Tema 2. Juegos de dos jugadores

Juegos de dos jugadores (c. 2)

1. Los juegos de dos jugadores se pueden representar fácilmente en *forma normal* (véase el capítulo 1). Los hay de dos grandes tipos: de *suma constante* y de *suma variable*. Los de suma constante tienen en cada casilla de la matriz dos valores separados por una coma que, sumados, dan siempre el mismo valor total (véase la Figura 2.1). Estos juegos se pueden convertir en juegos *de suma cero* (véase la Figura 2.2), que son aquellos en los que los valores de cada casilla suman cero. Los juegos de suma cero son un tipo de juego de suma constante. Los juegos de suma variable son el resto.

2. Cuando estamos ante un juego en forma normal lo primero es buscar en él un ***equilibrio de Nash***, o equilibrio a secas. El libro presenta una técnica basada en el trazado de flechas. Las verticales son para el jugador 1 (fila), y se fijan en los valores a la izquierda de la coma en cada columna: apuntan hacia el mayor de los dos. Las horizontales son para el jugador 2 (columna), y se fijan en los valores a la derecha de la coma en cada fila: apuntan hacia el mayor de los dos. Cuando las cabezas de dos flechas, una horizontal y otra vertical, apuntan hacia una misma casilla, ahí tenemos un equilibrio. Véase el epígrafe 2.2, llamado *Ventaja competitiva*.

3. La propiedad esencial de un equilibrio es la estabilidad. Una situación es estable cuando no hay fuerzas o incentivos que la cambien. Una situación como la descrita por el equilibrio de la Figura 2.1 (serie/deportes, casilla con un asterisco) es estable porque si uno de los jugadores pudiera cambiar su decisión y lo hiciera iría a una situación peor. El equilibrio es una situación que deja satisfecho a cada jugador con la decisión que ha tomado, a la vista de lo que ha hecho su oponente. En un jugador puede no haber uno de estos equilibrios, o uno o más de uno. Cuando solo hay un equilibrio de Nash se dice que éste es la solución del juego.

4. El epígrafe 2.3, llamado *Póquer de una carta*, sirve para mostrar cómo la forma normal de un juego facilita buscar equilibrios en él, pues a veces permite reducir juegos muy complejos a una forma mucho más sencilla (compárense las Figuras 2.4 y la 2.5). Pero lo más importante de ese epígrafe es que introduce un concepto importante: la **estrategia dominante**. Ésta es una elección para uno de los jugadores que le garantiza el mejor resultado posible, haga lo que haga el otro jugador. Por tanto, permite despreocuparse de lo que haga el otro. Las estrategias dominantes se detectan cuando las dos flechas verticales (jugador 1) o las dos horizontales (jugador 2) apuntan en la misma dirección (véase la Figura 2.5). La **estrategia dominada** es la acción alternativa a la correspondiente a una dominante, y garantiza el peor resultado de entre los posibles haga lo que haga el otro jugador[1]. Las **estrategias no dominadas** son aquellas que ofrecen un valor más alto y otro más bajo que otra estrategia, pero también son no dominadas las dominantes, es decir, las que ofrecen los dos valores más altos (o uno más alto y otro igual).

5. El epígrafe 2.4, llamado Soluciones a juegos de suma cero con dos jugadores, plantea un nuevo juego. Tiene de interés lo siguiente: presenta por primera vez un juego cuya forma normal es una matriz 3x3; y este juego ilustra un teorema de solución que puede ser práctico. El juego en una matriz de 3x3 incluye tres opciones para cada jugador, y se soluciona de forma similar a la matriz 2x2, solo que trazando flechas también en el centro. Nos situamos en la casilla central. Si hay valores a la izquierda de la coma más altos en la casilla superior o inferior a la central, trazamos flechas apuntando hacia arriba y hacia abajo. Si hay valores a la derecha de la coma más altos en la casilla derecha o izquierda a la central, trazamos flechas apuntando hacia la derecha y hacia la izquierda. Así ocurre en la Figura 2.7. El **teorema de solución** *para juegos de suma cero* dice que en este tipo de juegos (de suma cero) *todos los equilibrios de Nash* que encontremos (marcados con un asterisco) tendrán los mismos valores y *todos serán solución del juego*. Por tanto, *ser equilibrio de Nash es necesario y suficiente para ser solución en juegos de suma cero*. En el juego de este epígrafe todos tienen valores (0,0) y todos son solución del juego.

6. El epígrafe 2.5, llamado Juegos de suma variable con dos jugadores, trata los *juegos de suma variable*, que son aquellos en los que la suma de los valores de cada casilla puede ser distinta. Se detectan los equilibrios como siempre. Lo realmente importante es que se introducen nuevos conceptos que nos ayudarán a resolver juegos más complejos. *Sólo los equilibrios de Nash pueden ser solución de un juego, pero no siempre un equilibrio de Nash es una solución de un juego de suma variable*. Ser equilibrio de Nash es condición necesaria de solución para un resultado, pero no suficiente. En la Figura 2.6 (suma cero) hay dos equilibrios de Nash. ¿Cuál es la solución? Los dos. Pero en la Figura 2.9 (suma variable) hay otros dos equilibrios de Nash. ¿Cuál es la solución en este caso? No es tan sencillo.

7. El epígrafe 2.6 introduce un criterio adicional para detectar una solución en un juego en juegos de suma variable. Decimos adicional porque ya tenemos una: que sea un equilibrio de Nash. Pero eso no basta en los juegos de suma variable, hace falta otra más. Es **la condición suficiente de solución**: *la solución de un juego es el equilibrio de Nash al que apuntan dos estrategias no dominadas por otras*. El equilibrio de Nash era una situación que se comprobaba a posteriori, cuando los dos jugadores habían tomado su decisión (a la vez). Si hay una estrategia dominante, los jugadores la adoptarán y podremos predecir su comportamiento. En un juego puede no haber estrategias dominantes, puede haber una (para un jugador), o puede haber dos (una para cada uno). Cuando hay dos, *conducen necesariamente a un resultado que es un equilibrio de Nash y es la solución del juego*, aunque haya otros equilibrios de Nash (que no serán la solución). Pero la condición suficiente de la que hablamos aquí es menos exigente que esa. La solución estará en una casilla donde se cruzan dos estrategias *no dominadas* por otras estrategias. Por tanto, aunque no haya estrategias dominantes, podremos identificar una solución para el juego, que necesariamente tiene que ser un equilibrio de Nash. Un ejemplo con dos equilibrios de Nash, dos estrategias dominantes y una solución es la Figura 2.9. Un ejemplo con dos equilibrios de Nash, ninguna estrategia dominante, pero dos estrategias no dominadas que determinan dos soluciones es la Figura 2.10.

8. El epígrafe 2.7, Publicidad de cigarrillos en televisión, introduce una herramienta más *dilema de los prisioneros*, o el de la paradoja liberal de Amartya Sen que vimos en el video de presentación. En esos juegos la solución formal no es el mejor resultado posible que contiene el juego. Aunque el libro no lo dice, ese "mejor resultado de todos los posibles" es el *óptimo paretiano*, que puede no ser solución del juego. ¿Cómo es posible? Vamos a adelantar una respuesta rápida: los juegos suponen que los jugadores son racionales y egoístas, y que persiguen su propio beneficio a cualquier precio, y muchas veces los óptimos paretianos requieren cooperación.

9. El epígrafe 2.8, Juegos de dos jugadores con muchas estrategias, introduce un procedimiento para manejar juegos con tantas estrategias que necesitaríamos matrices enormes para manejarlos. Cuando el número de estrategias es infinitamente alto podemos usar el cálculo infinitesimal a partir de funciones continuas. Un ejemplo son los juegos de mercado que el libro trata en el tema 5, y que aparecen como ejemplos por todo el libro. El epígrafe 2.9 es una demostración formal que podemos saltarnos.

Las máquinas y los animales pueden ser **jugadores**.

Cuantos más jugadores, más complicado es el juego.

Juegos de **suma cero o** de **suma constante**: los **intereses de los jugadores** son totalmente **contrapuestos**.

J**uegos de suma variable**: **los intereses de los jugadores no** están totalmente **contrapuestos** (no todas las soluciones de estos juegos coinciden).

2.1.- Juegos de suma cero y juegos de suma constante

Supongamos que **en cada resultado posible del juego**, la **suma de las utilidades** de los jugadores 1 y 2 **es cero**:

$$u1 + u2 = 0 \rightarrow K=0$$

Juegos de suma cero (juego tipo Ajedrez, Póquer):

- Hay **tres resultados** posibles:
    - **1 gana**: vector de ganancias **(+1, -1)**, suma = 0.
    - **Empate**: vector de ganancias **(0, 0)** , suma = 0.
    - **2 gana**: vector de ganancias **(-1, +2)**, suma = 0.

- Son **un caso particular de juegos de suma constante**. Sea cual sea el resultado, **la suma de las utilidades es una constante k.**

  - **Si k=0** → juego de **suma cero**

  - **Si k=1** → juego típico de negocios → **las empresas compiten por cuotas de mercado cuya suma es 100%**

<u>**La batalla de las cadenas de TV:**</u>

- **Dos cadenas**, 1 y 2, **luchan por cuotas de audiencia** (<u>cuanto más altas sean, mayores ingresos por venta de publicidad</u>).
- Cada una puede **elegir entre emitir una serie o acontecimiento deportivo**.
- Sus **decisiones** se tomarán **de forma simultánea e independiente** de las otras.
- La **cadena 1** tiene **ventaja programando series**
- La **cadena 2** tiene **ventaja programando acontecimientos deportivos**.
- **Si ambas emiten series, la primera se queda con el** 55% de la audiencia.
- **Si** ambas emiten deportes, **la segunda se lleva el 55%** de la audiencia.
- En la **"<u>forma normal</u>"**, resolvemos el juego **mediante uso de flechas**: **la dirección de las flechas representa las preferencias de los jugadores.**

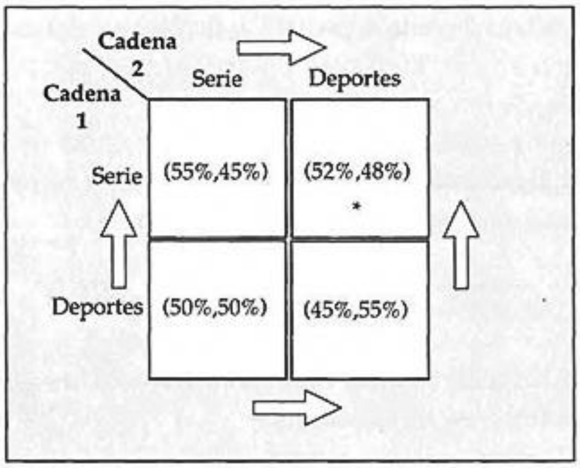


Figura 2.1. La batalla de las cadenas de televisión, forma normal.

- Existe una única situación tal que **las flechas apuntan hacia un "equilibrio" desde ambas direcciones→ (*)** donde la 1 emite series con el 52% de audiencia y la 2 emite deportes con un 48% de audiencia. **Esta es la Solución del juego.**
- En el **equilibrio (equilibrio de Nash),** sería un error por parte de cualquiera de las dos cadenas adoptar una estrategia diferente; **cada jugador elige la mejor opción dada la competencia**. Cada cadena obtiene su mejor cuota dado el competidor contra el que está luchando.

- **En un juego de suma constante**, sea cual sea el resultado, **la suma de las utilidades de los jugadores es una constante k**. A menudo **k = 1 (=100%)**. Si k=0 => juego de suma cero.

- Existe una **forma "sencilla" de relacionar juegos de suma constante y juegos de suma cero con dos jugadores:**

- **Sean u1 y u2 las ganancias en un juego de suma k**:

$$u1 + u2 = k$$

- Si estamos <u>con juego de suma cero debería de ser</u>:

$$u1 + u2 = 0.$$

- **Consideramos unas nuevas ganancias** de la forma:

$$v1 = u1 - u2$$

$$v2 = u2 - u1$$

- **Su suma también deberá ser cero:**

$$v1 + v2 = 0$$

- **Si sustituimos** la condición de suma constante, tendremos:

$$u1 + u2 = k$$

Estas funciones:

- Son **transformaciones lineales positivas de las utilidades**→ de acuerdo con el teorema de la utilidad esperada, **no influyen en las decisiones**.

- **Miden la utilidad en términos de la ventaja en cuotas de mercado.**

  - si **v1 es positiva**, la **cadena 1** tiene una **cuota de audiencia mayor que la cadena 2** → <u>v1 mide cuanto mayor es la ventaja de la cadena 1.</u>

  - si **v2 es positiva**, la **cadena 2 tiene una cuota de audiencia mayor que la cadena 1**→ <u>v2 medirá cuanto mayor es la ventaja de la 2.</u>

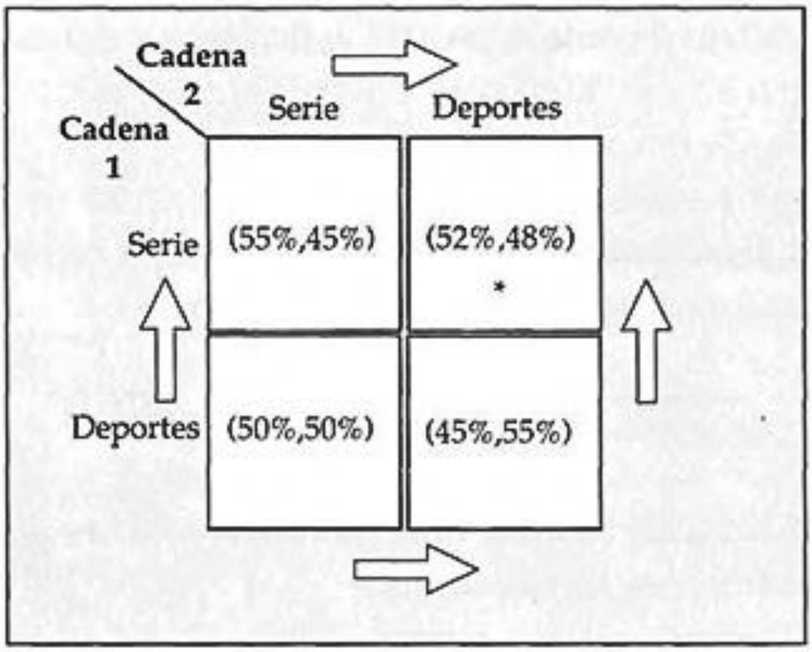


Figura 2.1. La batalla de las cadenas de televisión, forma normal.

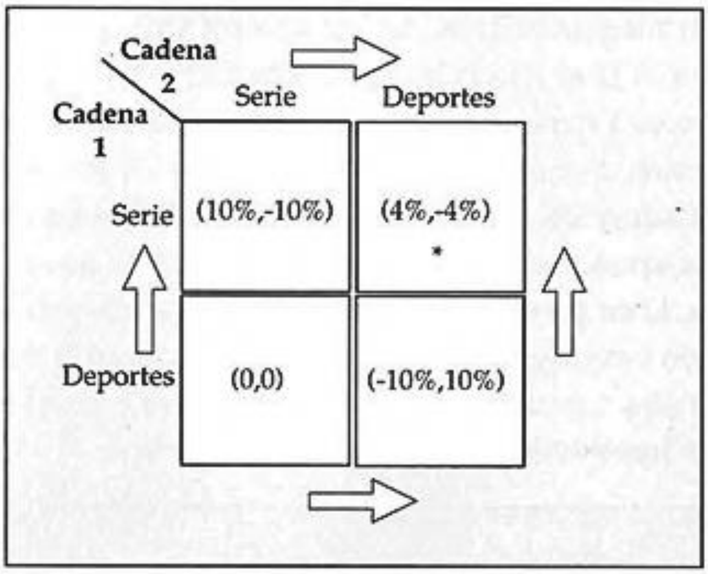


Figura 2.2. La batalla de las cadenas de televisión, versión de suma cero.

Para ver como se obtienen ganancias de **la figura 2.2 a partir de 2.1: calculamos la batalla de las cadenas como juego de suma cero** → Si consideramos que ambas cadenas emiten una serie:

- *La cadena 1 obtiene 55% de la audiencia y k=1 → aplicando la transformación:*

$$v1 = 2*0{,}50 - 1 = 0{,}1 \rightarrow 10\%$$

$$v2 = 2*0{,}45 - 1 = -0{,}1 \rightarrow -10\%$$

En este caso, la utilidad de cadena 1, en la casilla (serie, serie) demuestra que tiene una ventaja competitiva frente a cadena 2.

Ambas entradas suman cero : 10% + (-10%)= 0

Esto muestra que **el razonamiento estratégico no varía a causa de transformaciones lineales positivas de las utilidades de dos jugadores**.

Tanto razonando **en términos de cuota de audiencia total,** juego de suma 1, **como en términos de ventaja de audiencia,** juego de suma 0, **la solución es la misma→** la cadena 1 emite series y la 2 emite deportes → **la ganancia real será la misma en ambos casos:**

- **Mayor audiencia** significará **mayores ganancias por publicidad**

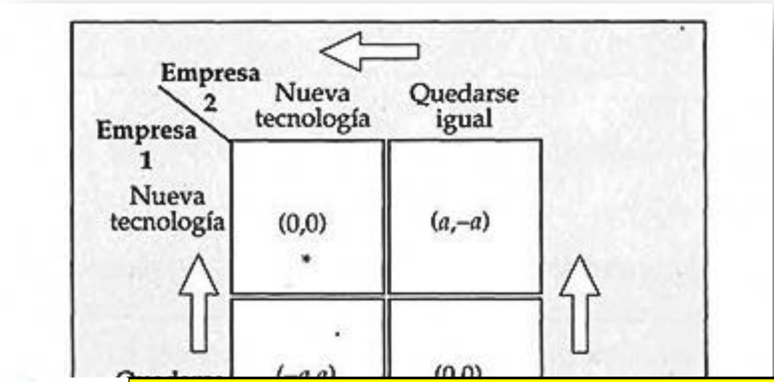
2.2.- Ventaja competitiva

Ventaja competitiva: cuando una **empresa adopta la nueva tecnología**, consigue una **ventaja sobre sus competidores**.

Si todas las empresas **adoptan** la nueva tecnología, **la ventaja desaparece.**

El juego en el que estas empresas se encuentran se llama Ventaja competitiva.

En la forma normal, **el parámetro de ganancias a mide la** magnitud de **ventaja competitiva** que concede la nueva tecnología:



- **Cada empresa** tiene **dos estrategias**: **quedarse igual o** adoptar la **nueva tecnología**.

- La **empresa 1** tiene **incentivo por** adoptar la **nueva tecnología**.

    - En caso de **que la 2 se quede tal cual**, la 1 obtendrá la ventaja competitiva "a" adoptando la nueva tecnología→ flecha derecha apunta hacia arriba.

    - Si **la 2 sí adoptase esa tecnología**, la empresa 1 eliminaría su ventaja competitiva "–a" adoptando la nueva tecnología→ flecha izda. hacia arriba.

    - Las fechas **superior e inferior apuntando a la izda**. reflejan **incentivos similares para la empresa 2.**

El equilibrio de la Ventaja competitiva, **las flechas apuntan hacia ella desde las dos direcciones**, se da cuando **cada empresa adopta la nueva tecnología**.

En situaciones de **equilibrio desaparece la ventaja competitiva**, **ninguna de las dos** empresas **tiene ventaja** sobre la otra, pero **ninguna puede permitirse de no innovar**.

Las empresas en este juego se ven **abocadas a adoptar cada nueva tecnología** que vaya apareciendo. **La fuerza subyacente** de esta necesidad **es la solución al juego** de Ventaja competitiva.

En la batalla de las cadenas de tv (de suma constante) y en Ventaja competitiva , **la estrategia es** todo **lo que importa** y **el azar no juega ningún papel**.

En un juego de suma cero, como el Póquer, la estrategia es importante pero también lo es el azar.

2.3.- Póquer de una carta

Es la **versión más simple** del póquer; también consideraremos **sólo dos jugadores** (podría ser jugado por varios jugadores con varias cartas).

Sean:

- **Dos jugadores**: 1 y 2

- Los jugadores tomarán la decisión de **forma simultánea** (en el real se hace de forma sucesiva, a modo de señalización)
- Concluida la fase de apuestas **se acaba el juego**:

  - **El bote** se lo lleva **el jugador que apuesta**.
  - Si los dos apostaron, se lo lleva el **que tenga la carta más alta**.
  - En **caso de empate**, se **reparte** el bote.

En el **Póquer de una carta <u>en forma extensiva</u>**:

- El juego **empieza con jugada de azar**, <u>el reparto</u>
- **Una mano es un par**: (carta jugador 1, carta jugador 2)

  → Hay cuatro manos posibles, cada una con probabilidad ¼:
  (A, A)
  (A, R)
  (R, A)
  (R, R)
- **Jugarán con las cartas repartidas** (en el normal se desprenden y cambian las no válidas)
- El **jugador 1 juega** a continuación **sin saber cuál es la mano → su info son cuatro nodos (**las cuatro posibles manos). Deberá **apostar o pasar**.
- El **jugador 2** es el **último en jugar**, sin saber su mano ni lo que ha hecho el jugador 1→ **su info son ocho nodos** (cuatro manos posibles * las dos jugadas posibles del jugador 1). Podrá **apostar o pasar**.
- Se **acaba el juego**.

- Existen en la forma extensiva 4 nodos con 2 posibilidades cada uno → **8 nodos intermedios**→ 8 nodos con 2 posibilidades cada uno →**16 nodos terminales** o finales.

  - **Si ambos apuestan y su mano es (A, A) o (R, R)**→se **repartirán el bote**, que **contiene 2*(a + b)** y **el resultado será (0, 0)**

    - *Si el jugador 1 apuesta y el 2 pasa, da igual las cartas que tuviera pues ha pasado, el jugador 1 se llevará la apuesta inicial del jugador 2 → el resultado será (a, -a)*

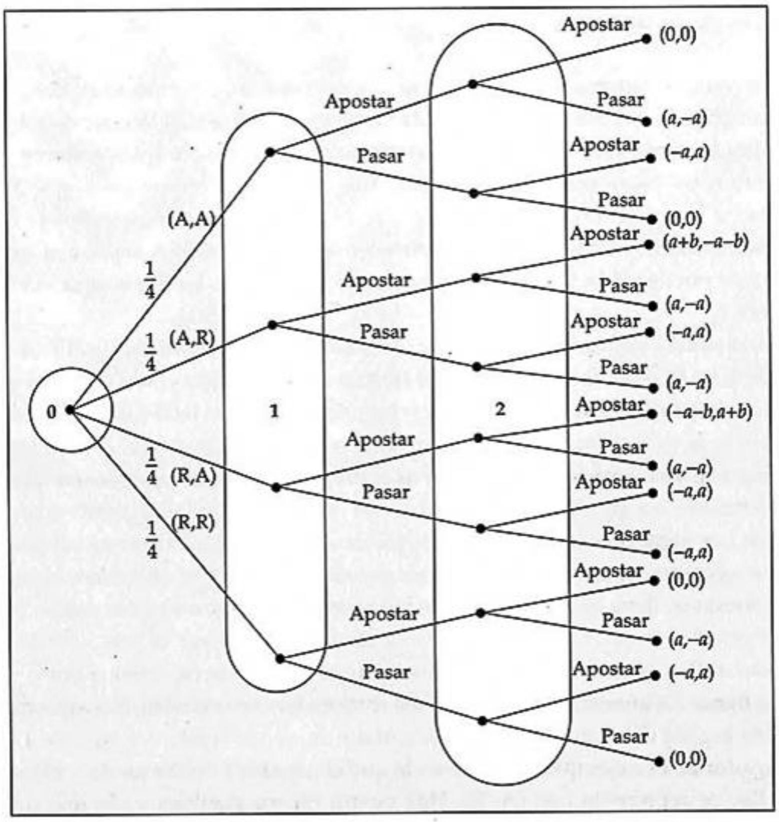
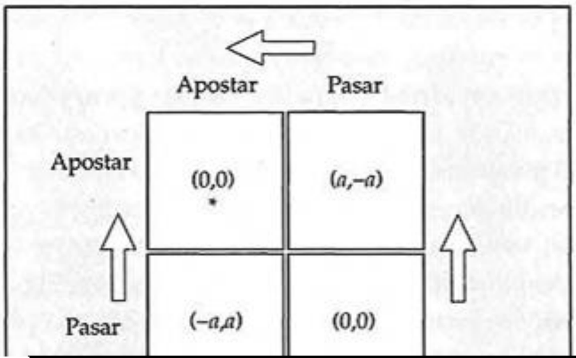


Figura 2.4. Póquer de una carta, forma extensiva.

La forma extensiva **es más complicada de ver**; pero su figura 2.4. **se puede reducir** a **forma normal**, mucho más sencilla:



- **Cada jugador** tiene **un único conjunto de información** en el que dispone de **dos posibles acciones: apostar o pasar →** el conjunto de estrategias de cada jugador es (apostar, pasar). Éstas son las filas y columnas de 2.5.

- Rellenamos las casillas:

  Para el Jugador 1.

  Estrategia **Apostar, Apostar**: las probabilidades de los puntos terminales del juego serán:

    Mano (A,A), P (**0**, 0) = ¼ = 0,25

    Mano (A,R), P (**a+b**, -a-b) = ¼= 0,25

    Mano (R,A), P (**-a-b**, a+b) = ¼= 0,25

    Mano (R,R), P (**0**, 0) = ¼= 0,25

    El resultado, tomando Valores Esperados**, para el jugador 1** en la estrategia (Apostar, Apostar), de la **forma normal,** será el **vector de ganancias** para cada casilla:

$$EV1= 0 * 0{,}25 + 0{,}25\ (a + b) + 0{,}25\ (-a - b) + 0{,}25 * 0 = 0$$

    Haríamos **igual para el jugador dos y para las demás casillas/estrategias (pasar, pasar).**

    Para el vector de estrategias (apostar, pasar), el jugador 1 gana y el 2 pierde, da igual sus cartas, y el vector de ganancias será (a, -a)

    Entonces **se obtiene** operando con **cada una de las estrategias** para cada uno de los jugadores la forma normal.

Siguiendo las flechas, **la solución al Póquer de una carga es que cada jugador apueste →** Con esta solución **ambos jugadores se quedan como al principio**.

to → reparto **desequilibrado** que **favorece a uno.**

Con reparto equilibrado, **si ambos adoptan igual estrategia**, **las cartas se reparten equitativamente y el resultado es el vector de ganancias (0, 0)**. Aunque (**pasar, pasar) no es una solución**, **si ambos usan esta estrategia, ambos consiguen ni ganar ni perder.**

Un perdedor no sigue los principios estratégicos que podrían mejorar su juego. Un **perdedor que no aprende de sus errores** se queda en eso, en **un perdedor**.

Las figuras 2.3 y 2.5 son iguales; **las estrategias son iguales**: El póquer de una carta y Ventaja competitiva tienen el **mismo contenido estratégico**→ apostar en el póquer da una ventaja sobre el jugador que pasa. **Si no se arriesga nada, no se gana nada**.

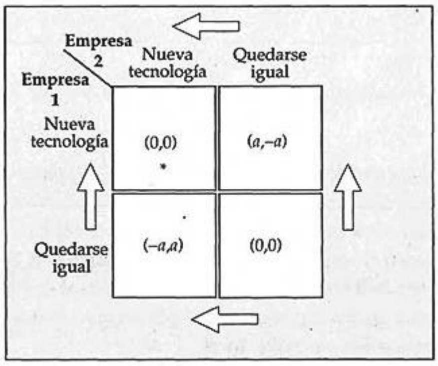


Figura 2.3. Ventaja competitiva.

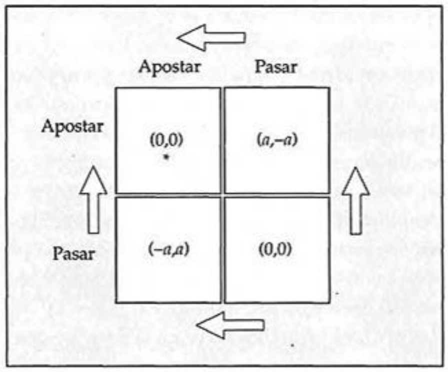


Figura 2.5. Póquer de una carta, forma normal.

=

Una **estrategia** es **estrictamente dominante si es mejor** que cualquier otra estrategia **ante cualquier contingencia**. Es aquella que **proporciona pagos estrictamente mayores que los de sus alternativas.**

Una **estrategia** es **dominante** si es **al menos tan buena como cualquier otra estrategia ante cualquier contingencia y mejor ante alguna contingencia**. Es aquella que **proporciona pagos mayores o iguales a los de sus alternativas** (unos mayores, otros iguales, pero ninguno menor).→Si tengo **estrategia dominante, no importa lo que haga mi adversario**; lo mejor para mí es jugar esta estrategia dominante.

En **Ventaja Competitiva**, la estrategia que adopta **la nueva tecnología domina**

gar una estrategia que está estrictamente dominada.

Ninguna estrategia dominada debe jugarse **como parte de un equilibrio→Las flechas apuntarían en una dirección que nos alejaría** de tal estrategia y **nos llevaría a una estrategia estrictamente dominante.**

En ventaja Competitiva y Póquer de una carta, el parámetro **a mide el precio que se paga por jugar una estrategia estrictamente dominada.**

Una **estrategia no dominada** es aquella para la que **no existe una alternativa que proporcione pagos siempre iguales o superiores.**

Si **una estrategia** está **dominada por otra estrategia** es que es **peor** que esa otra, y **podemos "tacharla"**.

Esto es importante porque se puede usar, en juegos "grandes", **para recudir la matriz original a otra más pequeña**. Esa reducción se hace **eliminando las filas y columnas que corresponden a las estrategias dominadas.**

Si tenemos **dos estrategias, A y B, y una proporciona pagos mayores que la otra para una respuesta del oponente**, y **pagos menores para otra respuesta del oponente**, entonces **ni A ni B son dominantes o dominadas, y no se pueden "tachar".**

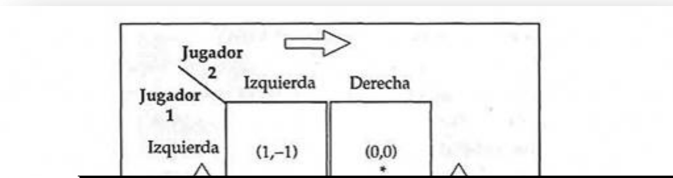
2.4.- Soluciones a juegos de suma cero con dos jugadores

Los **juegos con dos jugadores** fueron los **primeros en resolverse**.

Si un juego tiene un único equilibrio, ésa **es la solución**.

Un juego **de suma cero con dos jugadores** puede **tener múltiples equilibrios**.

En esta figura 2.6. **juego de suma cero con dos jugadores y dos soluciones, ambos jugadores pueden elegir izquierda o derecha de forma simultánea.**



- Si el 2 elige izquierda, pierde inmediatamente→elige derecha.

- Si el 1 elige izquierda, se produce empate y si elige derecha, también→ estos dos equilibrios (izda, dcha) y (dcha, dcha) conducen a las mismas ganancias, utilidad cero para cada jugador. **Cualquiera de los dos equilibrios será una solución.**

Demostración de que en un juego simétrico los equilibrios tienen que tener las mismas ganancias.

Se construye un caso hipotético. Se supone que (a, -a) y (b, -b) son equilibrios de Nash. Además se supone que (a, -a) y (b, -b) *no* son iguales. Veremos que esto último no puede ser verdad.

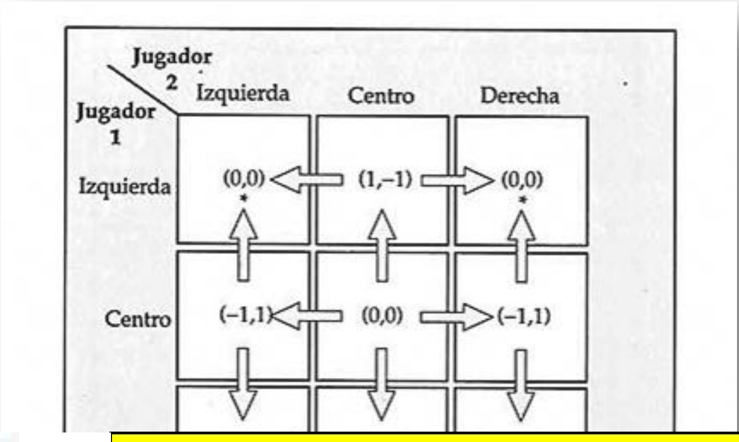
Debe cumplirse que a > d y que b > c; y que -a > -c y que -b > -d. Todo eso se deduce del hecho (un supuesto) de que las dos casillas con el asterisco son equilibrios.

Se puede deducir que si -a > -c, entonces a < c y que si -b > -d, entonces b < d.

Con todas las desigualdades ante nosotros podemos construir las relaciones a > d > b > c > a. Es una contracción puesto que a > a no puede ser verdad.

Por tanto, las dos condiciones a partir de las cuales hemos construido las desigualdades (que (a, -a) y (b, -b) son equilibrios de Nash y que (a, -a) y (b, -b) no son iguales) no pueden darse a la vez, puesto que si las imponemos -ambas- vamos a una contradicción.

En la 2.7. tenemos un **juego de suma cero con dos jugadores y <u>cuatro equilibrios</u>**; más complicado:



- **Ambos** pueden **elegir izda, centro o dcha simultáneamente**.
- La única forma de **que 2 pierda** es **eligiendo centro cuando el 1 no lo hace**.
- El **resto de combinaciones** de estrategias conducen a un **empate**.
- **Los cuatro equilibrios**: (izda, izda), (izda, dcha), (dcha, izda) y (dcha, dcha) tienen las **mismas ganancias→empate.**

Desarrollo:

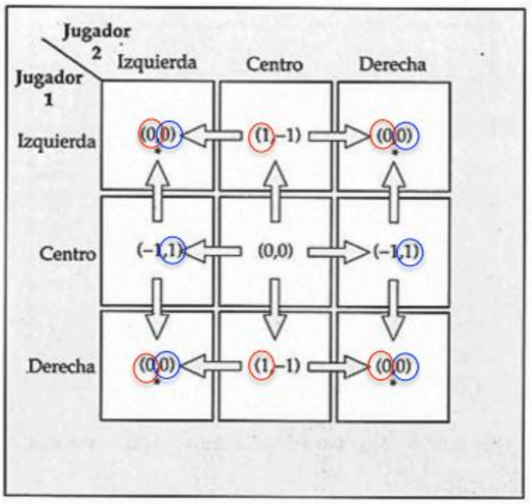


Figura 2.7. Juego de suma cero con dos jugadores y cuatro soluciones.

El jugador 1 tiene que elegir estrategia (fila). Va señalando su mejor opción en cada caso:

1) si el jugador columna elige izquierda, él preferirá izquierda o derecha. Marcamos con círculo rojo;

2) si el jugador columna elige centro, él preferirá izquierda o derecha. Marcamos con círculo rojo;

3) si el jugador columna elige derecha, él preferirá izquierda o derecha. Marcamos con círculo rojo.

El jugador 2 tiene que elegir estrategia (columna). Va señalando su mejor opción en cada caso:

1) si el jugador fila elige izquierda, él preferirá izquierda o derecha. Marcamos con círculo azul;

Solo hay **equilibrios de Nash allí donde la casilla tiene los dos números rodeados con un círculo**→ (**centro, centro) no es un equilibrio porque no es la mejor situación posible para los jugadores**.

En todos los juegos de equilibrio múltiple las <u>ganancias de cada jugador son las mismas en cada equilibrio</u> → matemáticamente **es necesario que cada equilibrio de un juego de suma cero con dos jugadores tengan las mismas ganancias.**

<u>Teorema de solución para juegos de suma cero con dos jugadores</u>: Todo equilibrio de un juego de suma cero con dos jugadores tiene el mismo valor.

Consideremos un **juego 2x2:**

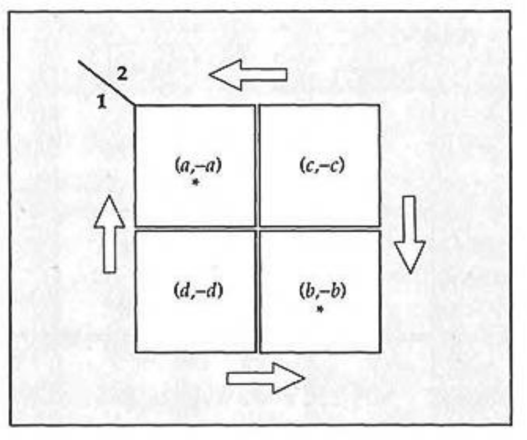


Figura 2.8. Demostración del teorema de solución.

Demostración del teorema por contradicción: por hipótesis, **los vectores de ganancias (a, -a) y (b, -b) son equilibrios** y, **a** <u>no es igual a</u> **b**→estas dos **soluciones diferentes no pueden estar en la misma fila o columna** (pues sería una contradicción inmediata)

Colocamos estos equilibrios en **las esquinas.**

Según el diagrama de flechas, tenemos el siguiente sistema **de desigualdades**:

Resolviendo este sistema de desigualdades**:** **a > d > b > c > a** → contradicción.

Se construye un **caso hipotético**:

Se supone que:

(a, -a) y (b, -b) son equilibrios de Nash.

(a, -a) y (b, -b) no son iguales→ Esto último no puede ser verdad.

Debe **cumplirse que:**

a > d, y que

b > c, y que

-a > -c, y que

-b > -d

→ Todo eso se deduce del hecho (un supuesto) de que **las dos casillas con el asterisco son equilibrios.**

Se puede deducir que:

si -a > -c, entonces a < c, y que

si -b > -d, entonces b < d.

Con todas las desigualdades ante nosotros **podemos construir las relaciones a > d > b > c > a** →Es una **contracción puesto que a > a no puede ser**.

Por tanto, **las dos condiciones** a partir de las cuales hemos construido las desigualdades (que (a, -a) y (b, -b) son equilibrios de Nash y que (a, -a) y (b, -b) **no** son iguales) **no pueden darse a la vez**, puesto que **si las imponemos** -ambas- **vamos a una contradicción**.

Si además hacemos que **una o todas las flechas** vayan **en las dos direcciones, reemplazando la desigualdad con una igualdad**, también se obtiene contradicción.

2.5.- Juegos de suma variable con dos jugadores

La mayoría de los juegos en el mundo empresarial no son de suma constante. Son **más complejos** y su **solución teórica** mucho **más complicada**.

Si la suma de las utilidades de los jugadores en un juego es diferente según los resultados, ese juego es un juego de suma variable.

Juego de la figura 2.9. **Hagamos un trato:**

> ***Dos jugadores**, el jugador 1, estrella de cine, y el 2, director, **tratan de llegar a un acuerdo**.*
>
> *Calculan que con la película **pueden obtener un beneficio de 30.000.000 $.***
>
> *Se **pueden** poner de **acuerdo de repartir al 50%.***
>
> ***Si uno rechaza** el acuerdo **se acaba el** juego y **no se realiza la película.***

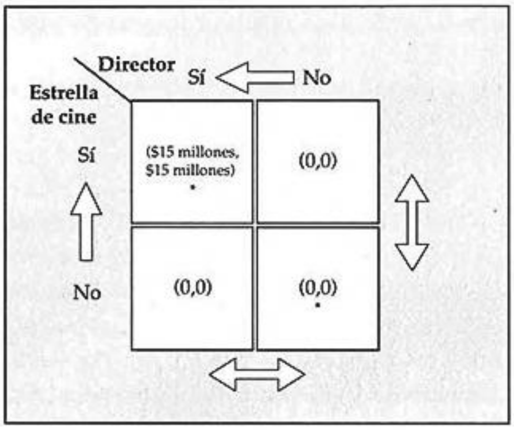


Figura 2.9. Hagamos un trato.

Tiene dos equilibrios:

> ***(si, si)** que implican 30 **millones, 15 para cada uno**, y*

Equilibrio

Cualquier **par de estrategias** tal que **las flechas apuntan hacia ellas** desde cualquier dirección.

En equilibrio **cada jugador maximiza la utilidad** y

Ningún jugador tienen **incentivos para cambiar de estrategia**.

No todos los equilibrios tienen las **mismas ganancias si** el juego es de **suma variable.**

Solucionar un juego es como **resolver** un **problema de cálculo diferencial**.

Si queremos ***minimizar la función*** $f(x) = x^2$*:*

- *la* ***condición necesaria*** *(debe ser satisfecha por todos los candidatos para que sea solución) para minimizar es que su* ***primera derivada sea cero****:* $df/dx = 2x = 0$ → *como x=0, será un candidato para resolver el problema de minimización.*
- *la* ***condición suficiente*** *es que* ***la segunda derivada sea mayor que cero****:* $d^2f/dx^2 > 0$*; como se cumple porque* $d^2f/dx^2 = 2 > 0$

  Si se cumplen ambas condiciones, necesaria y suficiente, se obtiene una solución, x=0 *resuelve el problema de minimización, y el* ***valor mínimo de la función es f(0)=0.***

Si quisiéramos ***maximizar la función*** $f(x) = x^2$*:*

- *la* ***condición necesaria*** *para maximizar sería que su* ***primera derivada sea mayor que cero****:* $df/dx = 2x > 0$
- *la* ***condición suficiente****, que* ***la segunda derivada sea negativa****:* d^2f/dx^2*=2****<0***

Un resultado ha de ser un **equilibrio o punto de reposo (condición necesaria)** antes de poder **ser un candidato a la solución**.

Si un resultado no es equilibrio, algún jugador podrá mejorar si cambia su estrategia→

¿Por qué el **equilibrio de Nash** se encuentra **en el punto no-no**? El resultado es el mismo si uno de los dos dice que no, es decir, (0, 0).

En realidad **hay dos equilibrios de Nash en ese juego**, que se descubren al aplicar la regla -o el método- para detectarlos.

Si el director elige "Sí", a la estrella le interesa "Sí".

Si el director elige "No", a la estrella le da igual "Sí" o "No".

Si la estrella elige "Sí", al director le interesa "Sí".

Si la estrella elige "No", al director le da igual "Sí" o "No".

Hay **dos casillas con ambos valores marcados**, que son la superior izquierda y la inferior derecha.

Si los jugadores "caen" en Sí-Sí, estarán satisfechos de lo que eligieron a la vista de lo que ha elegido el otro. Pero **eso mismo se da si "caen" en No-No**.

En las matemáticas se distingue siempre entre **condiciones necesarias y condiciones suficientes para que algo sea verdad**, o una afirmación se cumpla.

La condición necesaria tiene que darse si lo que aseguramos es verdad o se cumple. **Pero** esa condición **por sí sola no asegura el complimiento** de lo que aseguramos.

La condición suficiente asegura que lo que aseguramos es verdad o se cumple. Pero **esa condición puede no ser necesaria**, es decir, **lo que aseguramos puede ser verdad o cumplirse aunque la condición suficiente no se de.**

Por ejemplo, para que pueda usted comprar un coche es suficiente con tener ahorrado el dinero para comprarlo, pero no es necesario, pues puede pedir un crédito o recibir un préstamo de un familiar. Sin embargo, para comprar un coche tiene que tener el carnet de conducir, si bien no es suficiente, ya que además del carnet deberá tener el dinero.

Usted parte de una función como **y = f(x),** y quiere **encontrar el valor de (x) que hace que "y" sea máximo.**

Una condición que **debe cumplir necesariamente** el valor (x*) para generar un máximo en y es **que la derivada parcial de esa función sea cero**, es decir, **df/dx = 0**, pero eso no es condición suficiente. No lo es porque, cumpliéndose, podría ocurrir que (x*) nos diera un mínimo para y, no un máximo.

Hace falta algún otro requisito, otra condición.

Cuando la segunda derivada es negativa para el valor de x*, entonces el valor de y asociado a x* será un máximo. Si es positiva será un mínimo.

Toda solución de un juego **tiene que ser un equilibrio** →Por tanto, **ser equilibrio es condición necesaria, pero no suficiente**, para ser solución. Un motivo es que puede haber más de un equilibrio.

La condición suficiente de solución, depende de una casuística muy variada que el libro analiza en los capítulos siguientes.

Cuando el **juego es simétrico en ganancias** (los dos jugadores ganan lo mismo si hacen lo mismo) la **solución tiene que ser simétrica en ganancias**. Por eso **buscamos estrategias mixtas si el juego es simétrico y no hay equilibrios simétricos en ganancias en estrategias puras.** Los equilibrios en estrategias mixtas son simétricos.

En el caso del juego de la f**igura 2.9 los dos equilibrios son simétricos en ganancias (el juego es simétrico)**. Hace falta un criterio **para elegir**, y ese **criterio** es el **de estrategias no dominadas**. A la solución se llega aplicando estrategias no dominadas, siempre.

Si hay estrategias dominantes que señalen uno de los dos equilibrios ya tenemos la respuesta: **ese equilibrio es la solución**. Pero **si no hay estrategias dominantes** que señalen uno, **basta con que podamos llegar a uno de los dos equilibrios mediante estrategias no dominadas**.

Veamos el caso de la figura 2.9:

Figura 2.9		
Estrella	Sí	No

lo que los jugadores tienen sólo dos alternativas, **cuando**

hay una dominante (débil o estricta) la otra alternativa es dominada (débil o estrictamente).

La condición dice que **a la solución llegamos mediante estrategias no dominadas (débil o estrictamente).** Pues muy bien, sólo **(sí, sí) cumple esa condición suficiente, por lo que es la solución** →el equilibrio (no, no) es resultado de seguir dos estrategias débilmente dominadas, por lo que **no** puede ser solución.

2.6.- Una condición suficiente para resolver juegos de suma variable:

Si (s, t) es un equilibrio pero desde el punto de vista del jugador 1 **hay otra estrategia s^* que domina a s, y** desde el punto de vista del jugador 2 la estrategia **t^* domina a la t→ dicho equilibrio (s, t) no será solución.**

Las condiciones suficientes en teoría de juegos nos dicen que **algo no puede ser una solución, aunque sea un equilibrio**. La idea de estas condiciones es eliminar ciertos equilibrios como posibles soluciones.

En el juego **Hagamos un trato** la solución no dominada será que ambos, estrella y director, digan sí al acuerdo.

Problema de coordinación de sistemas de video:

→ el problema es **conseguir que todo el mundo se coordine en una única estrategia**.

→ Este juego de coordinación tiene **dos equilibrios** pero no importa si las empresas escogen Beta o VHS mientras **escojan el mismo sistema**.

→Como **ninguno** de los dos sistemas **domina al otro**, **ambos satisfacen la condición suficiente de estrategias dominadas**

→ satisfacer **condiciones suficientes no garantiza la unicidad de la solución.**

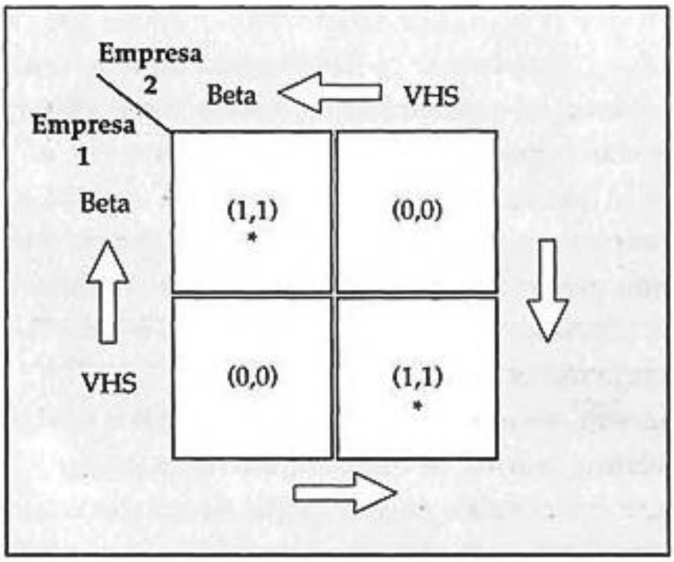


Figura 2.10. Coordinación de sistemas de vídeo.

Este juego, igual que Hagamos un trato, **es como una alegoría→**estos juegos reducen a lo esencial los aspectos estratégicos de una situación.

Las alegorías son útiles pues enseñan **cómo aplicar a situaciones complicadas** lo que hemos aprendido en una situación simple.

2.7.- Publicidad de cigarrillos en televisión

USA 1964: se emite **primera advertencia** de que **fumar puede perjudicar la salud→**las **compañías se mostraron reacias a incluir el mensaje** de advertencia en sus productos.

1970: el sector tabaquero y el gobierno llegaron a **un acuerdo: las empresas incluirán la advertencia y dejarán la publicidad en TV** a **cambio de inmunidad federal** (pero siguen siendo responsables potenciales en cada Estado).

Considerando **dos compañías**, compañía 1 y compañía 2, **cuando ambas adoptan estrategias comparables, disfrutan de beneficios y cuotas de mercado comparables**.

Compañía 1 \ Compañía 2	No anunciar en televisión	Anunciar en televisión
No anunciar en televisión	(50,50)	(20,60)
Anunciar en televisión	(60,20)	(27,27) *

Figura 2.11. Publicidad de cigarrillos en televisión. Todos los pagos están en millones de dólares.

Si **C1 hace publicidad y C2 no→Bº de C1 crece 20%;** lo mismo que si intercambian los papeles → **cada una** de las compañías tiene **incentivos para anunciar sus cigarrillos en TV.** Ésta es la **estrategia dominante para ambas** compañías →Existe **un único equilibrio** y por tanto **solución,** en el que **las dos compañías hacen publicidad**.

Cuando **ambas hacen la publicidad al tiempo→** los **beneficios son solo de 27 millones $ para cada una** (23 millones menos que si no hicieran publicidad)**→la publicidad de una anula a la otra** (**juego ineficiente**) →quedan **las ventas casi igual** pero a **un coste más alto**.

Un **resultado es eficiente si no existe ningún otro resultado que proporcione a todos los jugadores una ganancia mayor.**

Los **desequilibrios no son lugares en que los jugadores deban quedarse**, pues aparecería la paradoja.

Todo **juego en el que cada jugador tiene una estrategia dominante tiene una única solución** que consiste en **jugar esta estrategia dominante**.

Cuando esta situación es mala para los jugadores, el fenómeno recibe el nombre de **dilema de los presos**. Los jugadores están presos de sus propias estrategias, **a no ser que algo**

soluciones de los juegos **de suma cero son siempre eficientes**, mientras **las de los juegos**

de suma variable raramente lo son→ un cambio en las reglas del juego pueden **convertir una solución ineficiente en eficiente,** significando un **aumento de Bº.**

Las cantidades de esa tabla son millones de dólares de beneficio, no de ingresos; no son porcentajes.

La empresa 1 pasa de ganar 50 (caso de no-no) a 60 millones (caso sí-no) cuando pasamos de la casilla superior izquierda a la inferior izquierda.

La empresa 2 pasa de ganar 50 millones a solo 20 millones con ese mismo cambio. Pierde ventas porque la publicidad que hace la empresa 1 hace que la 2 pierda parte de su cuota de mercado. La suma de los beneficios cae (de 100 = 50+50, a 80 = 60+20) porque en el segundo caso una de las dos empresas está incurriendo en gastos de publicidad, que antes no había.

Podríamos diseñar el caso con otros supuestos. Por ejemplo, podríamos considerar la posibilidad de que la publicidad aumenta las ventas conjuntas, de forma que en la casilla inferior izquierda la suma de las dos cantidades fuera mayor que la suma de las cantidades de la casilla superior izquierda (tendríamos 120 en vez de 80, por poner un caso). En ese caso el jugador 2 podría perder ventas, pero menos, porque en parte perdería cuota (% de beneficios totales) de mercado, pero también operaría en un mercado mayor. En el mundo real pueden pasar muchas cosas.

En principio el juego debe reflejar las circunstancias reales del caso que se estudia, o bien, si es un caso meramente ilustrativo, debe estar diseñado -con supuestos razonables- para ilustrar lo que pretendemos.

Hay un caso real, histórico, de dos empresas (duopolio) que compiten, y donde una campaña de publicidad de una cambia las cuotas de mercado. Fue el caso de Coca-Cola y Pepsi.

El director de marketing que diseñó la famosa campaña de Pepsi (el anuncio mostraba a gente que probaba a ciegas los dos refrescos, y elegían Pepsi) fue John Sculley, que alcanzó después la presidencia de Pepsi. Esta compañía consiguió un vuelco en las cuotas de mercado en USA.

Steve Jobs, fundador de Apple, convenció a Sculley de abandonar la presidencia de Pepsi para dirigir Apple a principios de los 80. Sculley consiguió quitar a Jobs

Maximización conjunta de beneficios.

En el juego que se plantea en el epígrafe 2.8 tenemos dos empresas que deciden entre muchas estrategias, es decir, entre muchos presupuestos de publicidad. Si cada empresa maximiza su función de utilidad (beneficios) por separado la empresa 1 obtiene \$187.500 y la empresa 2 \$62.500, lo que supone un beneficio total de \$250.000. En cambio, si maximizan conjuntamente los beneficios, es decir, si maximizan el total, la empresa 1 obtiene \$224.482 y la empresa 2 \$61.233, lo que supone un total de \$285.714. Como puede verse, este total es mayor. Sin embargo la empresa 2 parece estar logrando un beneficio menor que maximizando por su cuenta.

Esto es un espejismo. En el primer caso las empresas sí maximizaban cada una por su cuenta, y los beneficios obtenidos eran "suyos". El total era una suma que calculábamos nosotros. En el segundo caso lo que se obtiene es el total, y lo correspondiente a cada empresa es un cálculo nuestro, pero irreal. En realidad ese beneficio conjunto debe repartirse, y no hay por qué usar las funciones de beneficio individuales. Es difícil llevar la negociación a una solución estable y satisfactoria para ambas partes, aunque es previsible que las dos empresas sólo aceptarán la maximización conjunta si pasan a ganar, las dos, algo más que cuando iban cada una por su lado. Dentro de ese límite, el espacio para la negociación es muy amplio. Lo veremos en los juegos cooperativos.

2.8 Juegos de dos jugadores con muchas estrategias

Un jugador puede **tener miles de millones de estrategias, y** aún **podríamos analizar el juego.**

Llamemos:

x1= estrategia** escogida de **j1
x2= estrategia** de **j2
u1(x1, x2) = función utilidad de j1 → *depende de las dos estrategias*
u2(x1, x2) = función utilidad de j2 → *también depende de las dos estrategias*

*Por tanto **existe interrelación estratégica.***

*Suponiendo que **x1 y x2 pudieran tener 100 valores** diferentes, para describir el juego **precisaríamos una matriz 100x100**; y, si los valores que pudieran adoptar estuvieran entre 0 y 1… por tanto el juego se podrá resolver de otras formas.*

2) **Resolvemos el sistema** de dos ecuaciones **con dos incógnitas, x1 y x2**

3) **La solución $x^* = (x1^*, x2^*)$ es un equilibrio**

4) **Si hay más de una solución** recurriremos a **condiciones suficientes** para con las soluciones.

Ejemplo: *Supongamos **que x1 y x2 son los presupuestos** (cualquier número entre 0 y 1.000$) **para publicidad de dos empresas 1 y 2.***

- ***Los beneficios de e1,** u1(x1, x2), representados en **la función:*** $u_1(x_1, x_2) = 1.000x_1 - x_1^2 - x_2^2$ ***son crecientes hasta un punto máximo*** $(x_1 = \$500)$ *y a partir de ahí decrecen. Pero además **son decrecientes con respecto al presupuesto de publicidad de la empresa 2 → maximizando los beneficios de 1 respecto a su presupuesto de publicidad:***

$$0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 1.000 - 2x_1$$

***donde la empresa 1 considera el presupuesto de la 2 como si fuera constante** (algo <u>solo cierto en equilibrio</u>).*

- ***Los beneficios de e 2**, u2(x1, x2), son **representados por*** $u_2(x_1, x_2) = 1.000x_2 - x_1x_2 - x_2^2$

  *y **maximizando** sus beneficios **respecto a su presupuesto**, obtenemos:*

$$0 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 1.000 - x_1 - 2x_2$$

*Ahora **tendremos que resolver un sistema** de ecuaciones:*

$$0=1.000-2x1$$

$$0=1.000-x1-2x2$$

Luego, ***el vector equilibrio*** *de este juego* ***será*** *x* = (x1*, x2*) = (500, 250)*

Los ***beneficios correspondientes*** *serán:*

u1 (x*) = 187.500 $
u2(x*) = 62.500 $

En este equilibrio ***hay mucha publicidad****; ambas empresas aún* ***podrían ganar más haciendo menos publicidad.***

Resolvemos la maximización u1+u2:

$$0 = \frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial(x_1)} = 1.000 - 2x_1 - x_2$$

y

$$0 = \frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial(x_2)} = 1.000 - x_1 - 2x_2 - 2x_2$$

Resolviendo,

x1= 428,6
y
x2= 142,9

Sustituimos en la función *de beneficios* ***de la empresa 2,*** $u_2(x_1, x_2) = 1.000x_2 - x_1x_2 - x_2^2$*, y nos dan:*

u1= 224,482 $
y
u2= 61.232,65 $

de donde podemos concluir que ***las empresas que compiten en publicidad tienden a anunciarse demasiado.***

Se describe un simple proceso de maximización de dos funciones de beneficio arbitrarias:

La otra variable, x2, tiene un efecto negativo desde el principio.

Para hallar el máximo o el mínimo de una función derivamos e igualamos a cero. Lo hacemos **solo con respecto a x1**, dado que la empresa 1 controla x1 pero no tiene forma de cambiar **x2** (que decide la otra empresa), por lo que **para ella es una constante**.

$du1/dx1 = 1000 - 2x1 = 0$, de donde $x1 = 500$

Hacemos lo mismo para la empresa 2, que tiene otra función de beneficios:

$u2 = 1000x2 - x1x2 - x2^2$

Derivamos con respecto a x2, dado que la empresa 2 controla x2 pero no tiene forma de cambiar **x1** (que decide la otra empresa), por lo que **para ella es una constante.**

$du2/dx2 = 1000 - x1 - 2x2 = 0$

Dado que ya **sabemos que x1 = 500**, s**ustituyendo** eso en esta segunda ecuación, tenemos:

$1000 - 500 - 2x2 = 0$, de donde $x2 = 250$.

Lo que se propone al final de la página es que **las empresas, en vez de maximizar cada una por su cuenta,** su beneficio, manipulando el gasto en publicidad, **lo hagan de forma conjunta, como si fueran una sola empresa**. Para ello **hay que formar una función de beneficio única**:

$u1 + u2 = 1000x1 - x1^2 - x2^2 + 1000x2 - x1x2 - x2^2$

$u1 + u2 = 1000x1 - x1^2 - 2x2^2 + 1000x2 - x1x2$

Ahora sí **derivamos con respecto a x1 primero, y con respecto a x2 después**, porque ambas empresas actúan como una sola, y controlan x1 y x2.

Al derivar parcialmente con respecto a x1, x2 se considera constante, y viceversa:

2.9.- Existencia de equilibrio

Ser un **equilibrio** es una **condición necesaria** **para que una combinación de estrategias sea la solución del juego**. →**Si** una combinación de estrategias **no es un equilibrio**, entonces al menos **uno de los jugadores tiene incentivos para cambiar su juego.**

El que sean **estrategias no dominadas** es una **condición suficiente** **para una solución** de un juego. →Un **equilibrio en estrategias dominadas no puede ser una solución** según esta condición suficiente.

El teorema que garantiza la existencia de equilibrio:

Tengamos un ***intervalo acotado****, un espacio de estrategias para cada jugador, por ejemplo* ***[0, 1]****.*

El ***j1 escoge la estrategia x1*** *de su intervalo, y el* ***j2 escoge la x2****.*

Sus respectivas funciones de utilidad son u1(x1, x2) *y* ***u2(x1, x2****). Estas funciones de utilidad son* ***dos veces continuamente diferenciables*** *y además* ***cada una es estrictamente cóncava*** *en la estrategia del propio jugador.*

La función de mejor respuesta de 1 *(su* ***función de reacción****),* ***f1(x2),*** *es el* ***valor de x1 que maximiza u1(x1, x2), para cualquier x2*** *dado. →Luego* ***f1(x2) será una función continua en x2 y una solución de la ecuación:***

$$0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

En el caso de ***una solución de esquina*** ***tomaremos el valor apropiado de x1****, 0 o 1,* ***en vez del valor de mejor respuesta****.* ***Las esquinas deberemos inspeccionarlas cuando la solución a esta condición de primer orden no esté dentro de los límites del intervalo****.*

La función de mejor respuesta de 2, f2(x1) *es el* ***valor de x2 que maximiza u2(x1, x2) para cualquier x1*** *dado; es decir,* ***f2(x1) es una función continua en x1 y una solución de la ecuación:***

Sea $\mathbf{f} = [f_1(x_2), f_2(x_1)]$ la función en forma de vector de estas funciones de mejor respuesta, es decir, **la función de mejor respuesta del juego en su conjunto**. **Como los componentes de f son funciones continuas, f es continua.**

Si tenemos un par de estrategias (x1, x2), ***el jugador 1 elige su mejor respuesta a x2, f1(x2). Al mismo tiempo, el jugador 2 elige su mejor respuesta a x1, f2(x1)***→ la función de mejor respuesta del juego registra estas respuestas→ **el juego ha pasado**

de (x1, x2) a **[f1(x2), f2 (x1)].**

En nuestro ejemplo, de juego de publicidad, las funciones de mejor respuesta son:

$$f_1(x_2) = 500;$$

y

$$f_2(x_1) = 500 - \frac{x_1}{2}$$

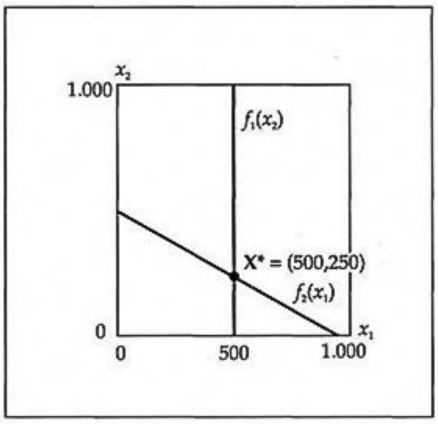


Figura 2.12. Publicidad, muchas estrategias, funciones de mejor respuesta.

Sea el sistema:

$$x_1^*=f_1\,(x_2^*)$$
y
$$x_2^*=f_2\,(x_1^*)$$

en forma compacta estas ecuaciones se pueden escribir como:

$$(x^*) = f(x^*) = [f_1(x_2^*), f_2(x_1^*)]$$

Un punto en el que la función f se aplica sobre sí misma se llama punto fijo.

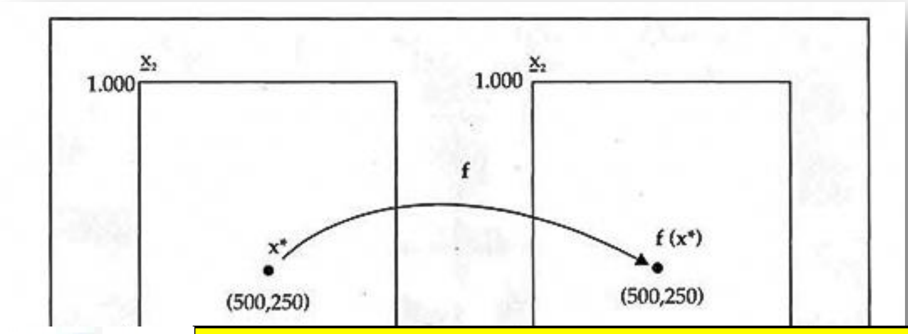
Un equilibrio del juego **es un punto fijo de la función de mejor respuesta**.

En equilibrio, ninguno de los jugadores tiene incentivos a responder de forma diferente a como ya está haciendo→ para asegurarnos de que el juego tiene equilibrio, debemos ver si **la ecuación** que contiene la función de mejor respuesta del juego **tiene un punto fijo x*→** existe una respuesta matemática:

<u>**Teorema del punto fijo**</u>**: Si f es función continua que va del cuadrado unitario al cuadrado unitario, entonces f tiene un punto fijo, x, donde**

$$x = f\,(x)$$

En **nuestro juego de publicidad**, como la **función de mejor respuesta del juego es continua,** debe **tener un punto fijo**, y cualquiera de estos puntos fijos es **un equilibrio:**



Existencia de equilibrio: Supongamos que para cada jugador i, ***ui* es dos veces continuamente diferenciable y estrictamente cóncava en *xi*→** existe un **vector de equilibrio de juego x*.**

Este argumento garantiza que **existirá un equilibrio cuando los conjuntos de estrategias tengan propiedades deseables (intervalos acotados) y también las posean las funciones de utilidad (dos veces continuamente diferenciables y estrictamente cóncavas** en la estrategia del jugador que corresponda).

Pero **nada dice de conjuntos de estrategias o de funciones de utilidad no adecuados**, donde el juego **puede no tener equilibrio** alguno.

Resumen

1. Un juego es de suma cero cuando la suma de las utilidades de los jugadores es cero sea cual sea el resultado. Los juegos de suma cero son un caso especial de juegos de suma constante. Todo juego de suma constante puede convertirse en un juego de suma cero.
2. Los juegos de suma cero con dos jugadores pueden solucionarse mediante un diagrama de flechas. Las flechas apuntan hacia un equilibrio. En equilibrio, cada jugador maximiza su utilidad dado lo que su oponente ha hecho.
3. Una empresa puede adquirir ventaja competitiva mediante la adopción de una nueva tecnología si sus competidores se quedan como estaban. Sin embargo, en un equilibrio del juego, todas las empresas adoptan una nueva tecnología y ninguna de ellas consigue una ventaja competitiva.
4. El Póquer de una carta tiene la misma forma normal que Ventaja competitiva, pero en el Póquer son importantes la estrategia y la suerte.
5. Todo equilibrio de un juego de suma cero con dos jugadores tiene el mismo valor.
6. Cuando en un juego la suma de las utilidades de los jugadores varía, el juego se

Jugador 1 \ Jugador 2	Permanecer callado	Confesar
Permanecer callado	(−0,5,−0,5)	(−3,0)
Confesar	(0,−3)	(−1,−1)

... los juegos de suma cero y tienen características diferentes.

7. Ser un equilibrio es una condición necesaria para que una combinación de estrategias sea la solución de un juego. Si una combinación de estrategias no es un equilibrio, entonces al menos uno de los jugadores tiene incentivos para cambiar su juego.
8. Los juegos de suma variable tienen normalmente múltiples equilibrios (Hagamos un trato, Coordinación de sistemas de vídeo). Estos equilibrios pueden tener valores muy diferentes, como en Hagamos un trato.
9. El que sean estrategias no dominadas es una condición suficiente para una solución de un juego. Un equilibrio en estrategias dominadas no puede ser una solución según esta condición suficiente.
10. Publicidad de cigarrillos en televisión muestra que la solución de un juego puede significar beneficios seriamente erosionados. Cambiar las reglas del juego puede conducir a grandes aumentos de los beneficios.

Conceptos clave

juego de suma cero
Batalla de las cadenas de televisión
ventaja competitiva
estrictamente dominante/
estrategia dominante
juegos de suma constante
equilibrio
Póquer de una carta
teorema de solución
Hagamos un trato

Problemas tema 2:

1. Suponga que en La batalla de las cadenas de televisión, si cada cadena emite una serie, la cadena 1 obtiene una cuota de audiencia del 66%. No hay más cambios en la forma normal. ¿Cuál es la solución del juego? ¿Es importante este cambio? ¿Por qué?

Piden la forma extensiva del juego de las batallas de las cadenas de televisión (p. 45), pero sustituyendo el 55% a la izquierda de la coma en la casilla serie/serie por un 66%, y eso implica sustituir (55%, 45%) por (66%, 34%):

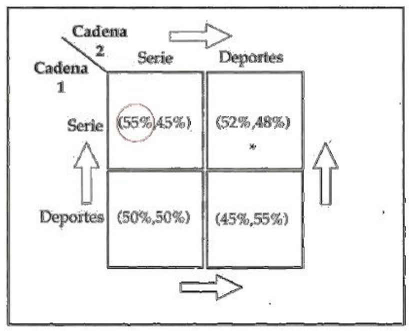


Figura 2.1. La batalla de las cadenas de televisión, forma normal.

La cadena 1 sigue teniendo una estrategia dominante, que es emitir la serie, pues todos *sus* resultados vinculados a esa estrategia (fila 1) son superiores a los de la estrategia alternativa (fila 2) para cada acción de su oponente. Por tanto, la cadena 1 elegirá emitir la serie en cualquier caso. La cadena 2 tiene otra estrategia dominante, que es emitir deportes, porque todos sus resultados para esa columna son superiores a los que obtendría en la otra columna.

Sabemos que el cruce de dos estrategias dominantes lleva a un equilibrio de Nash en estrategias puras, que es cadena 1 emitir serie y cadena 2 emitir deportes, y eso no cambia en las nuevas circunstancias.

*El **resto** de la Matriz pertenece igual. Es decir :*

*Fila 1: Casilla **Serie, Serie** sería(**66%,34%**) y casilla **Serie, Deportes** (52%,48%)*
*Fila 2: Casilla Deportes Serie (50%,50%) y casilla Deportes, Deportes (45%,55%) o (**34%,66%**).?*

2. **Transforme la versión de La batalla de las cadenas de televisión del problema 1 en un juego de suma cero y resuélvalo. Explique por qué las soluciones de los problemas 1 y 2 son en realidad la misma.**

Nos piden que pasemos a un juego de suma cero como el de la figura 2.2., pero con la modificación del problema 1. Sabemos que el resultado será el mismo.

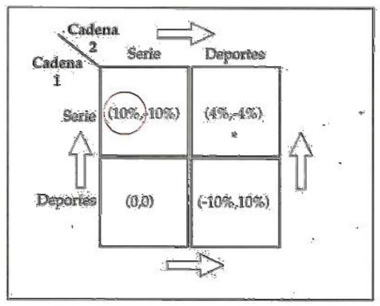


Figura 2.2. La batalla de las cadenas de televisión, versión de suma cero.

En cada casilla, pasamos de los valores de un juego como el de al figura 2.1 (jugo de suma constante, pues los valores de cada casilla suman siempre lo mismo) a un juego como el de la figura 2.2 (juego de suma cero, porque los valores de cada casilla suman cero) mediante unas sencillas transformaciones (p. 44) que se aplican a cada casilla por separado. Dado que ha cambiado solo una, hay que hacer los cálculos solo para esa.

Si u_1 y u_2 son los resultados del juego de suma constante, y v_1 y v_2 del juego de suma cero, tenemos que:

$v_1 = u_1 - u_2 = 66 - 34 = +32$

$v_2 = u_2 - u_1 = 34 - 66 = -32$

Si sustituimos los valores de la casilla superior izquierda por estos otros, comprobaremos que la estrategia dominante para el canal 1 (serie) sigue siéndolo, y también la estrategia dominante para el canal 2 (deportes), por lo que todo sigue igual.

El juego de suma cero del problema 2 tiene que basarse en el de suma constante del problema 1.

La diferencia entre la figura 2.1 y el juego de suma constante del problema 1 afecta solo a una casilla, la superior izquierda, y sus dos pagos son (u1, u2) = (66, 34).

Todo lo demás no cambia. Así que podemos tomar la figura 2.2 tal cual, pero

procedimiento.

3. **Demuestre que un juego en el que se gana, se pierde o se empata no es un juego de suma cero si cada jugador obtiene una utilidad = 1 por la victoria, utilidad = 0,5 por un empate y utilidad = −1 por la derrota. ¿Qué implicaciones tiene este resultado sobre la generalidad de los juegos de suma cero?**

Suponga que la utilidad de una victoria es 1, y de una derrota -1. En ese caso los resultados serían de suma cero. Pero si cabe la posibilidad del empate y la utilidad es de 0,5 para cada jugador, la suma de la casilla será 1 y no 0. Hay que recordar que los juegos de suma cero son aquellos en los que, casilla a casilla, la *suma* de los resultados es siempre cero.

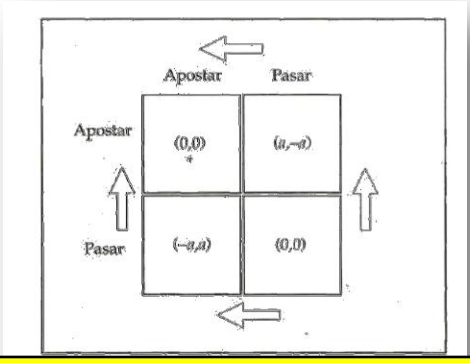
Como hemos visto en el problema 2, un juego de suma cero, aunque muy restrictivo, se puede pasar a una variante de suma constante (o al revés) con el mismo resultado. En este caso eso no es posible porque el juego no es de suma cero, simplemente.

4. **Dé ejemplos de ventajas competitivas en las siguientes industrias: de ordenadores personales, del automóvil, farmacéutica.**

En la industria de los ordenadores, el precio, la compatibilidad con el software, número y tipo de puertos, potencia del procesador, etc. En los coches, el precio, los caballos de potencia, el consumo de gasolina, etc. Para las medicinas, el precio, su efectividad, los efectos secundarios, o las patentes. Si una compañía no tiene ventajas competitivas de ninguna clase su futuro es negro.

5. **En el Póquer de una carta, suponga que la apuesta inicial es de 2 dólares y que la apuesta siguiente es de 1 dólar. Escriba la forma normal del juego y soluciónelo.**

Hay que rehacer el juego del póquer de una carta con las apuestas que se mencionan. La tabla original es la figura 2.5, p. 50:



Construimos una matriz con los siguientes pagos o resultados:

		Jugador 2	
		Apostar	Pasar
	Apostar	(0, 0)	(2, -2)
Jugador 1	Pasar	(-2, 2)	(0, 0)

Usamos nuestra técnica para detectar equilibrios de Nash y estrategias dominantes. El jugador 1 piensa que el jugador 2 elige "apostar". Estamos en la columna 1. El jugador 1 compara sus dos estrategias (números a la izquierda de la coma en la primera columna) y marcamos el mayor valor (0 > -2). El jugador 1 piensa que el jugador 2 elige "pasar". Estamos en la columna 2. El jugador 1 compara sus dos estrategias (números a la izquierda de la coma en la segunda columna) y marcamos el mayor valor (2 > 0).

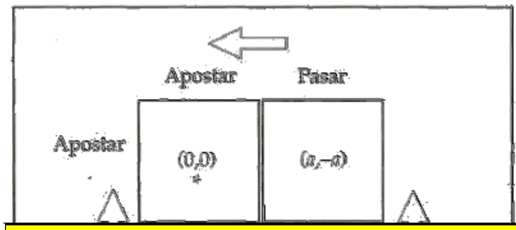
El jugador 2 piensa que el jugador 1 elige "apostar". Estamos en la fila 1. El jugador 2 compara sus dos estrategias (números a la derecha de la coma en la primera fila) y marcamos el mayor valor (0 > -2). El jugador 2 piensa que el jugador 1 elige "pasar". Estamos en la fila 2. El jugador 2 compara sus dos estrategias (números a la derecha de la coma en la segunda fila) y marcamos el mayor valor (2 > 0).

El jugador 1 tiene todos sus valores de la primera fila (los de la izquierda de la coma) marcados, así que "apostar" es una estrategia dominante para él. El jugador 2 tiene todos sus valores de la primera columna (los de la derecha de la coma) marcados, así que "apostar" es una estrategia dominante para él. Dos estrategias dominantes se cruzan en un equilibrio de Nash, que es apostar/apostar. Es la casilla que tiene sus dos valores (izquierda y derecha de la coma) marcados.

La solución no depende del tamaño de la apuesta *b*. Sólo las apuestas iniciales *a* afectan al juego. En versiones más complicadas del póker el tamaño de la apuesta sí importa. Lo veremos en los siguientes capítulos.

6. **Póquer de una carta con trampas. Suponga que el jugador 1 siempre obtiene un As y que el jugador 2 siempre obtiene un Rey. (A esto se le llama hacer trampas por parte del jugador 1). ¿Se queda el jugador 2 sin ganar ni perder?**

Hay que sustituir la matriz de la Figura 2.5, p. 50, por otra. La original es:



Construimos una matriz con los siguientes pagos o resultados:

		Jugador 2	
		Apostar	Pasar
	Apostar	(a+b, -a-b)	(a, -a)
Jugador 1	Pasar	(-a, a)	(a, -a).

El jugador 1 (filas) tiene una estrategia dominante, a la que juega, que es "apostar", pero el jugador 2 no tiene estrategia dominante alguna. Hay sin embargo un equilibrio de Nash, que es jugador 1 "apostar" y jugador 2 "pasar". El jugador 1, al tener una ventaja con las cartas, gana todas las apuestas iniciales del jugador 2. El jugador 2, con cartas malas, se ve obligado a pasar para minimizar sus pérdidas.

En la vida real los jugadores tienen dificultades para distinguir las malas cartas de una mala estrategia, y este juego muestra por qué. Cuando las cartas son malas, lo que en teoría es una estrategia óptima puede pasar a ser pésima. Si te das cuenta de que las condiciones han cambiado deberías cambiar también de estrategia.

		Jugador 2	
		Apostar	Pasar
	Apostar	(a+b, -a-b)	(a, -a)
Jugador 1	Pasar	(-a, a)	(a, -a).

El jugador 1 se plantea qué es lo mejor que puede hacer ante cada posible acción del jugador 2.

Si el jugador 2 elige Apostar el jugador 1 prefiere Apostar (círculo azul)

Si el jugador 2 elige Pasar al jugador 1 le da igual Apostar o Pasar (círculos azules)

El jugador 2 se plantea qué es lo mejor que puede hacer ante cada posible acción del jugador 1.

Si el jugador 1 elige Apostar el jugador 2 prefiere Pasar (círculo rojo)

Si el jugador 1 elige Pasar el jugador 2 elige Apostar (círculo azul)

Ahora analizamos: el jugador 1 tiene una estrategia dominante, que es Apostar (toda su primera fila está marcada en azul), el jugador 2 no (no tiene una columna entera en rojo); solo hay un equilibrio de Nash.

La técnica de flechas es totalmente equivalente. Allí donde un jugador es indiferente entre dos estrategias, hay una flecha de doble punta. Cuando prefiere una estrategia sobre otra, hay una flecha de una sola punta señalando en dirección a la estrategia preferida. Es lo mismo.

7. **Solucione Hagamos un trato cuando sólo hay 35.000 dólares para repartirse equitativamente. Escriba la forma normal del juego y detalle paso a paso su razonamiento.**

La Figura 2.9 de la página 55 muestra el juego "hagamos un trato":

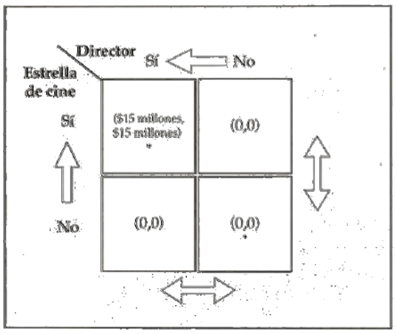


Figura 2.9. Hagamos un trato.

Pero hay que modificar esta matriz, y pasar a esta otra:

		Director	
		Sí	No
	Sí	(17.500, 17.500)	(0, 0)
Estrella de cine	No	(0, 0)	(0, 0)

Aplicamos nuestra técnica de subrayar pagos o resultados, y descubrimos dos equilibrios de Nash: (sí, sí) y (no, no). Cuando un jugador tiene resultados iguales para una estrategia del otro subrayamos los dos. Para cada jugador, la estrategia "sí" proporciona resultados *iguales o superiores* a los de la estrategia "no", y por ello se dice que la estrategia "sí" es *débilmente* dominante. La solución débilmente dominante es (sí, sí).

Cuando una estrategia proporciona mejores resultados que la otra para un jugador se dice que es *fuertemente* o *estrictamente* dominante. Aquí no las hay.

Nosotros no distinguimos en la práctica. Podemos decir que aquí hay dos estrategias dominantes, que convergen en un equilibrio de Nash que es la solución. Después hay también un equilibrio de Nash adicional, pero al ser el cruce de dos estrategias dominadas ese equilibrio no es solución del juego.

8. **Suponga que en Coordinación de sistemas de vídeo la ganancia si ambas empresas escogen VHS es 2 en lugar de 1. ¿Cómo afecta esto a la solución? ¿Por qué podrían las empresas preferir un equilibrio a otro?**

La Figura 2.10 de la página 56 muestra el juego "Coordinación de sistemas

Ahora sustituimos esa matriz por esta otra:

			Empresa 2
		Beta	VHS
	Beta	(1, 1)	(0, 0)
Empresa 1	VHS	(0, 0)	(2, 2)

Los equilibrios de Nash son posiciones estables a posteriori, una vez los jugadores caen en ellas. Hay dos equilibrios de Nash sin estrategias dominantes. Las estrategias dominantes aconsejan un curso de acción. Tampoco se llega a esos equilibrios por medio de estrategias dominadas, por lo que no podemos descartar ninguno. Ambos resultados serían simétricos. No sabemos pues qué ocurriría en este juego, si bien el equilibrio (VHS, VHS) es claramente más beneficioso para ambas partes que (Beta, Beta).

No entiendo por qué en este problema seguirían existiendo 2 equilibrios, cuando (2,2) es mayor que (1,1).

¿No sería el equilibrio (2,2) dominante a (1,1)?

En efecto, es así. Pero **los equilibrios de Nash son situaciones estables que se muestran como tales una vez hemos caído en ellas.** Y **puede haber varios equilibrios, unos más beneficiosos** que otros. Podemos caer en un equilibrio más beneficioso, y sería estable, o en otro menos beneficioso, y sería estable también. Cosa distinta es cuál sería la solución previsible del juego. **Si tuviéramos estrategias dominantes podríamos predecir qué ocurrirá,** pero como no las tenemos, **ninguno de los dos equilibrios son soluciones seguras.**

La eficiencia (magnitud de las ganancias) es un criterio para elegir solución, pero antes de aplicarlo deben cumplirse otras condiciones, que en este caso no se dan.

Son muy importantes las "orientaciones" que hay en el módulo de Documentos, pues sintetizan cada tema.

> ¿Pero la estrategia (2,2) no sería dominante a la estrategia superior izquierda (1,1)? ¿no habría solución porque no hay estrategias dominantes?

El valor (2,2) no es una "estrategia dominante", es un resultado, una casilla

9. Resuelva el juego de la figura 2.14. Demuestre además que cada jugador tiene una estrategia dominante. Relacione su solución con la publicidad.

Nos piden resolver el juego de la Figura 2.14, página 66:

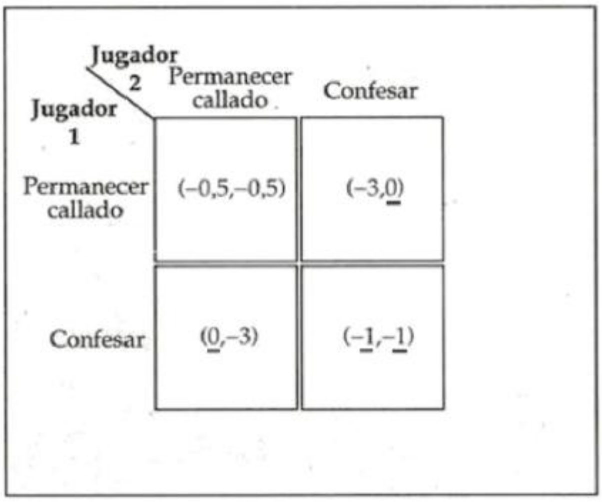


Figura 2.14. Dilema de los presos. Todos los números son años de cárcel.

Repetimos el procedimiento para detectar equilibrios. El jugador 1 piensa que el jugador 2 va a elegir "permanecer callado". Nos quedamos entonces en la columna 1. El jugador 1 tiene que elegir estrategia (fila), y para ello compara sus dos resultados en esa columna, es decir, los números a la izquierda de la coma en la primera columna. Dado que 0 > -0,5, subrayamos 0. El jugador 1 piensa que el jugador 2 va a elegir "confesar". Nos quedamos entonces en la columna 2. El jugador 1 tiene que elegir estrategia (fila), y para ello compara sus dos resultados en esa columna, es decir, los números a la izquierda de la coma en la segunda columna. Dado que -1 > -3, subrayamos -1.

El jugador 2 piensa que el jugador 1 va a elegir "permanecer callado". Nos quedamos entonces en la fila 1. El jugador 2 tiene que elegir estrategia (columna), y para ello compara sus dos resultados en esa fila, es decir, los números a la derecha de la coma en la primera fila. Dado que 0 > -0,5, subrayamos 0. El jugador 2 piensa que el jugador 1 va a elegir "confesar". Nos quedamos entonces en la fila 2. El jugador 2 tiene que elegir estrategia (columna), y para ello compara sus dos resultados en esa fila, es decir, los números a la derecha de la coma en la segunda fila. Dado que -1 > -3, subrayamos -1.

Hay dos estrategias *estrictamente* dominantes: jugador 1, confesar; y jugador 2, confesar. Esas estrategias dominantes aconsejan un curso de acción a los jugadores, y por tanto sabemos lo que harán. El resultado de esas decisiones es un equilibrio de Nash, (confesar,

10. En una economía de mercado donde todos los bienes son privados y la competencia es perfecta, un equilibrio es un óptimo. No obstante, en muchos juegos con dos jugadores los equilibrios no son óptimos. ¿Por qué?

Un ejemplo de lo que dice el enunciado del problema es el llamado "dilema del prisionero". En ese juego existe un equilibrio, una situación tal que si los jugadores se encuentran en ella pensarán aliviados que han hecho bien en hacer lo que han hecho. Pero ese equilibrio (de Nash) no es el resultado con los mayores beneficios para los jugadores (óptimo de Pareto). La causa está en que la estrategia de cada jugador afecta a los resultados del otro jugador. Los jugadores dependen, para sus resultados, de lo que efectivamente acabe haciendo el otro. Cuando hay estrategias dominantes pueden asegurarse el mejor resultado a priori, pero tampoco saben cuál será ese resultado.

Cuanto menor es el impacto de las decisiones de un jugador en el resultado de los demás, más cerca estaremos de la competencia perfecta, en la que el equilibrio es un óptimo de Pareto siempre. Para que ello se de, como sabemos, es necesario que el número de jugadores sea muy elevado.

11. Una gran compañía cervecera de Estados Unidos le contrata como consultor de estrategia. Se le pide que mejore su fuerte actividad publicitaria en televisión. Esboce su presentación y su consejo.

El problema se refiere a la Figura 2.11 de la página 59, que reproducimos aquí. Nos piden, por así decir, la conclusión última de ese juego.

Compañía 1 \ Compañía 2	No anunciar en televisión	Anunciar en televisión
No anunciar en televisión	(50,50)	(20,60)
Anunciar en televisión	(60,20)	(27,27) *

Figura 2.11. Publicidad de cigarrillos en televisión. Todos los pagos están en millones de dólares.

El consejo podría ser intentar pactar con las empresas competidoras no realizar publicidad, pero si esto no es posible, hacerlo.

<u>Ganar en el Black Jack</u>: LEER Y ENTENDER SOLO

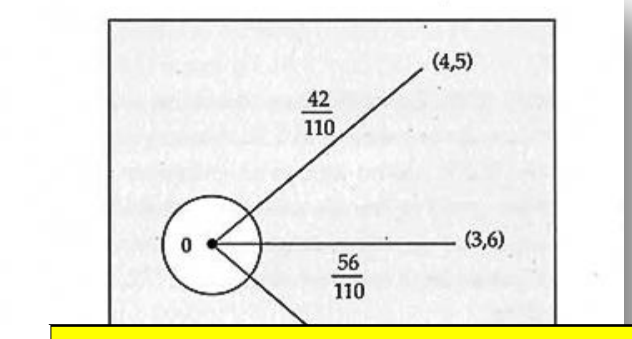
En todo juego de casino excepto el Black Jack los casinos tienen un valor esperado

- Reparto cartas: 2 mezcla la baraja y 1 corta
- 2 extrae dos cartas y se las muestra a 1→cartas quemadas
- 2 reparte 1 carta boca abajo para 1 y otra boca arriba para él.
- Apuestas (entre 1$ y 5$): 1 apuesta antes de que se le reparta su carta pero después del quemado.
- Valor cartas: 10 y 5
- Si un jugador roba una segunda carta, su valor se añade al de la primera→valor total de la mano
- Objetivo de 1: obtener valor mayor que el de 2 pero no excediendo el valor 10.
- Robo: 1 mira su carta→ si es 5 puede plantarse o volver a robar→ si roba y es 10, pierde por pasarse. Si es otro 5, ya tiene un valor de 10 y se planta.
- El crupier juega después de plantarse 1 con la primera carta o después de robar la segunda→ si tiene 10, se planta; si tiene 5, debe robar otra vez. Si le sale 10 el crupier pierde, pero si le sale 5, su valor será 10 y se plantará.
- Resultado:
  - Si 1 no se ha pasado y 2 sí, el 1 gana una cantidad igual a lo apostado.
  - Si ninguno se ha pasado, el que tenga un total más alto gana una cantidad igual a la apuesta del jugador.
  - Si ambos tienen el mismo total, no superior a 10, el dinero no cambia de manos.

Diez tiene 11 cartas y dos valores diferentes (5 y 10) y BJ tiene 52 cartas y once valores diferentes.

Si el jugador apuesta 1$ en cada mano, puede esperar una pérdida de 2 centavos por dólar apostado (pérdida promedio en un juego de casino).

Estrategia para vencer al crupier: Empezamos quemando dos cartas (figura 2.15):



- La baraja original consta de 4 dieces y 7 cincos (número de dieces, número de cincos)=(4, 7)
- Tras quemar dos cartas, las posibles barajas que quedan: (4, 5), (3, 6) y (2, 7) y sus probabilidades salen en la figura.
- La quema más probable es la de una carta de cada tipo, que ocurre un poco más del 50% de las veces (56/110).
- La situaciónn (4, 5) favorece al jugador y las otras dos, ricas en cincos, al crupier→en el BJ, cuantos más cincos, más desfavorable para el jugador.
- Para llegar a (4,5) desde (4,7), sacando dos *cincos*, tenemos que calcular la probabilidad de sacar precisamente esas dos cartas y no otras. Sacar primero un cinco: p_{cinco}=(7/11), y (4,7)->(4,6). Sacar luego otro *cinco*, y nos quedamos con (4,6)->(4,5): p_{cinco}=(6/10). Sacar los dos cincos: $p_{cinco,cinco}$= (7/11) (6/10) = 42/110.
- Para llegar a (2,7) desde (4,7), sacando dos *dieces*, tenemos que calcular la probabilidad de sacar precisamente esas dos cartas y no otras. Sacar primero un diez: p_{diez}= 4/11, y (4,7)->(3,7). Sacar luego otro diez, y nos quedamos con (3,7)->(2,7): p_{diez}= 3/10. Sacar los dos dices: $p_{diez,diez}$ = (4/11) (3/10) = 12/110.
- Para llegar a (3,6) desde (4,7), sacando un diez y un cinco, tenemos que calcular la probabilidad de sacar precisamente esas dos cartas y no otras. Sacar primero un *cinco*: p_{cinco}=(7/11), y (4,7)->(3,7). Sacar luego un *diez*, y nos quedamos con (3,7)->(3,6): p_{diez}=(4/10). El total es $p_{cinco,diez}$ = (7/11) (4/10) = 28/110. Pero podría haber sido al revés. Sacar primero un diez, y pasar a (4,7)->(3,7) con probabilidad p_{diez} = 4/11, y después sacar un cinco y pasar a (3,7)->(3,6) con probabilidad p_{cinco} = 7/10. La probabilidad de ese resultado final es $p_{diez,cinco}$ = (4/11)(7/10) = 28/110. Ahora bien, nos interesa la probabilidad de que ocurra una cosa u otra, y eso implica sumar probabilidades p = $p_{cinco,diez}$ + $p_{diez,cinco}$= 56/110.

Estoy intentando lograr las proporciones del caso 1 pero no llego a 52/72, algo no hago bien

sigo su procedimiento pero en algo me equivoco

Para llegar a (3,4) desde (4,5), sacando **dos *dieces***, tenemos que calcular la probabilidad de sacar precisamente esas dos cartas y no otras. Sacar primero un diez: p_{diez}= 4/11, y (4,5)->(3,5).

Sacar luego otro diez, y nos quedamos con (3,5)->(2,5): p_{diez}= 2/10.

Sacar los dos dices: p = (4/11) (2/10) = 8/110

>(3,5) es p_{diez} = 4/9. Después, la de sacar otro diez y pasar de (3,5)->(2,5) es p_{diez} = 3/8. La probabilidad de ambos eventos es $p_{diez,diez}$ = (4/9)(3/8) = 12/72.

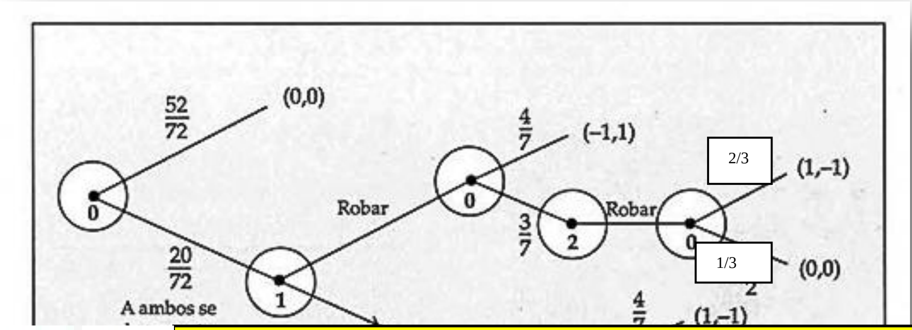
Si salen las cartas (*cinco*, *diez*) o bien (*diez*, *cinco*) el juego no se decide, porque quien ha sacado un 5 tiene que (crupier) o puede (jugador) pedir una nueva carta. Quien la pida se enfrenta a un mazo con (4,5)->(3,4). Si saca un *cinco* empata, y si saca un *diez* pierde. La situación es simétrica, para uno y para otro, jugador y crupier, de manera que en promedio si se llega a esta situación los jugadores acabarán empatando (unas veces en un empate, otras veces perdiendo uno y ganando el otro y otras veces al revés, pero en promedio es como si empataran siempre). La probabilidad de obtener las cartas (*cinco*,*diez*) y pasar de (4,5)->(4,4)->(3,4) es $p_{cinco,diez}$ = (5/9)(4/8) = 20/72. Pero la de obtener (*diez*, *cinco*) y pasar de (4,5)->(3,5)->(3,4) es $p_{diez,cinco}$ = (4/9)(5/8) = 20/72. La suma es p = $p_{cinco,diez}$ + $p_{diez,cinco}$ = 40/72.

Si sumamos esa probabilidad a la que calculamos antes y que nos llevaba también a un empate, tendremos p = 52/72 para un resultado de [0,0].

Hay otra forma de verlo: si sale al menos un *diez* acabamos en empate, da igual que sea (*diez*, *diez*), (*cinco*, *diez*) o (*diez*,*cinco*). Podemos calcular la probabilidad de que salga al menos un *diez*. Primero calculamos la probabilidad de que no salga un *diez*, y después restamos a 1 esa probabilidad. La probabilidad de que saquemos dos cartas del mazo (4,5) y no saquemos un *diez* es que saquemos dos *cincos*. El proceso en el mazo es (4,5)->(4,4)->(4,3), y la probabilidad es $p_{cinco,cinco}$ = (5/9)(4/8) = 20/72. Ahora, si hacemos p_{no} = 1 − $p_{cinco,cinco}$ = 1 − 20/72 = 52/72.

a) <u>Caso 1: Baraja (4, 5):</u>

Su forma extensiva es la figura 2.16:



- Existen cuatro posibles resultados de repartir una carta: (jugador, crupier)=(10, 10), (10, 5), (5, 10), (5, 5)

  (10, 10): Es una mano fácil, un empate automático con ganancias (0, 0).

  (10, 5) y (5, 10): Son manos en que en la primera tiene que robar el crupier y en la segunda el jugador→ la baraja es la misma en este momento (3, 4) y por ello tienen las mismas probabilidades. El promedio es un nuevo empate, ganancia (0, 0) con una probabilidad 52/72 de que al menos se reparta un diez.

  (5, 5): Con esta mano, el jugador puede robar o plantarse. Si roba, recibirá un 10 con probabilidad 4/7, pasándose, con ganancia (-1, 1) y recibirá un 5 con probabilidad 3/7, llegándole el turno al crupier→ Si el crupier roba, la probabilidad de que sea un 10 es 2/3, el crupier se pasará y la ganancia del jugador será (1, -1); pero tiene una probabilidad de 1/3 de sacar un 5, empatando ambos a 10 puntos y con ganancia para ambos de (0, 0).

  El valor esperado del jugador si roba una carta es:

  1: con probabilidad 4/14
  0: con probabilidad 2/14
  -1: con probabilidad 8/14, VE=-4/14

  Esto no es prometedor.

  Pero si el jugador se planta, el crupier deberá robar una carta y con probabilidad 4/7 será 10, pasándose, por lo que la ganancia del jugador será (1, -1) y con probabilidad de 3/7 será un 5, ganando el crupier diez a cinco, una ganancia de (-1. 1)

  Por tanto, el valor esperado si se planta será:

  1: con probabilidad 4/7
  -1: con probabilidad 3/7, VE= 1/7

  Esto es mejor, no es alto pero sí positivo. El jugador se planta con un cinco cuando el crupier tiene un cinco, y le gana.

b) <u>Caso 2: Baraja (3, 6):</u>

Su forma es la de la figura 2.17

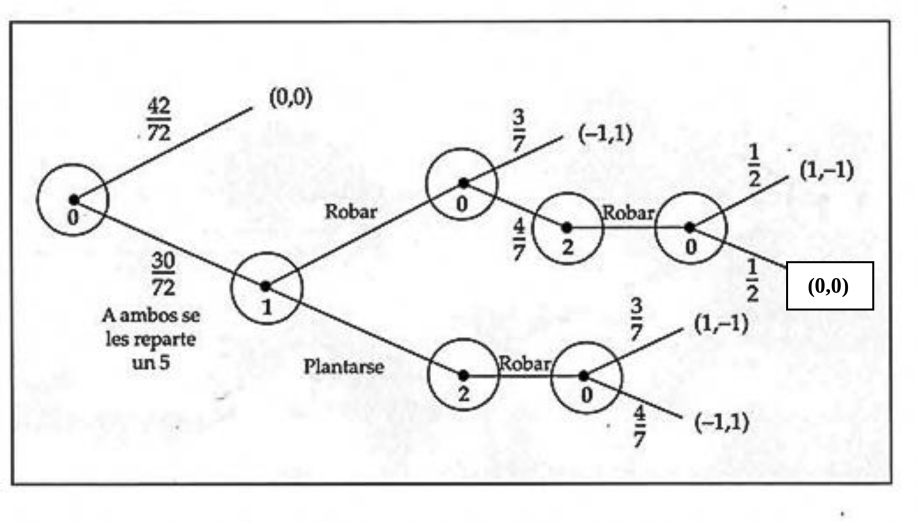


Figura 2.17. Diez con una baraja (3,6).

Aquí también está igualado el juego, excepto cuando se reparten dos cincos, suceso de probabilidad 30/72. En este caso, si el jugador roba una carta, tiene el siguiente valor esperado:

1: con probabilidad 4/14
0: con probabilidad 4/14
-1: con probabilidad 6/14, VE=-1/7

Esto no es prometedor.

Pero si el jugador se planta, el crupier deberá robar una carta y el valor esperado del jugador, si se planta será:

1: con probabilidad 3/7
-1: con probabilidad 4/7, VE= -1/7

Que tampoco es muy bueno. Es un caso en el que el jugador pierde, con un valor esperado total:

c) **Caso 3: Baraja (2, 7):**

Su forma es la de la figura 2.18

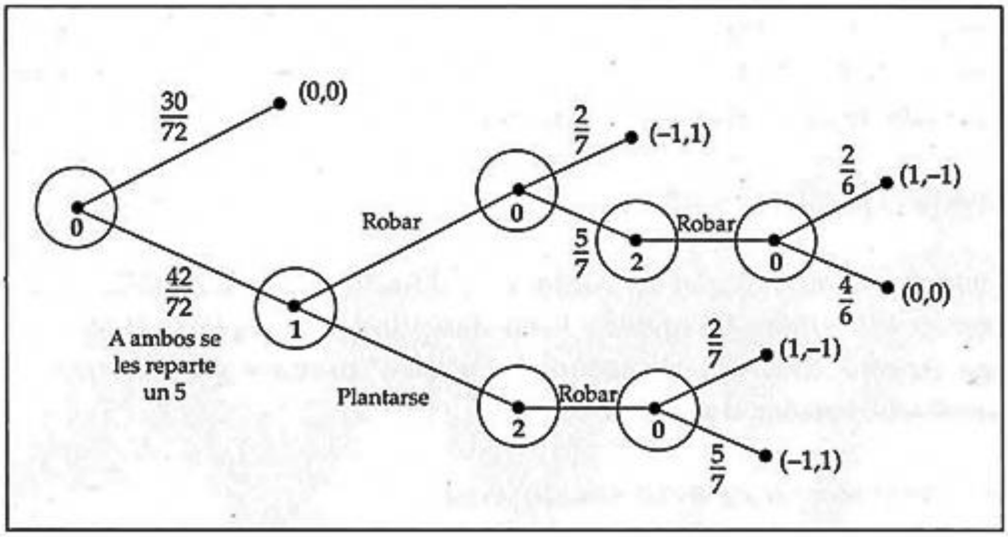


Figura 2.18. Diez con una baraja (2,7).

Aquí el jugador también pierde, y el valor esperado del jugador cuando la baraja es (2, 7) es:

0: con probabilidad 30/72
-1/21: con probabilidad 42/72, VE= -14/504

Vistos los tres casos, ahora podemos calcular el valor esperado de apostar lo mínimo, un dólar, cada una de las veces, sea cual sea la baraja. Tenemos:

20/504 con probabilidad 42/110, la baraja (4, 5)
-30/504 con probabilidad 56/110, la baraja (3, 6)
-14/504 con probabilidad 12/110, la baraja (2, 7)

por lo tanto, el valor esperado es:

VE=- 1.008/55.440

El jugador puede esperar una pérdida de unos dos centavos por dólar apostado.

... esto de casos, lo mínimo, 1$.

El valor esperado de esta estrategia será:

$$\frac{100}{504} \text{ con probabilidad } \frac{42}{110}, \quad \text{la baraja } (4,5) \text{ con \$5 de apuesta}$$
$$-\frac{30}{504} \text{ con probabilidad } \frac{56}{110}, \quad \text{la baraja } (3,6) \text{ con \$1 de apuesta}$$
$$-\frac{14}{504} \text{ con probabilidad } \frac{12}{110}, \quad \text{la baraja } (2,7) \text{ con \$1 de apuesta}$$
$$VE = \frac{2.352}{55.440}$$

Utilizando estos dos principios, el jugador puede esperar ganar unos cuatro centavos por dólar apostado→ convierten al jugador perdedor en ganador. El crupier no puede hacer nada, salvo trampa descarada. El único problema es poder determinar en un casino las situaciones favorables.