtenemos el valor de Shapley de un país sin veto:

$$\text{Shap(país sin veto)} = \left(\frac{1}{15}\right)\left(\frac{1}{33}\right) = \frac{1}{495}$$

que es un 0,2% →un número muy pequeño→un país sin veto tiene un poder mínimo en el Consejo de Seguridad. Incluso 10 países sin veto, unidos, solo tendrían un 2% del poder (0,2*10=2), lo que deja el 98% del poder para ser repartido equitativamente entre los cinco con poder de veto (98%/5=19,6% del poder total tiene cada uno).

En la actualidad 178 países forman parte del Consejo de Seguridad, todos con las mismas oportunidades de obtener una de las 15-5=10 plazas no ocupadas por países con veto→ su probabilidad de estar en el Consejo de Seguridad es de 10/178=5,6%.

Si dos países ocupan plaza permanente en el Consejo de Seguridad, aunque sea sin veto, Japón y Alemania, quedarían menos posibilidades, 8/176=4,7%.

En cualquier caso, los grandes perdedores son los países del tercer mundo.

Si Japón y Alemania se convirtieran en miembros permanentes, pero con veto, y el Consejo de Seguridad se ampliara a 17 miembros, habría mayor impacto sobre el poder de países con veto, pero negativamente también influiría en los sin veto.

Considerando un Consejo de Seguridad con 7 países con veto y 10 sin veto. Bajo la regla de una mayoría de 3/5, harían falta 11 países, incluyendo los 7 con veto, para

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$\frac{[(C(7,7)][C(9,3)]}{C(16,10)} = \frac{3}{286}$$

Multiplicando estas dos probabilidades obtenemos:

$$\text{Shap(país sin veto)} = \left(\frac{1}{17}\right)\left(\frac{3}{286}\right) = \frac{3}{4.862}$$

que es un 0,06% →cada país aún pierde un tercio de su poder.

Todos los países sin veto tendrán un 0,6% del poder y los 7 países con veto se repartirían 99,4%/7=14,2% para cada uno del poder total. Esto para Francia y RUnido significa perder un 20%.

Para cambiar el Consejo de Seguridad hace falta la aprobación 2/3 de los 183 Estados miembros→122 deberán dar su aprobación, pero previo deben tener la aprobación de sus parlamentos, y además, ninguno de los países con derecho a veto podrá vetar la propuesta. Por tanto pasará una década, al menos, hasta que Japón y Alemania estén en el Consejo de Seguridad.

Resumen

1. Votar es un elemento importante del mundo de los negocios y la vida económica. Luchas por el poder, votos para destituir a un director ejecutivo y maniobras para influir en la política económica son ejemplos de ello.
2. El teorema del votante mediano proporciona condiciones bajo las cuales, en una elección con dos candidatos, los candidatos apelarán al votante situado en el centro de la distribución de puntos favoritos de los votantes. Cuando la distribución de puntos favoritos de los votantes es simétrica, los candidatos se sitúan en el centro del espectro político.
3. Cuando hay más de tres candidatos, el teorema del votante mediano deja de ser válido. Muchas reglas de votación intentan extender la regla de la mayoría a este caso, como la regla de la pluralidad y la regla de Condorcet.
4. La regla de la pluralidad tiene varios defectos, entre ellos permitir elegir un candidato minoritario. Este resultado se ha dado varias veces en las elecciones

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

6. En una elección con múltiples candidatos, si una regla de votación es eficiente, decisiva, sincera y neutral, entonces debe ser dictatorial. A la inversa, una dictadura es eficiente, decisiva, sincera y neutral, pero no muy atractiva dada su masiva concentración de poder.
7. Las reglas de votación posicionales se utilizan en muchas elecciones deportivas, por ejemplo, para elegir el campeón nacional universitario de fútbol americano. El voto estratégico está muy extendido en estas reglas de votación.
8. La función de coalición en un juego de votación se centra en si una coalición es ganadora o no. Una coalición ganadora puede tomar el control del proceso de votación para conseguir sus objetivos.
9. Un votante es decisivo cuando al añadir este votante a una coalición ésta se convierte en ganadora. El valor de Shapley de un jugador en un juego de votación es la probabilidad de que el jugador sea decisivo. El valor de Shapley proporciona una medida del poder de voto.
10. La propuesta estadounidense de incluir a Alemania y a Japón como miembros permanentes con poder de veto del Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas disminuiría el valor de Shapley de cada uno de los actuales miembros del Consejo de Seguridad en un 20%, más o menos.

Conceptos clave

espectro de temas
teorema del votante mediano
distribución de puntos
  favoritos de los votantes
regla de la pluralidad
voto estratégico
decisividad
sinceridad
neutralidad
elecciones con múltiples candidatos
reglas de votación posicionales
regla de Borda
juego sencillo
coalición ganadora
valor de Shapley
producto marginal
decisivo
ficticio
dictador
jugador con poder de veto
Consejo de Seguridad
  de las Naciones Unidas

Problemas

1. En un espectro de temas discreto, hay 2,5 millones de votantes en la Izquierda, 1 millón de votantes en el Centro y 0,5 millones de votantes en la Derecha. Escriba la forma normal de la elección de 2 candidatos y halle la solución.

Hay que reemplazar los datos de la Figura 16.2 de la página 496 con los siguientes:

Candidato 2 / Candidato 1	I	C	~~D~~
I	(2, 2)	(2,5, 1,5)	~~(3, 1)~~

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

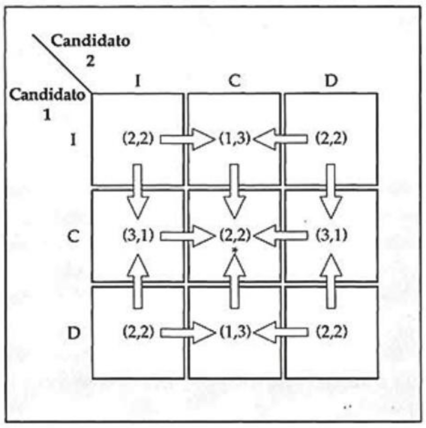


Figura 16.2. Juego de votación, espectro de temas discreto, distribución simétrica; totales de votos en millones.

2. Supongamos que la distribución de puntos favoritos de los votantes es triangular y simétrica, como en la figura 16.10. Compruebe el teorema del votante mediano en este caso. Un gráfico de la utilidad del candidato, como el de la figura 16.6, puede resultar útil.

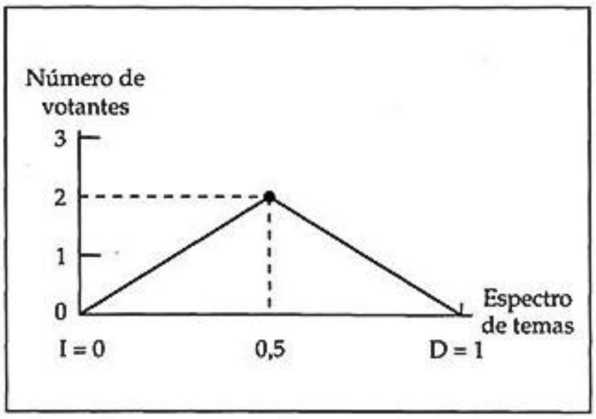


Figura 16.10. Distribución triangular de puntos favoritos de los votantes.

El votante mediano está localizado justo en la mitad del espectro de opciones políticas. Si este se representa en un segmento que va de 0 a 1, en la posición 0,5. Vamos a mostrar que es en ese punto donde los candidatos se localizarán en el equilibrio.

Primero vamos a mostrar que si el candidato 1 no está en $s_1 = 0,5$, será vencido. Imaginemos un s_1 no igual a 0,5, y un $s_2 = 0,5$. Hay dos casos que considerar, dependiendo de si s_1 es menor o mayor que 0,5. Si es menor, el candidato 1 consigue todos los votos situados entre 0 y el punto medio del segmento que une s_1 y el punto medio 0,5, que está

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Segundo, el candidato 1 no puede ser vencido si se coloca justo en el centro político, donde s_1 = 0,5. El mismo razonamiento se aplica al candidato 2. La consecuencia es que ambos, sabiéndolo, se situarán en el centro, por lo que el vector s = (0,5, 0,5) es la solución.

Vamos a analizarlo de otra forma.

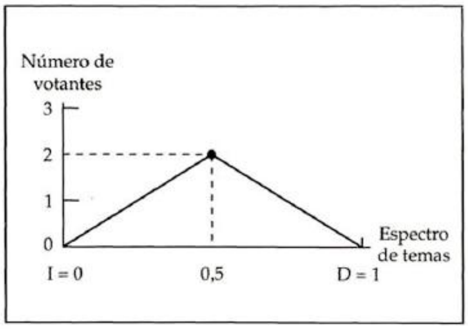


Figura 16.10. Distribución triangular de puntos favoritos de los votantes.

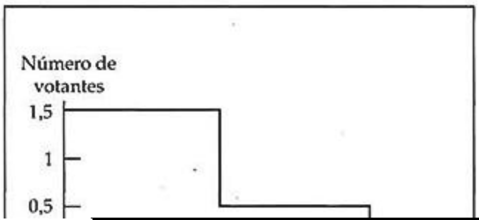
Si la distribución de votantes en el espectro de opciones políticas es simétrica, como en este caso, la media y la mediana coinciden. Una forma diferente de presentar el gráfico es mediante una tabla.

Temas	0,25	0,5	0,75
Votantes	1	2	1

La media es (0,25*1 + 0,5*2 + 0,75*1)/4 = 0,5. El cálculo de la mediana es más complicado. El número de votantes es par, por lo que la mediana será la media aritmética de los dos valores centrales. Dividimos el número de votantes entre dos: 4/2 = 2. Los valores centrales serán los del segundo y tercer votante. El segundo y tercer votante tienen valores 0,5, así que la media de esos dos valores será 0,5.

Gráficamente, la mediana es una recta vertical que corta y divide el área del triángulo en dos partes iguales. Es fácil comprobar que esto lo hace un valor de 0,5.

3. Supongamos que la distribución de puntos favoritos de los votantes es asimétrica, como en la figura 16.11. Halle el votante mediano. Compruebe el teorema del



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

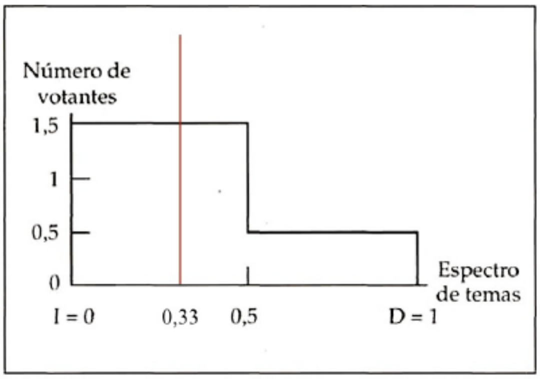


Figura 16.11. Distribución asimétrica de puntos favoritos de los votantes.

Miremos el gráfico que presenta el libro. La mediana es una línea vertical localizada en un punto y que corta la superficie encerrada dentro del polígono en dos, de forma que las dos partes tienen el mismo área. Es la recta roja que hemos trazado. El área en el rectángulo de la izquierda es 1,5*0,33 = 0,5. El área del rectángulo alto a la derecha de 0,33 es (0,5-0,33)*1,5 = 0,255; y hay que sumar el área del rectángulo bajo, más allá a la derecha, que es 0,5*0,5 = 0,25. Ambas suman aproximadamente 0,5. Por tanto, la línea roja divide el área total (que es 1) en dos partes iguales.

Si el votante mediano está en 0,33 (que es 1/3), los mismos razonamientos del problema anterior nos llevan a la solución s = (1/3, 1/3).

4. En un espectro de temas discreto, la mitad de los votantes están en la Izquierda y la mitad en la Derecha. Halle un equilibrio en el que los candidatos adoptan posiciones diferentes. ¿Merece este tipo de situación el nombre de polarizada?

Imaginemos que hay 4 millones de votantes. Reemplacemos los datos de la Figura 16.2 de la página 496 con los siguientes:

Candidato 2 / Candidato 1	I	C	D
I	(2,2)	(2,2)	(2,2)
C	(2,2)	(2,2)	(2,2)
D	(2,2)	(2,2)	(2,2)

Cualquier par de estrategias, en particular un par como s = (Izquierda, Derecha) es un equilibrio. En ese mismo que hemos puesto de ejemplo los candidatos se van a extremos opuestos del espectro político. Eso es la polarización.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

6. Supongamos que hay tres candidatos para jugador más valioso y que se utiliza la regla de Borda. Demuestre que una coalición con más de 4/7 de los votantes puede conseguir el resultado que desee.

Llamemos a los tres candidatos s_1, s_2 y s_3. Supongamos que la coalición S tiene más de 4/7 partes de todos los votantes, y S quiere conseguir que s_1 sea elegido. Si m es el tamaño de S y todos los miembros de S ponen a s_1 el primero en sus preferencias s_1 obtiene un número de puntos 3m. La mitad de los miembros de S ponen a s_3 el último, y la otra mitad pone a s_2 el último. Por tanto, s_2 y s_3 obtienen 1,5m puntos cada uno, justo la mitad de los que sacará s_1.

Lo peor que puede ocurrir a s_1 es que el resto de los votantes (1 – m), no incluidos en S, coloquen a s_1 el último en sus listas, y a otro de los candidatos, como por ejemplo s_2, el primero. Aún así, s_1 obtendrá (1-m) puntos adicionales, sumando un total de 3m +(1-m) = 2m + 1. El candidato 2 obtendrá un total de 1,5m + 3(1-m) = 3 – 1,5m.

Para que gane s_1 debe cumplirse que 2m + 1 > 3 – 1,5m, y eso implica 3,5m > 2, m > 4/7. Dado que S tiene más de 4/7 de todos los votantes, la condición se cumple y el candidato 1 gana.

7. ¿Cuál de las siguientes condiciones satisface la regla de Borda: eficiencia, decisividad, sinceridad o neutralidad? ¿Cuál no la satisface?

La regla de Borda permite cumplir con los requisitos de *neutralidad* y *eficiencia*. Pero no ocurre lo mismo con el requisito de *sinceridad*. También fracasa en la exigencia de asegurar que se cumple el de *decisividad*. Por ejemplo, supongamos que existen dos tipos de votantes como estos: *tipo 1*, $s_1 > s_2 > s_3$; *tipo 2*, $s_3 > s_2 > s_1$. Con un votante de cada tipo. Cada candidato obtendrá 4 puntos, resultando en un empate a tres.

8. Demuestre que las condiciones que impone la Constitución de Estados Unidos para la aprobación de un proyecto como ley satisfacen la no nulidad, monotonicidad y exclusividad. ¿Qué pasaría si la Constitución no cumpliera estas condiciones?

Para poder aprobar una ley se requiere una coalición S de uno de los dos siguientes tipos: S = (Presidente, mayoría del Senado, mayoría del Congreso); o bien S = (2/3 del Senado, 2/3 del Congreso). Esto satisface la propiedad de *no nulidad*, ya que el conjunto (Presidente, todo el Senado, todo el Congreso) es suficiente para aprobar cualquier ley. Se satisface también el requerimiento de *exclusividad*, ya que, en cualquier caso, el resto de los jugadores N – S no puede aprobar una ley. También se cumple *monotonicidad*, pues si S

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

9. **Considere el mini consejo de seguridad siguiente. Hay cuatro miembros, uno de los cuales tiene poder de veto. Calcule el valor de Shapley. Describa el impacto sobre el poder de los países cuando se añade un país sin poder de veto.**

Imaginemos que el *país 1* tiene poder de veto, y otros 3 países no (*país 2*, *país 3* y *país 4*). Vamos a computar el valor de Shapley de un país sin poder de veto, imaginemos que es el *país 4*. Aprueban cualquier decisión por mayoría, salvo que el país con poder de veto lo impida. Son cuatro países y la mayoría requiere tres países alineados. Por tanto hemos de calcular el valor de Shapley del tercer país en entrar en un orden aleatorio de tres países, y en las dos primeras posiciones ya debe estar el país con capacidad de veto. Usando el cálculo combinatorio (la fórmula de la página 519) calculamos la probabilidad de que ocurra lo descrito: tres países y el tercero no tiene capacidad de veto y resulta decisivo:

$$C(1,1)C(2,1)/C(3,2) = 2/3$$

C(1,1) es el número de posibilidades de que tomemos al azar un país y resulte el país con capacidad de veto (1 de 1); C(2, 1) es el número de posibilidades de que tomemos al azar otro país y resulte uno de los dos sin veto distinto de aquel para el que estamos calculando el valor de Shapley (por tanto, el *país 2* o el *país 3*); y C(3,2) es el número de posibilidades de tomar dos países –los que sean- de un total de tres (excluimos siempre el nuestro, el *país 4*). Resulta por tanto que la probabilidad de sacar aleatoriamente dos países de cuatro y que tengamos al *país 1* y al *país 2* o al *país 3*, es 2/3. Además, la probabilidad de sacar aleatoriamente un país de cuatro y que sea nuestro *país 4* es es 1/4.

El valor de Shapley para el país 4 será:

$$Shapley(4) = (2/3)(1/4) = 1/6.$$

Los países 2 y 3 tienen el mismo valor de Shapley, claro está. El país 1, con poder de veto, tiene el resto del poder, hasta el total, es decir:

$$Shapley(1) = 1 - 3(1/6) = 1/2$$

La mitad del poder es para el país con poder de veto en este Consejo de Seguridad de 4 países.

Ahora entra un nuevo país en dicho Consejo, el *país 5*. Todavía es necesario que tres países voten juntos, dado que el requisito sigue siendo la mayoría. El *país 1* tiene que estar dentro de esa mayoría, o presentaría el veto. Vamos a computar de nuevo el poder de un país sin veto que resulta decisivo. Imaginemos que es el *país 5*. Tiene que ser seleccionado aleatoriamente en tercer lugar habiendo salido antes de él el *país 1*. Usando la combinatoria:

$$C(1,1)C(3,1)/C(4,2) = 3/6$$

C(1,1) es el número de posibilidades de que tomemos al azar un país y resulte el país con capacidad de veto (1 de 1); C(3, 1) es el número de posibilidades de que tomemos al azar

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

El valor de Shapley de los países 2, 3 y 4 será exactamente el mismo. El *país 1* se queda con el resto del poder. Por tanto:

$$\text{Shapley}(1) = 1 - 4(1/10) = 3/5$$

Curiosamente, al añadir otro país sin capacidad de veto el poder del país con veto *aumenta*.

10. Es difícil explicar por qué Estados Unidos está presionando para conseguir que Japón entre en el Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas a la vista del efecto que este cambio tendría sobre el poder de los actuales miembros. Intente explicar esta acción a la luz de las negociaciones comerciales entre Estados Unidos y Japón (véase el capítulo 12). ¿Podría esto formar parte de una negociación más amplia entre las dos economías más desarrolladas del mundo?

Hay varias posibles explicaciones. Una de ellas está relacionada con las relaciones entre Rusia y Japón. Si Japón quiere unirse al club de países con armamento nuclear, una forma rápida de conseguirlo es adquirir la necesaria tecnología, o directamente las armas, de Rusia.

A cambio, Japón podría aceptar unirse a Rusia en temas de interés para esta, como Iraq, Irán y Corea del Norte, si bien son puntos calientes para la política exterior y de defensa norteamericana.

Además, la pérdida de poder en el Consejo de Seguridad derivada de la entrada de un nuevo miembro permanente reduce el poder de la única superpotencia actual, que es Estados Unidos. Esto podría interesar a otros miembros permanentes del Consejo de Seguridad, no sólo a Rusia.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.