

UNED

unidad  
didáctica

# Control Adaptativo Predictivo Experto

Metodología, Diseño y Aplicación

Juan M. Martín Sánchez  
José Rodellar

A D E X

Ingeniería Industrial

# Índice

**PRÓLOGO** xix

**UNIDAD DIDÁCTICA I** 

---

**Introducción y Fundamentos de los Sistemas de Control Adaptativo Predictivo Experto** 1

<b>1</b>	<b>Introducción al Control Adaptativo Predictivo Experto</b>	<b>5</b>
1.1	Introducción . . . . .	5
1.2	Concepto de lazo de control en un proceso industrial . . . . .	6
1.3	Requisitos para una metodología avanzada de control industrial . . . . .	8
1.4	La metodología de realimentación negativa . . . . .	11
1.5	Introducción de los ordenadores en el control de procesos . . . . .	14
1.6	Concepto básico de modelo en tiempo discreto . . . . .	16
1.7	Control Predictivo: origen y conceptos básicos . . . . .	22
1.8	El efecto de las perturbaciones . . . . .	24
1.9	La necesidad de adaptación . . . . .	26
1.10	Sistemas adaptativos . . . . .	27
1.11	Sistemas de control adaptativo y predictivo . . . . .	30
1.11.1	Diagrama de bloques . . . . .	30
1.11.2	Ejemplo conceptual de aplicación . . . . .	32
1.12	Límites del control adaptativo predictivo . . . . .	34
1.13	Control adaptativo predictivo experto . . . . .	35
1.13.1	Dominios ADEX . . . . .	35
1.13.2	Diagrama de bloques y descripción funcional . . . . .	37
1.13.3	Ejemplo conceptual de aplicación . . . . .	39
1.14	Un primer nivel de conocimiento conceptual . . . . .	40

<b>2 Escenarios, Notaciones y Condiciones de Estabilidad</b>	<b>41</b>
2.1 Introducción . . . . .	41
2.2 Escenarios para el análisis y el diseño . . . . .	42
2.3 Proceso y modelo AP en el caso ideal . . . . .	44
2.3.1 Ejemplo de proceso sin retardos puros . . . . .	45
2.3.2 Ejemplo de proceso con retardos puros . . . . .	48
2.4 Descripción general en el caso real . . . . .	51
2.4.1 Descripción del proceso . . . . .	51
2.4.2 Descripción de las dos funciones del modelo AP . . . . .	54
2.5 Objetivos de control . . . . .	56
2.6 Diseño desde una perspectiva de estabilidad . . . . .	58
2.7 Condiciones de estabilidad . . . . .	60
2.8 Del conocimiento conceptual al aprendizaje profundo . . . . .	64
<b>El Ejercicios de la Unidad Didáctica I</b>	<b>67</b>
<b>UNIDAD DIDÁCTICA II</b>	
<b>Diseño del Bloque Conductor: Estrategias Básica y Extendida de Control Predictivo</b>	<b>79</b>
<b>3 Estrategia Básica de Control Predictivo</b>	<b>83</b>
3.1 Introducción . . . . .	83
3.2 Estrategia básica de control predictivo . . . . .	84
3.3 El concepto clásico de modelo de referencia . . . . .	85
3.4 El nuevo concepto de bloque conductor . . . . .	86
3.5 El concepto de trayectoria deseada proyectada . . . . .	89
3.6 Ejemplo de aplicación de la estrategia básica . . . . .	91
3.7 El concepto de trayectoria deseada conductora . . . . .	95
3.8 Necesidad de extensión de la estrategia básica . . . . .	95
<b>4 Estrategia Extendida de Control Predictivo</b>	<b>103</b>
4.1 Introducción . . . . .	103
4.2 Estrategia extendida de control predictivo . . . . .	104
4.2.1 La estrategia extendida . . . . .	104
4.2.2 Predicción extendida . . . . .	107

4.2.3 Criterio de rendimiento, trayectoria deseada proyectada y acción de control . . . . .	108
4.3 Minimización de la función de coste y ley de control . . . . .	110
4.4 Una solución particular . . . . .	114
4.5 Ejemplo ilustrativo y análisis de robustez . . . . .	116
4.5.1 Análisis teórico: funciones de transferencia . . . . .	116
4.5.2 Análisis teórico: estabilidad y robustez . . . . .	120
4.5.3 Ejemplo ilustrativo 1 . . . . .	123
4.5.4 Ejemplo ilustrativo 2 . . . . .	129
4.6 Conclusiones . . . . .	132
<b>EII Ejercicios de la Unidad Didáctica II</b>	<b>135</b>
<b>UNIDAD DIDÁCTICA III</b>	
<b>Diseño del Mecanismo de Adaptación: Síntesis del Sistema Adaptativo</b>	<b>153</b>
<b>5 Análisis y Síntesis del Sistema Adaptativo en el Caso Ideal</b>	<b>157</b>
5.1 Introducción . . . . .	157
5.1.1 Necesidad de control adaptativo y primeros desarrollos . . . . .	157
5.1.2 El control predictivo y la perspectiva de estabilidad . . . . .	158
5.1.3 Contenidos de este capítulo . . . . .	160
5.2 Una estrategia para la solución del problema de síntesis . . . . .	160
5.3 Ejemplo de síntesis del sistema adaptativo . . . . .	162
5.4 Errores de estimación a priori y a posteriori . . . . .	164
5.5 Una expresión general para el mecanismo de adaptación . . . . .	165
5.6 Convergencia de los parámetros del modelo AP . . . . .	166
5.7 Análisis de los resultados . . . . .	167
5.7.1 Análisis de estabilidad . . . . .	167
5.7.2 Identificación con vistas al control . . . . .	168
<b>6 Análisis y Síntesis del Sistema Adaptativo en el Caso Real</b>	<b>171</b>
6.1 Introducción . . . . .	171
6.2 Caso real sin diferencia de estructuras . . . . .	172
6.2.1 Estrategia para la solución . . . . .	172
6.2.2 Ejemplo de solución al problema de síntesis . . . . .	175
6.2.3 Propiedades del sistema adaptativo . . . . .	178

6.2.4	Análisis de los resultados . . . . .	180
6.3	Caso real con diferencia de estructuras . . . . .	181
6.3.1	Estrategia para la solución . . . . .	181
6.3.2	Definición del sistema normalizado . . . . .	183
6.3.3	Síntesis del mecanismo de adaptación . . . . .	185
6.3.4	Propiedades del sistema adaptativo . . . . .	188
6.3.5	Análisis de los resultados . . . . .	190
6.4	Caso real con parámetros variables en el tiempo . . . . .	191
6.4.1	Naturaleza del problema y estrategia para la solución . . . . .	191
6.4.2	Definición del sistema adaptativo . . . . .	193
6.4.3	Verificación de la condición de convergencia . . . . .	194
6.4.4	Análisis de los resultados . . . . .	195
6.5	Conclusiones . . . . .	196

### **EIII Ejercicios de la Unidad Didáctica III 199**

## **UNIDAD DIDÁCTICA IV**

### **Teoría de Estabilidad del Control Predictivo y Adaptativo Predictivo 209**

<b>7</b>	<b>Teoría de Estabilidad 213</b>
7.1	Introducción . . . . . 213
7.2	Propiedades de entrada/salida asociadas a la naturaleza de estabilidad del proceso . . . . . 215
7.2.1	Definiciones . . . . . 215
7.2.2	Propiedades . . . . . 217
7.3	Realizabilidad física de la trayectoria deseada . . . . . 220
7.4	Una condición de estabilidad para procesos de naturaleza lineal y con inverso estable . . . . . 221
7.5	Estabilidad para el control predictivo de procesos de naturaleza lineal y con inverso estable . . . . . 223
7.5.1	Resultados de estabilidad . . . . . 224
7.5.2	Análisis de los resultados . . . . . 226
7.6	Estabilidad para el control adaptativo predictivo de procesos de naturaleza lineal y con inverso estable . . . . . 227
7.6.1	El papel de la adaptación en la estabilidad . . . . . 227
7.6.2	Condición general de estabilidad . . . . . 229

7.6.3	Caso ideal . . . . .	231
7.6.4	Caso real sin diferencia de estructura . . . . .	233
7.6.5	Caso real con diferencia en la estructura . . . . .	234
7.6.6	Caso real con parámetros variables con el tiempo . . . . .	236
7.7	Resultados de estabilidad para procesos de naturaleza lineal y estable . . . . .	238
7.7.1	Una condición general de estabilidad . . . . .	238
7.7.2	Control predictivo . . . . .	239
7.7.3	Control adaptativo predictivo . . . . .	241
7.8	Procesos inestables y con inverso inestable . . . . .	243
7.8.1	Una condición general de estabilidad . . . . .	243
7.8.2	Control predictivo . . . . .	244
7.8.3	Control adaptativo predictivo . . . . .	245
7.9	Conclusiones . . . . .	246

### **EIV Ejercicios de la Unidad Didáctica IV 249**

## **UNIDAD DIDÁCTICA V**

### **Aplicaciones de Control Predictivo y Adaptativo Predictivo 263**

<b>8</b>	<b>Control multivariable de una columna de destilación 267</b>
8.1	Introducción . . . . . 267
8.2	Aspectos prácticos en la aplicación de control adaptativo predictivo . . . . . 268
8.2.1	Formulación matemática . . . . . 268
8.2.2	Aspectos prácticos en la aplicación . . . . . 270
8.3	Equipo experimental . . . . . 275
8.4	Control AP: Secuencia de operaciones y parámetros de diseño 278
8.4.1	Control monovariable de la composición en la cabeza . . . . . 278
8.4.2	Control monovariable de la composición en la base . . . . . 281
8.4.3	Control multivariable . . . . . 282
8.5	Resultados experimentales y análisis . . . . . 283
8.5.1	Características de la planta . . . . . 283
8.5.2	Simplicidad de la estrategia de control adaptativo predictivo . . . . . 286
8.5.3	Rendimiento de la estrategia de control adaptativo predictivo . . . . . 291

8.6	Conclusiones . . . . .	297
<b>9</b>	<b>Control de una planta de blanqueo en una factoría de pulpa</b>	<b>299</b>
9.1	Introducción . . . . .	299
9.2	El problema de control de una planta de blanqueo . . . . .	300
9.3	Estrategia extendida de control predictivo . . . . .	302
9.4	Implementación del control AP . . . . .	305
9.4.1	Estructura de la implementación . . . . .	305
9.4.2	Características del diseño . . . . .	306
9.5	Resultados experimentales y discusión . . . . .	307
9.5.1	Rendimiento en regulación y en seguimiento . . . . .	309
9.5.2	Compensación de la naturaleza inestable del inverso del proceso identificado y de los retardos . . . . .	311
9.5.3	Robustez frente a fallos en la transmisión de datos . . . . .	314
9.5.4	Simplicidad en el arranque y en la operación . . . . .	315
9.6	Conclusiones . . . . .	316
<b>10</b>	<b>Control activo de estructuras flexibles</b>	<b>319</b>
10.1	Introducción . . . . .	319
10.2	Estructura experimental . . . . .	320
10.2.1	Descripción . . . . .	320
10.2.2	Fuerzas de control y modelo dinámico . . . . .	322
10.2.3	Modelo de estado y problema de control . . . . .	326
10.3	Aplicación de control predictivo . . . . .	327
10.3.1	Modelo predictivo . . . . .	328
10.3.2	Ley de control . . . . .	328
10.4	Resultados experimentales y análisis . . . . .	329
10.4.1	Estructura de tres pisos . . . . .	329
10.4.2	Estructura con seis pisos . . . . .	335
10.5	Conclusiones . . . . .	338

## UNIDAD DIDÁCTICA VI

### Materialización tecnológica del Control Adaptativo Predictivo Experto 339

11	Una plataforma software para la aplicación de control adaptativo predictivo experto	343
----	---	-----

11.1	De la formulación matemática a la aplicación genérica . . . . .	343
11.2	Estructura software de ADEX COP . . . . .	346
11.3	Integración con el sistema host . . . . .	348
11.3.1	Integración en la lógica de control . . . . .	348
11.3.2	Implementación de los controladores ADEX multivariables	351
11.3.3	Interfaz de los controladores ADEX . . . . .	352
11.4	Variables de estructura en los dominios AP . . . . .	355
11.4.1	Consideraciones generales . . . . .	355
11.4.2	Proceso . . . . .	358
11.4.3	Bloque de control . . . . .	360
11.4.4	Mecanismo de adaptación . . . . .	363
11.4.5	Bloque conductor . . . . .	368
11.5	Variables de estructura en los dominios expertos . . . . .	372
11.5.1	Consideraciones generales . . . . .	372
11.5.2	Proceso . . . . .	373
11.5.3	Bloque de control . . . . .	373
11.6	Conclusiones . . . . .	374
<b>12</b>	<b>Aplicación de ADEX COP al proceso biológico de una estación depuradora de aguas residuales</b>	<b>377</b>
12.1	Introducción . . . . .	377
12.2	Proceso de depuración biológica y problemática de control . . . . .	378
12.3	Objetivos, controladores y estrategia de control y optimización	381
12.3.1	Objetivos y controladores ADEX . . . . .	381
12.3.2	Estrategia de control y optimización . . . . .	382
12.4	Configuración de los controladores ADEX . . . . .	384
12.4.1	Definición del conjunto de controladores y comunicación con el sistema host . . . . .	384
12.4.2	Configuración de las variables de estructura del controlador de presión . . . . .	388
12.4.3	Configuración de las variables de estructura de los controladores de oxígeno en los dominios AP . . . . .	393
12.4.4	Configuración de las variables de estructura de los controladores de oxígeno en los dominios expertos . . . . .	399
12.5	Resultados obtenidos . . . . .	401
12.6	Análisis de los resultados . . . . .	411
12.6.1	Rendimiento del sistema de control previo . . . . .	411

12.6.2	Control de la presión de aire . . . . .	417
12.6.3	Control de oxígeno en las balsas . . . . .	420
12.6.4	Verificación de la estrategia de control y optimización . . . . .	421
12.7	Conclusiones . . . . .	422
<b>CONCLUSIONES: del Control a la Optimización</b>		<b>423</b>
<b>APÉNDICES</b>		<b>431</b>
<b>A Algunos Conceptos Básicos de Análisis de Sistemas</b>		<b>433</b>
A.1	Introducción . . . . .	433
A.2	Modelos lineales entrada/salida . . . . .	434
A.2.1	Ecuaciones diferenciales y funciones de transferencia . . . . .	434
A.2.2	Ecuaciones en diferencias y funciones de transferencia en la variable z . . . . .	435
A.2.3	Estabilidad, polos y ceros . . . . .	436
A.2.4	Respuesta temporal . . . . .	438
A.2.5	Discretización de modelos de tiempo continuo . . . . .	439
A.3	Modelos de estado . . . . .	441
A.3.1	Concepto de estado y ecuaciones de estado . . . . .	441
A.3.2	Estabilidad: definiciones . . . . .	442
A.3.3	Estabilidad: criterios para sistemas lineales . . . . .	444
A.3.4	Discretización de ecuaciones de estado de tiempo continuo . . . . .	445
<b>B Otros Modelos Predictivos y Funciones de Coste</b>		<b>447</b>
B.1	Introducción . . . . .	447
B.2	Modelos en ecuaciones en diferencias . . . . .	447
B.2.1	El caso multivariable . . . . .	448
B.2.2	Modelo con perturbaciones . . . . .	449
B.2.3	Ventajas de una formulación incremental . . . . .	450
B.3	Modelos de respuesta a impulsos y escalones . . . . .	455
B.4	Modelos de estado . . . . .	458
B.4.1	Minimización de la función de coste . . . . .	459
B.4.2	Solución particular . . . . .	462
<b>C Propiedades Entrada/Salida de Procesos Lineales Estables</b>		<b>465</b>
C.1	Introducción . . . . .	465

C.2	Procesos monovariantes sin retardo . . . . .	465
C.3	Procesos monovariantes con retardo . . . . .	473
C.4	Procesos multivariantes . . . . .	474
<b>D ADEX COP: Manual de Usuario. Edición Avanzada</b>		<b>475</b>
D.1	Introducción . . . . .	475
D.2	Metodología ADEX . . . . .	476
D.2.1	Principios metodológicos . . . . .	476
D.2.2	Optimización ADEX . . . . .	478
D.2.3	Una implementación práctica de controladores ADEX en el caso multivariable . . . . .	479
D.3	Interfaz ADEX COP / LOC del Host . . . . .	480
D.4	Definición del conjunto de controladores . . . . .	483
D.4.1	Login y definición de controladores . . . . .	483
D.4.2	Estado de los controladores . . . . .	485
D.4.3	Menú de la ventana CSD . . . . .	486
D.5	Configuración de un controlador . . . . .	488
D.5.1	Conceptos básicos . . . . .	488
D.5.2	Ventana de configuración de un controlador ADEX . . . . .	489
D.5.3	Menú de la ventana de configuración de un controlador . . . . .	492
D.6	Configuración de los dominios AP . . . . .	494
D.6.1	Proceso . . . . .	494
D.6.2	Bloque de control . . . . .	495
D.6.3	Mecanismo adaptativo . . . . .	498
D.6.4	Bloque experto . . . . .	502
D.6.5	Bloque conductor . . . . .	504
D.6.6	El operador ADEX . . . . .	505
D.6.7	Configuración de otros dominios AP . . . . .	509
D.7	Configuración de los dominios expertos . . . . .	509
D.8	Configuración general de controladores ADEX . . . . .	513
D.9	Dominios actual y de configuración . . . . .	514
<b>REFERENCIAS</b>		<b>515</b>

# Prólogo

---

## Alcance

Los controladores PID, caracterizados por generar la señal de control reaccionando al error ya producido entre la salida medida y el objetivo de control, iniciaron la era de la automatización industrial. Desde entonces y hasta hoy, han venido siendo el estándar del control industrial. Sin embargo, la necesidad existente de mejorar la efectividad del control y de introducir las ventajas de la automatización en procesos cada vez más complejos y exigentes, motivó un gran esfuerzo de investigación y desarrollo que se ha venido prolongando de manera creciente en las cuatro últimas décadas. Diferentes conceptos, métodos y herramientas han ido apareciendo con el tiempo en el contexto de este esfuerzo. Uno de estos métodos es el denominado *control adaptativo predictivo*, que hoy en día está considerado como una herramienta conceptual y práctica capaz de afrontar los problemas presentes en el control industrial, tanto por la estabilidad y precisión del control que proporciona como por su fácil utilización.

En este libro se recogen resultados de más de tres décadas de investigación, aplicación industrial y docencia en el área del control adaptativo predictivo (AP) de procesos. En estos años, el control AP ha demostrado en numerosas aplicaciones industriales su excelente rendimiento bajo condiciones normales de operación del proceso, cuando el comportamiento del mismo responde a una relación causa-efecto entre sus variables de entrada y salida. Sin embargo y como es lógico, también ha evidenciado su falta de robustez en condiciones de operación cuando dicha relación causa-efecto deja de existir o no puede representarse mediante un modelo. Con el objetivo de superar los mencionados problemas de robustez, se ha desarrollado

recientemente una nueva metodología que integra el control AP con los principios básicos del control experto basado en reglas de operación. Esta metodología se denomina *control adaptativo predictivo experto*, abreviadamente ADEX<sup>1</sup>.

Esencialmente, ADEX combina el control AP con el control experto definiendo dominios de operación para cada uno de ellos en una estructura de control integrada. La propia evolución de las variables del proceso determina cuándo se aplica control AP o control experto al proceso, de acuerdo con el correspondiente dominio de operación. De esta forma, el operador puede definir, en el rango de variación de la variable o variables bajo control, diversos dominios de control AP y diversos dominios de control experto para un mismo controlador ADEX. Asimismo, puede configurar cada tipo de control en cada dominio teniendo en cuenta el conocimiento previo de la dinámica del proceso y de los objetivos de control. Ello permite que el controlador ADEX utilice ventajosamente dichos conocimientos a lo largo de su operación con la consiguiente mejora en el rendimiento del sistema de control. Los desarrollos previos de control AP son parte esencial de la solución ADEX, pero los principios del control experto introducidos y la configuración por dominios, como la experiencia en la aplicación ha puesto de relieve, han permitido validar el robusto y satisfactorio rendimiento de los controladores ADEX en entornos industriales.

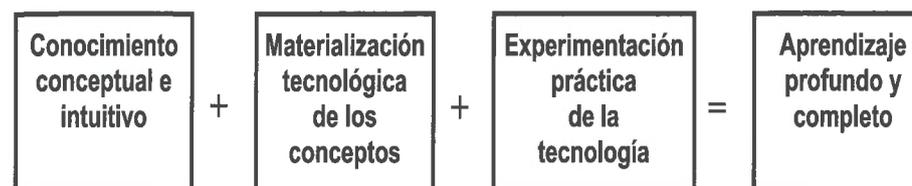
Este libro presenta de forma gradual y didáctica (ésta es la intención) la metodología de control ADEX, así como el diseño de una plataforma software denominada ADEX COP (acrónimo de *Control & Optimization Platform*), que permite la aplicación de esta metodología integrando los controladores ADEX en los sistemas de control (PLC y DCS) actualmente en el mercado. Esta aplicación se ilustra en el libro mediante el control de un proceso real de dinámica compleja, variable con el tiempo y sometido a perturbaciones medibles y no medibles.

Para responder a sus objetivos y ser en la medida de lo posible autónomo en sus contenidos, este libro recoge en buena parte los contenidos de los dos libros que le han precedido en control AP por los mismos autores. Pero en este caso la exposición ha tenido en cuenta el enfoque pedagógico que consideraremos a continuación.

<sup>1</sup>ADEX es una marca registrada de Adaptive Predictive Expert Systems ADEX, S.L.

## Enfoque didáctico

La base del enfoque que hemos adoptado en este libro para la exposición de sus diferentes contenidos puede resumirse en la siguiente "ecuación conceptual para el aprendizaje tecnológico":



De acuerdo con este esquema, el aprendizaje profundo y completo de cualquier tecnología resulta de la suma ordenada de los tres primeros términos de la ecuación, cuyo significado exponemos a continuación:

1. **Conocimiento conceptual e intuitivo:** Debe suministrarse al alumno una sólida explicación conceptual de cada uno de los temas de la tecnología, con rigor en la exposición y en las hipótesis, mostrando asimismo cómo tales conceptos reciben el beneplácito de la intuición. En nuestra opinión, esta doble componente conceptual e intuitiva es la llave que abre el paso a la comprensión verdadera de las cosas y, extrapolando, determina el progreso en cualquier disciplina, en particular en un área tecnológica como el control automático objeto de este libro. Nuestra aspiración es que el lector (alumno) aprenda que los avances tecnológicos residen en los nuevos conceptos y que la matemática es una herramienta que utilizamos para materializar dichos avances de forma rigurosa y práctica, pero no es, siendo herramienta, la promotora de los mismos. A este respecto es muy ilustrativa la evolución histórica en el área tecnológica del control de procesos.
2. **Materialización tecnológica de los conceptos:** El segundo sumando del aprendizaje consiste en transmitir el conocimiento de cómo tales conceptos pueden usarse de forma cualitativa y cuantitativa en la práctica. Esto ocurre en general mediante la utilización de la herramienta de las matemáticas, que convierte los conceptos en

el lenguaje pragmático de la tecnología. En esta materialización tecnológica de los conceptos podemos distinguir dos estadios. El primero lleva a la definición de la metodología de aplicación, y el segundo conduce a la ilustración de la aplicación práctica de dicha metodología.

3. **Experimentación práctica de la tecnología:** El tercer sumando del aprendizaje es la aplicación práctica y la experimentación de la tecnología por parte del alumno. Si el primer sumando lleva a la comprensión y el segundo al entendimiento, este tercero lleva al alumno a la fase del aprendizaje profundo y completo. Afortunadamente, el nivel de los medios tecnológicos a nuestro alcance hoy en día nos permite en muchos casos la utilización de escenarios de simulación para alcanzar el resultado pedagógico deseado, en particular en el caso de la materia tratada en este libro.

Desde la perspectiva didáctica que define la ecuación anterior, el aprendizaje profundo y completo está compuesto de tres niveles o capas:

- I. El primer nivel conceptual e intuitivo responde a un conocimiento de tipo universal que se enmarca en una dialéctica entre conceptos científicos y tecnológicos. Por lo tanto, este nivel tiene la capacidad de tender los puentes necesarios con otros conceptos tecnológicos para permitir la comunicación requerida por el trabajo en equipo.
- II. El segundo nivel de materialización tecnológica representa el conocimiento especializado en una cierta área de la tecnología.
- III. El tercer nivel de aplicación práctica representa la experimentación del conocimiento tecnológico especializado y, en consecuencia, completa el dominio del ingeniero sobre la especialidad tecnológica en cuestión.

Aparentemente, el conocimiento profundo del tercer nivel requiere el conocimiento profundo del segundo nivel, y el del segundo nivel necesita el del primero. Sin embargo, el desarrollo de un producto estándar que sirva para la aplicación sistemática y generalizada de una tecnología, cuando ésta ha adquirido ya la suficiente madurez, debe de hacer transparente el segundo nivel de conocimiento para el usuario y tender un puente directo entre el tercer nivel y el primero. De esta forma, se llega a un producto tecnológico que un usuario puede aplicar con todo el rigor pero basado

únicamente en los conceptos y de forma que éstos se materialicen a través del producto. Evidentemente, la materialización del producto tecnológico se encuadra en el segundo sumando de la ecuación anterior, pero debemos considerar en dicha materialización una componente muy importante de diseño. Es esta componente de diseño la que aproxima en la medida de lo posible la aplicación del producto a la directa plasmación de los conceptos básicos e intuitivos de la tecnología.

Al evidenciar los tres niveles de aprendizaje tecnológico y su interacción, pensamos que este enfoque didáctico puede dar respuesta en forma realista a los objetivos docentes de proporcionar al alumno, además de un conocimiento especializado, un conocimiento más universal, que le capacitará doblemente para el trabajo en equipo y, asimismo, para el proceso de educación permanente que seguirá a la finalización de su carrera universitaria y a lo largo de su vida profesional.

De acuerdo con el enfoque pedagógico que se deriva de la ecuación para el aprendizaje tecnológico y los principios básicos de la educación a distancia utilizados en la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), hemos definido los contenidos de este libro de la forma que describimos a continuación.

## Contenidos

Los contenidos de este libro se desarrollan en seis Unidades Didácticas, divididas a su vez en Capítulos, que pasamos a considerar a continuación.

### Unidad Didáctica I.- Introducción y Fundamentos de los Sistemas de Control Adaptativo Predictivo Experto

Esta Unidad Didáctica consta de dos capítulos y se centra en la exposición del nivel de conocimiento conceptual e intuitivo de la tecnología objeto del libro.

El primer capítulo, "*Introducción al Control Adaptativo Predictivo Experto*", presenta al alumno, desde la perspectiva de la evolución tecnológica en el control de procesos, los conceptos de modelización en tiempo discreto, control predictivo y bloque conductor, sistema adaptativo, modelo adap-

tativo y mecanismo de adaptación, control adaptativo predictivo y control adaptativo predictivo experto (ADEX). Así se completa un primer nivel de conocimiento tecnológico en el que el control AP se deriva de la simple adición de un controlador predictivo y un sistema adaptativo, mientras que ADEX integra el control AP con los principios básicos del control experto.

El segundo capítulo, "*Escenarios, Notaciones y Condiciones de Estabilidad*", introduce notaciones para formalizar matemáticamente los conceptos anteriores en los escenarios donde pueden ser objeto de aplicación. Además en el capítulo se obtienen condiciones de estabilidad para los sistemas en cuestión, que deben de ser satisfechas para alcanzar el rendimiento deseado en su operación. Estas condiciones son el punto de partida para la materialización tecnológica de los conceptos que se aborda en las siguientes unidades didácticas.

Esta Unidad Didáctica se completa con ejercicios de programación. Estos ejercicios permitirán al alumno observar la relación entre los parámetros de las ecuaciones que representan el proceso y su naturaleza de estabilidad y, en consecuencia, su comportamiento dinámico. Asimismo estos ejercicios ilustran cómo dichos parámetros dependen de ciertas variables importantes en los sistemas discretos, como es el caso del período de control.

#### Unidad Didáctica II.- Diseño del Bloque Conductor: Estrategias Básica y Extendida de Control Predictivo

Esta Unidad Didáctica consta de dos capítulos y lleva a cabo la materialización tecnológica del concepto de Control Predictivo definiendo matemáticamente la metodología de aplicación.

El primer capítulo, "*Estrategia Básica de Control Predictivo*", Capítulo 3 del libro, realiza el diseño del Controlador Predictivo a partir de la denominada Estrategia Básica, analiza el concepto de Bloque Conductor, introduce los conceptos de Salida Deseada Proyectada (SDP) y Salida Deseada Conductor (SDC), y pone de relieve las limitaciones de la estrategia en cuestión.

El siguiente capítulo, "*Estrategia Extendida de Control Predictivo*", Capítulo 4 del libro, introduce el concepto de Horizonte de Predicción, a partir del cual desarrolla la Estrategia Extendida de control predictivo. Esta estrategia se analiza por medio de diversos ejemplos que ilustran cómo

supera las limitaciones de la estrategia básica.

Esta Unidad Didáctica se completa con ejercicios de programación cuyo objeto es que el alumno experimente la aplicación del control predictivo a distintos procesos, utilizando tanto la estrategia básica como la extendida y en un entorno mono o multivariable.

#### Unidad Didáctica III.- Diseño del Mecanismo de Adaptación: Síntesis del Sistema Adaptativo

Esta Unidad Didáctica consta también de dos capítulos y lleva a cabo la materialización tecnológica de los conceptos de sistema adaptativo y mecanismo de adaptación en el contexto del control predictivo y en el estadio de definición de la metodología de aplicación.

El primer capítulo, "*Análisis y Síntesis del Sistema Adaptativo en el Caso Ideal*", Capítulo 5 del libro, deriva en el denominado Caso Ideal, que no considera ruidos ni perturbaciones actuando sobre el proceso, una expresión general del mecanismo de adaptación, a partir de una estrategia de síntesis para la verificación de las condiciones de estabilidad establecidas en la Unidad Didáctica I. El correspondiente análisis de convergencia lleva al concepto de "Identificación con Vistas al Control" de importante trascendencia en la aplicación práctica de control AP.

El segundo capítulo, "*Análisis y Síntesis del Sistema Adaptativo en el Caso Real*", Capítulo 6 del libro, extiende los conceptos desarrollados en el capítulo anterior en el denominado Caso Real, que considera en un primer escenario la presencia de ruidos y perturbaciones actuando sobre el proceso; en un segundo, la diferencia de estructuras entre las ecuaciones del proceso y del modelo; y en un tercero, la variación de los parámetros del proceso con el tiempo. La verificación de las condiciones de estabilidad, que se analiza en los distintos escenarios, requiere en última instancia la acotación de las salidas y entradas del proceso. Sin embargo, esta condición sólo puede ser garantizada por el control AP en su conjunto, como fundamento esencial de su estabilidad, que constituye el objeto de la siguiente unidad didáctica.

Esta Unidad Didáctica se completa con ejercicios de programación que ilustran la aplicación práctica de los conceptos de diseño objeto de la misma, poniendo de relieve la operación de los sistemas adaptativos que de ellos se derivan en distintos escenarios.

#### Unidad Didáctica IV.- Teoría de Estabilidad del Control Predictivo y Adaptativo Predictivo

Esta unidad didáctica consta de un único capítulo, Capítulo 7 del libro, que presenta los resultados formales de estabilidad para el control predictivo y adaptativo predictivo, cuando el controlador predictivo y el sistema adaptativo son respectivamente resultado de la materialización tecnológica de los conceptos realizada en las Unidades Didácticas II y III. Estos resultados se basan pues en las propiedades del controlador predictivo y del sistema adaptativo, pero también en la naturaleza de estabilidad del proceso. El análisis de estabilidad, que considera tanto el caso ideal como los diferentes escenarios del caso real, tiene en cuenta sucesivamente los tres tipos de procesos siguientes: a) procesos estables o inestables con inverso estable; b) procesos estables con inverso estable o inestable, y c) procesos inestables con inverso inestable; presentando y demostrando para cada uno de ellos los correspondientes resultados de estabilidad.

Esta Unidad Didáctica se completa con una serie de ejercicios en los que el alumno deberá realizar demostraciones o deducir condiciones de estabilidad y convergencia para sistemas de control predictivo, sistemas adaptativos y sistemas de control adaptativo predictivo. Para ello deberá utilizar los resultados de estabilidad presentados en esta Unidad Didáctica y en las anteriores.

#### Unidad Didáctica V.- Aplicaciones de Control Predictivo y Adaptativo Predictivo

En las unidades didácticas previas se alcanza el primer estadio de definición de las metodologías de aplicación, tanto para el control predictivo como para el adaptativo predictivo. En esta unidad didáctica, que consta de tres capítulos, se lleva a cabo la materialización tecnológica de los conceptos en su segundo estadio, es decir el de su aplicación práctica. Esta etapa pone de relieve aspectos en la implementación que son, en muchos casos, esenciales para alcanzar los resultados deseados y, en consecuencia, la adecuada sintonía entre teoría y práctica.

El primer capítulo, "*Control Multivariable de una Columna de Destilación*", Capítulo 8 del libro, pone especial énfasis en los aspectos prácticos

de la aplicación de control AP a procesos reales utilizando la estrategia básica de control predictivo. Estos aspectos prácticos se ilustran mediante la aplicación de la metodología al control mono y multivariable de una columna de destilación, ejemplo típico de las dificultades encontradas en la aplicación industrial de la moderna teoría de control. Este proyecto se llevó a cabo en 1976 en el Departamento de Ingeniería Química de la Universidad de Alberta en Canadá en el contexto de un programa de investigación y desarrollo financiado por la Fundación Juan March.

El segundo capítulo, "*Control de una Planta de Blanqueo en una Fábrica de Pulpa*", Capítulo 9 del libro, presenta e ilustra los aspectos prácticos de la primera aplicación de control AP a una unidad de producción industrial, en la que se utilizó la estrategia extendida de control predictivo. El proyecto, realizado en 1984 en la planta de blanqueo de la fábrica de pulpa de CANFOR Ltd. en Port Mellon, Columbia Británica, Canadá, fue resultado de una colaboración entre el Paper and Pulp Research Institute of Canada (PAPRICAN) y el Departamento de Ingeniería Química de la Universidad de Alberta, en el contexto de un programa de investigación financiado por el Natural Sciences and Engineering Research Council (NSERC) de Canadá.

El tercer capítulo, "*Control Activo de Estructuras Flexibles*", Capítulo 10 del libro, presenta y analiza los aspectos prácticos de la aplicación de control predictivo a modelos físicos experimentales de estructuras de edificios sometidas a excitaciones sísmicas, utilizando la estrategia extendida de control predictivo y la representación de estado en el modelo predictivo. Esta aplicación es representativa de otras similares en el área aerospacial, mecánica y de la ingeniería civil, donde la reducción de las vibraciones de estructuras flexibles sometidas a excitaciones dinámicas representa en años recientes una de las aplicaciones de mayor interés, por su problemática, para la teoría de control. Este proyecto realizado en 1986 en los laboratorios del National Center for Earthquake Engineering Research en Buffalo, Estados Unidos, fue una de las primeras aplicaciones de la teoría de control conocidas en este dominio.

#### Unidad Didáctica VI.- Materialización Tecnológica del Control Adaptativo Predictivo Experto

Esta última Unidad Didáctica consta de dos capítulos y presenta la materialización tecnológica del control adaptativo predictivo experto en la forma

de un producto software estándar, ADEX COP, que sirve para la aplicación sistemática y generalizada de esta tecnología a través de la integración de controladores ADEX en la lógica de los sistemas de control (PLC y DCS) actualmente en el mercado. Asimismo, describe y analiza la aplicación de ADEX COP a un proceso ilustrativo de las severas dificultades de control que pueden encontrarse en una aplicación industrial.

El primer capítulo, “Una Plataforma Software para la Aplicación de Control Adaptativo Predictivo Experto”, Capítulo 11 del libro, presenta el diseño de ADEX COP, que hace transparente para el usuario la materialización tecnológica de los conceptos de control adaptativo predictivo descrita en las Unidades Didácticas II a V. Esto permite que el usuario plasme los conceptos de la tecnología y realice directamente su aplicación práctica mediante la simple configuración de las denominadas variables de estructura.

El segundo capítulo, “Aplicación de ADEX COP al Proceso Biológico de una Estación Depuradora de Aguas Residuales”, Capítulo 12 y último del libro, describe y analiza la aplicación de ADEX COP al control y optimización del mencionado proceso biológico. Además ilustra la utilización de controladores ADEX para la definición de una estrategia de control y optimización, la comunicación entre ADEX COP y el sistema de control de la planta y la configuración de las variables de estructura de cada uno de dichos controladores, teniendo en cuenta las directrices expuestas en el Capítulo 11. Esta aplicación se llevó a cabo en 2001 en la E.D.A.R. de Casaquemada del Canal de Isabel II, en San Fernando de Henares, Madrid.

Esta Unidad Didáctica se completa con prácticas de control adaptativo predictivo experto de procesos simulados. Estas se realizan accediendo vía Internet al laboratorio virtual que el Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Control (DIEEC) de la E.T.S. de Ingenieros Industriales de la UNED tiene operativa a tal efecto.

## Apéndices

Además de las Unidades Didácticas, el libro contiene cuatro apéndices. El Apéndice A resume las principales herramientas básicas para la descripción de sistemas lineales que serán utilizadas a lo largo del libro. El Apéndice B extiende los resultados de la Unidad Didáctica II, Capítulo 4, desarrollando y analizando otras leyes de control predictivo utilizando diferentes formas

de modelos predictivos e índices de rendimiento. El Apéndice C demuestra que la propiedad de entrada/salida, que sirve para caracterizar los procesos de “naturaleza lineal y estable” y juega un importante papel en la teoría de estabilidad del control adaptativo predictivo, es verificada por la clase de procesos discretos, estables y lineales. Finalmente, el Apéndice D presenta el Manual de Usuario de ADEX COP, que describe con todo detalle la forma de utilización de esta plataforma software y complementa y sirve de referencia a la descripción del diseño de la misma presentada en la Unidad Didáctica VI, Capítulo 11.

## Experimentación práctica de la tecnología

De acuerdo con nuestro enfoque didáctico, los contenidos del libro deben completarse con la experimentación práctica de la tecnología para que el alumno alcance un aprendizaje profundo y completo de la misma. Con este fin, y como ya se ha indicado, al final de cada una de las tres primeras unidades didácticas se presenta una sección de ejercicios prácticos. En estos ejercicios, el alumno podrá, mediante programación, simular procesos y aplicar los conocimientos de la unidad didáctica en cuestión en diversos escenarios y utilizando diversas alternativas de diseño. La realización de estos ejercicios y el análisis de los resultados obtenidos permitirá al alumno adquirir un conocimiento experimental de la tecnología que le aproximará al conocimiento de la aplicación industrial.

Alternativa y complementariamente, en el contexto de la Unidad Didáctica VI, el alumno podrá realizar, vía Internet, prácticas de control ADEX actuando sobre procesos simulados en diferentes escenarios de operación. Para ello deberá acceder al servidor del Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Control (DIEEC) de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la UNED. En este servidor encontrará las instrucciones para realizar las mencionadas prácticas, así como una guía propuesta para las mismas. El servidor en cuestión ha sido programado para instrumentar un laboratorio virtual para el control adaptativo predictivo experto de procesos simulados, con acceso remoto vía Internet utilizando una estructura cliente-servidor, donde el cliente puede ser cualquier tipo de navegador de Internet. Dicho laboratorio virtual permite simular experimentos de control parametrizando la dinámica del proceso simulado, las características de su entorno de operación, el tipo de controlador elegido

y las variables de estructura del mismo. El alumno dispone de una interfaz gráfica para iniciar las simulaciones, determinar e introducir modos y acciones de control, y cambiar en cualquier instante de tiempo virtual de la simulación las condiciones en las que se desarrolla el experimento de control. Asimismo el alumno puede recuperar en forma gráfica los resultados de los experimentos realizados. En este contexto, el alumno puede, sin necesidad de programar, experimentar la aplicación práctica de la tecnología en diversos escenarios y condiciones que pueden ser similares o más severas que las de una aplicación industrial.

## A quién va dirigido el libro

El libro va dirigido a estudiantes de carrera y de doctorado, de ciencias e ingenierías, universitarios, profesionales de la ingeniería e investigadores, que estén interesados en el área del control automático y, particularmente, en sus metodologías avanzadas. Manteniendo el rigor científico y desde el enfoque didáctico utilizado en este libro, hemos intentado evitar la complejidad de libros dedicados estrictamente a la teoría de control con el propósito de hacer sus contenidos interesantes y comprensibles para un amplio espectro de lectores potenciales, desde aquéllos más motivados por la teoría hasta aquéllos orientados más directamente hacia la aplicación práctica.

## Agradecimientos

Este libro compendia los resultados de los trabajos de investigación y desarrollo realizados durante más de tres décadas por los autores y sus colaboradores. Estos colaboradores merecen en primer lugar nuestro reconocimiento por su ayuda y contribución a este libro. Así pues, queremos expresar nuestra gratitud a los profesores Sirish L. Shah y Grant Fisher del Departamento de Ingeniería Química de la Universidad de Alberta (Canadá), al profesor William Cluett de la Universidad de Toronto (Canadá), al profesor Guy Dumont de la Universidad de la Columbia Británica y del Paper and Pulp Research Institute of Canada (PAPRICAN) y a los profesores Tsu T. Soong y Andrei Reinhorn del National Center for Earthquake Engineering Research de la Universidad del estado de Nueva York en Buffalo, EE.UU.

Nuestra gratitud es también para Manuel García Gil de Bernabé quien, siendo Presidente del Instituto de la Ingeniería de España, decidió en 1985 fundar la compañía SCAP Europa, S.A., y para Zosimo García Martín, también socio fundador de esta compañía. SCAP Europa llevó a cabo más de cien aplicaciones industriales de control adaptativo predictivo desde 1986 hasta 1998, en un gran esfuerzo de investigación y desarrollo, por el cual estamos agradecidos a todos aquéllos que en él colaboraron.

Este libro no hubiera existido sin el desarrollo de la nueva metodología de control adaptativo predictivo experto ADEX y, especialmente, sin su materialización tecnológica en la plataforma software ADEX COP. Por ello que nuestro agradecimiento más reciente e inmediato debe ser para los fundadores de la empresa Adaptive Predictive Control Systems ADEX, S.L., creada para desarrollar esta tecnología y promover sus aplicaciones, y particularmente para Antonio Gómez Iniesta y José Javier Glaría Santamaría, a cuya creatividad y dedicación se debe el desarrollo de ADEX COP.

La escritura de este libro ha sido una actividad a tiempo parcial por parte de los autores, que han gozado durante la misma del apoyo y del entorno motivador del Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Control de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de la Universidad Nacional de Educación a Distancia y del Departamento de Matemática Aplicada III en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Cataluña.

Nuestro agradecimiento debe asimismo dirigirse a aquéllos que contribuyeron a los desarrollos teóricos que fueron el precedente y las bases de donde partió nuestro trabajo de investigación, particularmente al Profesor Ioan D. Landau y al Profesor Karl J. Aström, y a la comunidad investigadora en su conjunto, ya que sin ella cualquier avance es prácticamente imposible en nuestros días.

Finalmente, una vez más, debemos agradecer profundamente a nuestras respectivas esposas y familias la extraordinaria tolerancia y resuelto soporte durante la escritura de este libro.

Juan M. Martín Sánchez  
José Rodellar

Madrid – Barcelona, Enero de 2004

## Capítulo 1

# Introducción al Control Adaptativo Predictivo Experto

### 1.1 Introducción

Han pasado más de veinticinco años desde la publicación por la Fundación Juan March del primer libro dedicado a control adaptativo predictivo [Mar77a], donde se consideraban sus principios metodológicos básicos y las primeras aplicaciones prácticas realizadas en un programa de investigación y desarrollo financiado por dicha entidad [Mar76c]. Un segundo libro sobre control adaptativo predictivo [MR96], escrito por los autores del presente, fue publicado dieciocho años después. Este segundo libro ampliaba la metodología expuesta en el primero y recogía la experiencia acumulada en más de un centenar de aplicaciones industriales, en áreas tan diversas como la del cemento, la energía, la alimentación, la química, la aeroespacial, la climatización y el control bioclimático, entre otras.

En este tercer libro, escrito ocho años después del segundo, pensamos que la metodología alcanza su plena madurez. Constituye una ampliación del segundo libro que, sin desmentir ninguna de las premisas previas, las complementa metodológicamente, acomodando la solución propuesta todavía más a la realidad de los procesos continuos y, particularmente, a la

realidad de los procesos industriales.

Dentro de la Unidad Didáctica I, este Capítulo desarrolla los conceptos básicos, mientras que el segundo los formula definiendo las condiciones matemáticas que la materialización tecnológica de dichos conceptos deberá satisfacer para alcanzar los resultados deseados, en términos de estabilidad, robustez y precisión en las soluciones de control que se exponen en este libro.

## 1.2 Concepto de lazo de control en un proceso industrial

La naturaleza se presenta en forma de procesos con una lógica básica de causa-efecto. La historia de la ciencia es, en gran medida, la historia de los conocimientos de los procesos de la naturaleza, mientras que la historia de la tecnología concierne al uso y a la aplicación práctica de este conocimiento para la creación de otros procesos artificiales, capaces de producir bienes y servicios para la humanidad. Estos procesos productivos, a los que nos referiremos en este libro, pueden representarse mediante un esquema básico tal como el que se presenta en la Figura 1.1.

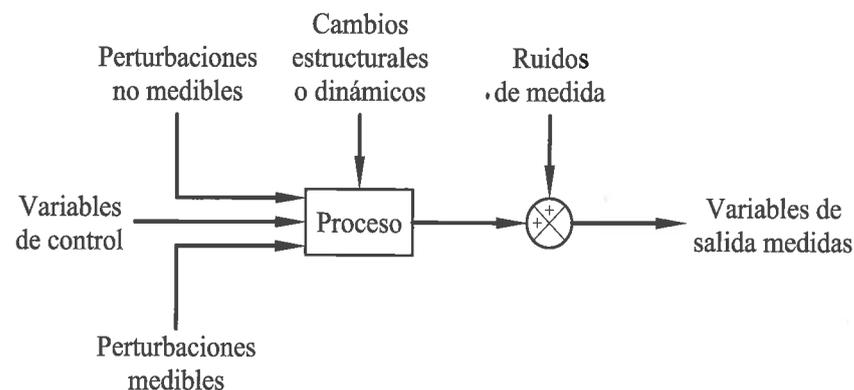


Figura 1.1: Representación básica de un proceso.

Los procesos evolucionan con el tiempo de acuerdo con su propia dinámica, en general sujeta a cambios, y en respuesta a acciones externas. La reacción de los procesos está caracterizada por las denominadas variables de salida. Estas variables son generalmente medibles y están normalmente

afectadas por el denominado ruido de medida. Por otro lado, las acciones externas sobre el proceso están representadas por dos tipos de variables de entrada, definidas respectivamente como variables de control y perturbaciones. La diferencia esencial entre estos dos tipos es que sólo las primeras pueden ser manipuladas. Entre las perturbaciones podemos distinguir las que son medibles y las que no lo son.

Controlar un proceso significa generalmente manipular sus variables de control de forma continua, utilizando las medidas disponibles en tiempo real de las variables de salida del proceso y de las perturbaciones medibles, con el objetivo final de hacer que dichas variables de salida, o al menos un subconjunto de ellas, alcancen y se mantengan en sus valores deseados o de consigna. Si esta manipulación se lleva a cabo sin la participación de un operador humano, el control aplicado se denomina automático.

La Figura 1.2 representa los elementos básicos de un sistema de control automático en una configuración a la que se hace referencia como lazo cerrado de control. Las variables de salida y las perturbaciones medibles del proceso son medidas por sensores y utilizadas por un dispositivo, denominado controlador, para generar la señal o señales de control que, a través de un conjunto de actuadores, se convierten en las acciones de control que se aplican al proceso. El controlador está diseñado en base a una metodología de control, que determina cómo generar la mencionada señal o señales de control y, en resumen, cómo conducir el proceso verificando ciertas especificaciones. El concepto de lazo cerrado, definido de esta manera, incluye un carácter multivariable capaz de tomar en consideración las interacciones entre las distintas variables del proceso.

Como es sabido, el controlador puede materializarse con dispositivos analógicos o estar basado en un computador digital. En el primer caso, la acción de control es generada y puede cambiar de forma continua en tiempo real. En el segundo caso, la acción de control puede modificarse únicamente en instantes discretos de tiempo, el intervalo de tiempo entre los cuales es denominado periodo de control. El cálculo de la acción de control en estos últimos lo realiza un programa basado en la metodología de control elegida.

Durante las últimas décadas, el área de control de procesos ha mostrado una clara y progresiva preferencia por el uso de computadores, principalmente debido a la disponibilidad de potentes y rápidos microprocesadores de bajo coste, que introducen importantes ventajas sobre el hardware analógico. Entre dichas ventajas, quizás la más relevante es la posi-

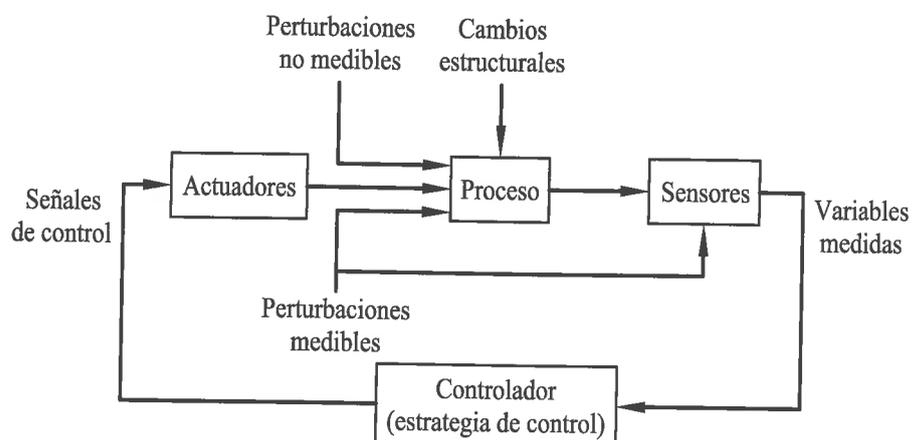


Figura 1.2: Representación de un lazo cerrado de control.

bilidad de implementar estrategias de control avanzado de manera relativamente sencilla. En las aplicaciones prácticas de control predictivo, adaptativo predictivo y adaptativo predictivo experto presentadas en este libro, consideraremos lazos de control similares al presentado en la Figura 1.2. Sin embargo, en general, la complejidad del proceso y la conveniencia de utilizar la metodología de control de manera sencilla, hace aconsejable dividir el proceso en subprocesos, a los que se les asignan diferentes lazos de control interrelacionados. Esta forma de utilizar la metodología será asimismo ilustrada en este libro.

### 1.3 Requisitos para una metodología avanzada de control industrial

La implementación de lazos de control obviamente requiere disponer de la tecnología adecuada para los sensores, actuadores y dispositivos que constituyen el sistema de control. Por otro lado, la metodología o sistema de control seleccionado debería ser capaz de resolver los problemas inherentes a la dinámica del proceso y su entorno, con el fin de conseguir un rendimiento satisfactorio en su operación.

Este rendimiento satisfactorio debería exigir de una metodología de control "ideal" la verificación de los siguientes requisitos:

- Garantizar la estabilidad y, particularmente, la robustez, como se explica en este apartado más adelante.
- Ser tan eficaz como sea posible, respondiendo al criterio de rendimiento deseado.
- Ser de aplicación sencilla y operar en tiempo real, utilizando computadores digitales.

Adicionalmente, estas propiedades deben de ser válidas para una amplia variedad de procesos y condiciones de operación con el fin de que la metodología en cuestión pueda ser considerada de "propósito general".

Estabilidad es una propiedad básica, esencial en la aplicación de un sistema de control automático. El sistema de control debe asegurar que la variable de salida alcanzará una banda alrededor del valor de consigna. Si debido a circunstancias tales como cambios en la dinámica del proceso o perturbaciones actuando sobre el proceso, la variable de salida del proceso se separa de la consigna, el sistema de control debe reconducirla de vuelta a la banda en cuestión, a través de la aplicación de una acción de control compatible con las restricciones físicas del proceso y sus actuadores.

Un sistema de control en tiempo discreto, es decir, un sistema de control desarrollado para ser aplicado mediante un computador digital, está generalmente basado en un modelo matemático del proceso bajo control, que puede incluir asimismo la dinámica de la instrumentación asociada, o sea, de los sensores y actuadores. En este contexto, el sistema de control puede ser formulado y probado sobre el mencionado modelo, utilizando el mismo como una representación ideal del proceso considerado. Un sistema de control se dice que es robusto si su rendimiento y, fundamentalmente, su estabilidad se mantienen cuando es aplicado al proceso real, a pesar de las diferencias que puedan existir entre el proceso y el modelo adoptado.

El problema de robustez es especialmente importante en el control de procesos industriales, donde la naturaleza dinámica del proceso es compleja, de carácter no lineal y varía con el tiempo durante su operación. Todo ello hace que los modelos lineales, generalmente utilizados en este contexto, sean solo aproximaciones del comportamiento del proceso bajo ciertas condiciones de operación.

El requerimiento de eficacia debe ser entendido en el sentido de que el sistema debe basarse o responder a un criterio de rendimiento con un

significado físico, tan intuitivo como sea posible, y capaz de garantizar la optimización en la operación del proceso.

La sencillez en la aplicación y en la operación es una propiedad importante para que una metodología sea práctica. La formulación matemática debe ser sencilla, y los parámetros de diseño deben de ser poco numerosos y con significado físico. La simplicidad matemática conlleva menor tiempo de cálculo, lo que es importante en sistemas de control en tiempo real, especialmente en procesos con dinámicas rápidas, donde el período de control debe de ser pequeño. Un número reducido y significativo de parámetros de diseño ayuda al operador durante el arranque y el posterior mantenimiento del sistema de control, soslayando la necesidad de un conocimiento profundo de la teoría en cuestión.

En el área industrial hay una amplia variedad de procesos con sus propias características dinámicas particulares [Shi88]. La dinámica de los procesos industriales tiene un carácter multivariable e interactivo, puede ser de ordenes muy diferentes y variar desde una naturaleza muy rápida (con constantes de tiempo del orden de milisegundos) a una muy lenta (del orden de minutos e incluso horas). Asimismo, en un lazo de control pueden existir no linealidades asociadas con el proceso mismo (los procesos tipo pH son un ejemplo típico) o con los actuadores (por ejemplo saturaciones, bandas muertas, etc.).

Otra característica frecuente es la presencia de retardos puros, especialmente en procesos que implican transporte de masa o energía. Dicho transporte introduce un tiempo de retardo entre la acción de control y su efecto en la variable de salida del proceso, que puede llevar a inestabilidad o falta de robustez si no se aplica la metodología de control apropiada, especialmente si el tiempo de retardo es desconocido o variable con el tiempo, como en muchos casos ocurre. Asimismo, pueden encontrarse procesos inestables, que el sistema de control tiene que estabilizar.

Adicionalmente, en muchos casos, los procesos tienen una naturaleza con inverso inestable, que será analizada más tarde en este libro. Este tipo de naturaleza constituye un problema adicional ya que, por ejemplo, un proceso de este tipo puede requerir una acción de control ilimitada (obviamente imposible de generar en la práctica) para conducir a través de una trayectoria predeterminada la variable de salida hasta su consigna.

En este contexto, una metodología de control que pretenda ser de

propósito general tiene que ser capaz de ser aplicable de igual forma a procesos que incluyen características tan diversas como las previamente descritas.

En un intento de resolver los problemas descritos en este apartado, diferentes soluciones metodológicas se han descrito en las últimas décadas. Obviamente, una evaluación objetiva de estas contribuciones a la teoría de control será difícil en el corto plazo. Sin embargo, la realidad de las aplicaciones industriales es un criterio objetivo en sí misma. De hecho, solo dos metodologías básicas han tenido realmente un impacto industrial significativo y perdurable: la metodología PID de realimentación negativa y la metodología de control predictivo. La primera introdujo, a mediados del siglo pasado, el control automático en el área industrial. La segunda representa un nuevo cauce en el que estos problemas pueden encontrar, como veremos en este libro, una solución adecuada.

#### 1.4 La metodología de realimentación negativa

La Figura 1.3 presenta el conocido esquema de los sistemas de control PID, basados en la metodología de realimentación negativa. La variable de salida bajo control es "realimentada" y restada de la consigna (valor deseado), con el fin de obtener una señal de error utilizada para generar la acción de control. La forma de generar la acción de control es extremadamente simple. El error es multiplicado por una constante para obtener una acción de control proporcional. Asimismo, la integración de dicho error y su multiplicación por otra constante puede producir una acción de control integral. Finalmente, basada en la derivada del error, puede generarse también una acción de control derivativa. La señal de control aplicada al proceso puede resultar de la suma de estas tres acciones de control, y el controlador correspondiente se denomina PID.

Como se ha mencionado previamente, la metodología de realimentación negativa inició la era tecnológica del control automático. Por primera vez, los procesos disponían de una solución de control automático, de carácter general, fácil de implementar y con resultados satisfactorios en muchos casos. Esta solución permitió, donde podía ser aplicada, una autocorrección de la operación del proceso, manteniendo la variable de salida alrededor de la consigna deseada.

La metodología de realimentación negativa, y más precisamente los controladores PID, fueron en su tiempo un importante avance, pasando a ser de utilización generalizada desde entonces hasta nuestros días. Su extrema simplicidad permitió su aplicación con las tecnologías por entonces disponibles, es decir, la tecnología neumática primero y, posteriormente, la tecnología electrónica analógica. Está fue ciertamente una razón fundamental para su introducción y su éxito.

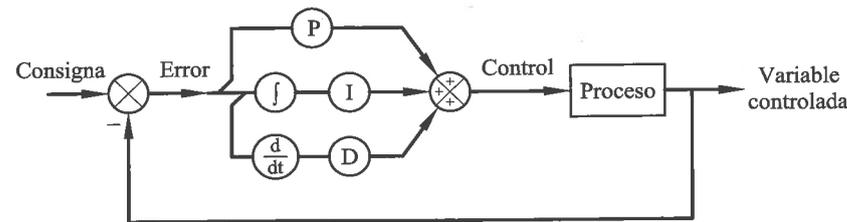


Figura 1.3: Esquema general de los sistemas de control PID.

Podemos ahora considerar que incluso si una teoría de control más avanzada, obviamente requiriendo una mayor sofisticación en los cálculos, hubiera sido desarrollada en los años cuarenta o cincuenta del siglo pasado, su aplicación práctica hubiera sido imposible, debido a las limitaciones de las tecnologías de soporte en la implementación disponibles en aquel tiempo.

Sin embargo, las restricciones de la metodología de realimentación negativa eran y son importantes. Particularmente, su aplicación implica, entre otros, un bien conocido problema de estabilidad, que vamos a considerar a continuación de una forma completamente conceptual e intuitiva. El análisis riguroso de este problema de estabilidad es un elemento fundamental en los libros de texto utilizados habitualmente en los cursos clásicos de control automático de las carreras técnicas [Oga70, Dor80, Kuo91].

La necesidad de control nace del hecho de que las variables que queremos controlar tienden a alejarse de sus puntos de operación deseados y, en general, oscilan. Estas oscilaciones de la variable de salida aparecen, debido a la estrategia de realimentación negativa, invertidas a nivel de la señal de error, lo que conlleva la problemática que se describe en los siguientes párrafos.

Si deseamos que el sistema de control reaccione con una respuesta rápida, es decir que genere una señal correctora de control significativa cuando se produce un cierto error, el controlador PID deberá producir

una señal de control que, en cierta forma, amplificará la señal de error y al mismo tiempo sus oscilaciones. La amplificación de estas oscilaciones a nivel de la señal de control puede causar su reproducción en la salida del proceso, lo que puede llevar al sistema de control al efecto indeseable del conocido fenómeno de resonancia. Para evitar acercarnos al fenómeno de resonancia, será deseable una respuesta más lenta, con el coste de una menor eficiencia de la deseada en la corrección de la señal de error.

Un ejemplo descriptivo puede ayudar a ilustrar las posibles consecuencias prácticas de este problema. Consideremos el caso de un proceso de climatización en un edificio de oficinas. La temperatura en una de sus habitaciones, por razones de ahorro energético, puede encontrarse a  $12^{\circ}\text{C}$  a las siete de la mañana. Esta temperatura deberá alcanzar un valor confortable hacia las ocho de la mañana cuando los empleados empiecen a llegar al edificio. Con este fin, si instalamos un sistema de control PID para la habitación, la consigna podría fijarse a  $20^{\circ}\text{C}$ . Este sistema de control debería ser de acción rápida en la corrección para evitar bajas temperaturas durante las horas de trabajo. En estas condiciones la acción de un controlador PID llevará en general a oscilaciones tales como las representadas por la curva 1 de la Figura 1.4. Estas oscilaciones alrededor del valor de consigna de  $20^{\circ}\text{C}$  producirán frecuentes e indeseables periodos de baja temperatura. La solución inmediata para evitar estos períodos de bajas temperaturas consiste en incrementar la consigna, por ejemplo hasta  $24^{\circ}\text{C}$ . Sin embargo, esto producirá sobrecalentamiento de la habitación, representado por la curva 2 de la Figura 1.4. Estos períodos de sobrecalentamiento, que pueden alcanzar temperaturas de hasta  $28^{\circ}\text{C}$ , tienen como resultado, en primer lugar, un gasto de energía excesivo. En segundo lugar, el calor en exceso dentro de la habitación resulta en una pérdida de humedad del aire y en consecuencia en una pérdida significativa del confort climático. Este problema es muy familiar en los grandes edificios de oficinas donde están instalados sistemas digitales PID para la climatización. Evidentemente, las oscilaciones se pueden reducir si se requiere una respuesta al error más lenta por parte del controlador PID. En este caso, la temperatura tenderá más lentamente a alcanzar su consigna, pero la apertura de una ventana, como se representa en la curva 3 de la Figura 1.4, podría ser suficiente para desviar la variable de su consigna, llevando a largos períodos de recuperación.

El problema de climatización es un claro ejemplo de las limitaciones de los sistemas basados en la metodología de realimentación negativa. Los

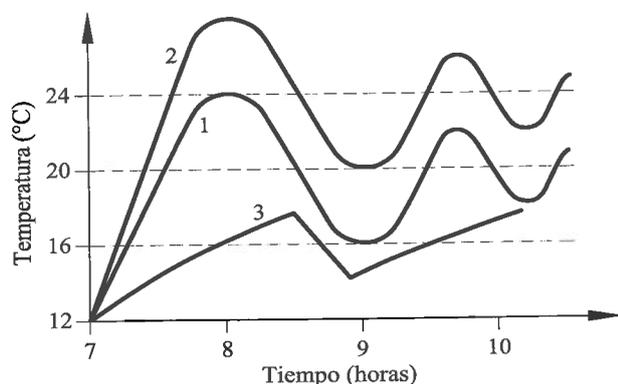


Figura 1.4: Ejemplo de climatización.

libros de texto en el área de control automático clásico señalan desde el principio que el mejor rendimiento alcanzable con control PID con realimentación negativa es generalmente un compromiso entre la rapidez de respuesta y el nivel de oscilaciones, reflejando de esta forma el inherente problema de estabilidad al que nos hemos referido.

## 1.5 Introducción de los ordenadores en el control de procesos

Las limitaciones de la metodología PID justificaron nuevos desarrollos en teoría de control, que empezaron a intensificarse hacia el final de los años cincuenta del siglo pasado. Estos desarrollos se basaron generalmente en teorías matemáticas que describían y actuaban sobre el proceso en tiempo continuo, es decir en el contexto de los sistemas analógicos, siendo la denominada Teoría de Control Óptimo la más representativa de estos desarrollos [AF66, BH69, Ros70, KS72, SW77]. Adicionalmente, la aplicación de estos desarrollos estaba limitada por la tecnología analógica existente que, por otra parte, era adecuada para la aplicación de los PID.

La introducción de los computadores digitales tenía forzosamente que representar una revolución en el área de control automático similar a la que había representado en otras áreas de la actividad humana. De hecho, representaban una herramienta para la implementación de nuevos desarrollos teóricos potencialmente capaces, a través de cálculos más complejos,

de generar una acción de control más eficaz que la obtenida con los controladores PID. En este contexto, la principal ventaja de dichos controladores, su simplicidad, perdía su relevancia.

Por una parte, teorías ya existentes fueron traducidas algorítmicamente a su formulación digital [RF58, AW84, FP90, Kuo92]. Por otra parte, los trabajos de investigación en tiempo continuo prosiguieron y nuevos desarrollos para sistemas en tiempo discreto fueron formulados [Lan74, Mon74, NV78]. Sin embargo estos desarrollos estaban generalmente basados en conceptos derivados en el contexto de los sistemas en tiempo continuo.

Este esfuerzo de investigación llevó a un extenso y complejo cuerpo de teoría de control, con potencial para ser implementado utilizando computadores que sin embargo demostró no ser capaz de satisfacer los requerimientos a esperar de una metodología avanzada de control industrial. En algunos casos, la complejidad de la teoría era excesiva, limitando su aplicabilidad práctica. En otros casos, las hipótesis necesarias para garantizar la estabilidad y la robustez no eran realistas. Finalmente, la simplicidad buscada en algunas soluciones limitaba o deterioraba su potencial rendimiento práctico [Foss73, LW76]. La característica común de todos estos desarrollos teóricos, como ya se ha indicado, era su origen en conceptos formulados en tiempo continuo y, en consecuencia, adecuados para ser aplicados utilizando tecnología analógica.

La modelización en tiempo discreto de los procesos introdujo por primera vez en teoría de control la posibilidad de predecir en tiempo real la evolución de las variables de salida del proceso. Esta capacidad era de extraordinaria importancia en teoría de filtrado y predicción [Kal60]. Más tarde, fue utilizada por la denominada estrategia de control de mínima variancia [Ast70], propuesta en el contexto de la teoría de control óptimo. Esta estrategia puede ser considerada como precursora de la metodología de control predictivo, en la que por primera vez se explotaron plenamente las posibilidades de predicción en tiempo real con propósitos de control.

Antes de definir formalmente el principio de control predictivo, introduciremos el concepto de modelo en tiempo discreto con un ejemplo sencillo e ilustraremos cómo, la utilización de este concepto con un computador digital, nos permitirá definir la relación matemática entre las variables de entrada y salida de un proceso y predecir la evolución de las variables de salida.

## 1.6 Concepto básico de modelo en tiempo discreto

Si se nos pregunta cuál será la temperatura dentro de 5 minutos en la habitación en la que estamos, la respuesta no es en principio obvia. Sin embargo, si medimos la temperatura de la habitación en el instante presente y resulta ser  $20^{\circ}\text{C}$ , podemos intuir que la temperatura dentro de 5 minutos no será superior a  $25^{\circ}\text{C}$ , ni inferior a  $15^{\circ}\text{C}$ , porque la temperatura de la habitación no puede cambiar tanto en 5 minutos. Admitido que la temperatura estará alrededor de  $20^{\circ}\text{C}$ , la siguiente cuestión a considerar es si la temperatura estará por encima o por debajo del valor actual. Si podemos informarnos de cuál era la temperatura hace 5 minutos y ésta era por ejemplo  $18^{\circ}\text{C}$ , no cabe duda de que la temperatura está tendiendo a aumentar y, si esta tendencia se mantiene tal cual, la temperatura de la habitación alcanzará los  $22^{\circ}\text{C}$  en 5 minutos. Esta extrapolación está representada en la Figura 1.5.

En la Figura 1.5, el instante presente se representa por 0 y la correspondiente temperatura es  $t(0)$ . La temperatura hace 5 minutos es  $t(-5)$ . Finalmente, la temperatura estimada para dentro de 5 minutos se denota por  $\hat{t}(+5)$ . De acuerdo con la extrapolación mostrada en la Figura 1.5, la temperatura  $\hat{t}(+5)$  es igual a la temperatura  $t(0)$  más el incremento de temperatura entre  $-5$  y 0. Esta relación puede ser expresada mediante la ecuación

$$\hat{t}(+5) = t(0) + t(0) - t(-5) = 2t(0) - t(-5). \quad (1.1)$$

No obstante, la hipótesis de una extrapolación tan directa y sencilla como ésta no parece ser completamente satisfactoria. Si deseamos una estimación más precisa, habrá que tener en cuenta otros factores que influyen asimismo en la temperatura. Por ejemplo, si la habitación está climatizada, la variación de temperatura dependerá del caudal de aire frío que entra en la habitación en el instante presente y de ese mismo caudal hace 5 minutos. Si hace 5 minutos el caudal de aire frío era de 5 l/min y en el instante presente el caudal es de 10 l/min, cabe esperar una reducción de la tendencia de la temperatura a crecer y, como consecuencia, la temperatura no alcanzará los  $22^{\circ}\text{C}$ , sino que probablemente estará alrededor de los  $21^{\circ}\text{C}$ , como se representa en la Figura 1.6.

En la Figura 1.6, el caudal de aire frío que entraba en la habitación hace 5 minutos se ha representado por  $q(-5)$  y el caudal entrando en el instante presente por  $q(0)$ . En resumen, la temperatura dentro de 5 minutos dependerá, entre otras pero fundamentalmente, de las variables  $t(0)$ ,  $t(-5)$ ,

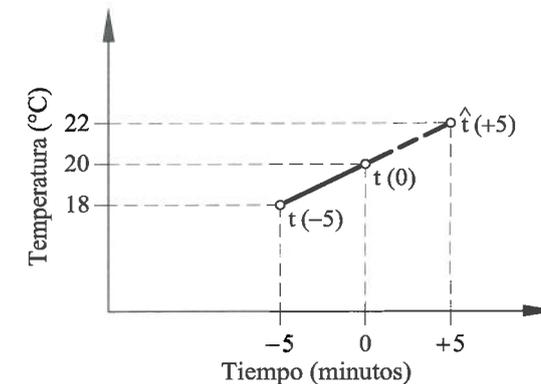


Figura 1.5: Concepto básico de modelo.

$q(0)$  y  $q(-5)$ . Asignando factores de peso a cada una de estas variables, con el fin de evaluar su influencia en la temperatura estimada, podemos estimar la temperatura en la forma siguiente:

$$\hat{t}(+5) = a_1 t(0) + a_2 t(-5) + b_1 q(0) + b_2 q(-5), \quad (1.2)$$

donde  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  y  $b_2$  son los factores de peso antes mencionados. Si estos parámetros están bien elegidos, la ecuación anterior, aunque no sea absolutamente exacta, nos dará una estimación razonablemente precisa de la temperatura dentro de 5 minutos. La experiencia práctica demuestra que, con el fin de maximizar la precisión de esta estimación, los valores de la temperatura  $t$  y del caudal  $q$  en la ecuación (1.2) deben elegirse como incrementos o desviaciones con referencia a valores de temperatura y caudal de una operación en equilibrio, es decir a un estado de operación donde dichos valores de referencia se mantienen constantes.

Este ejemplo sencillo ha sido útil para ilustrar el concepto de modelo en tiempo discreto. En efecto, la ecuación (1.2) describe la relación entre el caudal de aire frío y la temperatura de la habitación, que son en este caso, respectivamente, las variables de entrada y salida del proceso. Por tanto, esta ecuación es un modelo que describe el comportamiento del proceso en los instantes de tiempo consecutivos. Obviamente, este ejemplo sencillo admite generalizaciones, tales como las que consideraremos a continuación. En todas estas generalizaciones, es aconsejable elegir las variables del modelo como incrementos con respecto a valores de equilibrio.

En primer lugar, de forma más general, podemos representar el instante presente mediante un número entero  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Este número indica

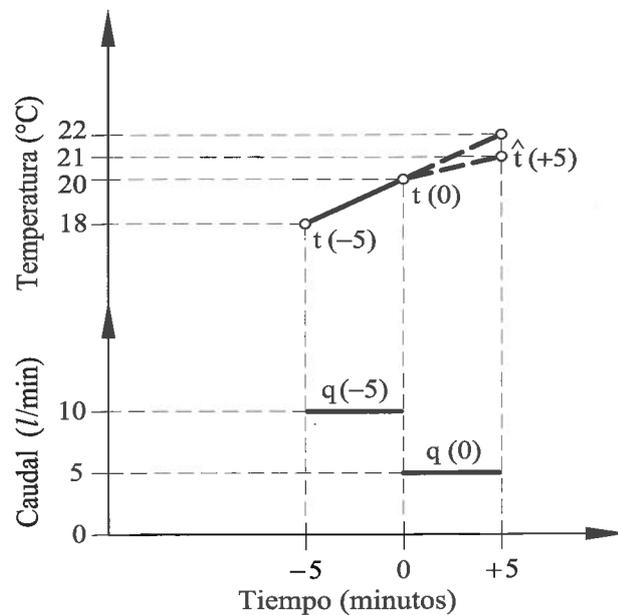


Figura 1.6: Concepto básico de modelo.

también de forma genérica cualquiera de los diferentes instantes de tiempo que se consideran espaciados cada 5 minutos. De esta forma el instante 0 del ejemplo pasa a ser ahora el instante  $k$ , el instante +5 pasa a ser  $k+1$  y el instante -5 pasa a ser  $k-1$ . La ecuación (1.2) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\hat{t}(k+1) = a_1 t(k) + a_2 t(k-1) + b_1 q(k) + b_2 q(k-1). \quad (1.3)$$

Además, podemos considerar valores de la temperatura y del caudal correspondientes a instantes previos, tales como -10, -15 y otros. En consecuencia, un modelo tal como (1.3) puede extenderse de la siguiente forma:

$$\hat{t}(k+1) = a_1 t(k) + a_2 t(k-1) + a_3 t(k-2) + \dots + b_1 q(k) + b_2 q(k-1) + b_3 q(k-2) + \dots$$

que puede expresarse como

$$\hat{t}(k+1) = \sum_{i=1}^n a_i t(k+1-i) + \sum_{j=1}^m b_j q(k+1-j), \quad (1.4)$$

donde los coeficientes  $n$  y  $m$  determinan el número de términos de temperatura y de caudal que se tienen en cuenta en el modelo. Estos coeficientes

determinan el denominado orden del modelo.

Sin embargo, parece obvio que cuanto más anteriores sean los valores de temperatura y de caudal, menor será su influencia en el valor estimado  $y$ , como consecuencia, los términos más relevantes en la estimación son aquéllos ya considerados en la ecuación (1.2).

Asimismo, el modelo puede incorporar la influencia de otras variables tales como la temperatura exterior o la temperatura del caudal de aire frío. La influencia de estas otras variables podría ser tenida en cuenta de la misma forma que la influencia del caudal de aire frío. Por ejemplo, un modelo que tuviera en cuenta la influencia de la temperatura exterior  $t_e$  podría expresarse de la siguiente forma:

$$\hat{t}(k+1) = \sum_{i=1}^n a_i t(k+1-i) + \sum_{j=1}^m b_j q(k+1-j) + \sum_{h=1}^p c_h t_e(k+1-h), \quad (1.5)$$

donde el coeficiente  $p$  determina el número de valores previos de la temperatura exterior que se han tenido en cuenta en el modelo y los parámetros  $c_h$  son los correspondientes pesos que ponderan la influencia de dichos valores en la estimación hecha por el modelo.

Este tipo de modelo podría ser utilizado no solo para representar procesos de climatización sino también procesos en cualquier otra área industrial, como se describirá en los siguientes capítulos de este libro. En general, la variable de salida del proceso recibe la notación  $y$ , mientras que a la variable de entrada se le da usualmente la notación  $u$ . Si se tiene en cuenta también la influencia de una perturbación medible, se le asigna normalmente la notación  $w$ . En consecuencia, una expresión generalizada de este tipo de modelo es la siguiente:

$$\hat{y}(k+1) = \sum_{i=1}^n a_i y(k+1-i) + \sum_{j=1}^m b_j u(k+1-j) + \sum_{h=1}^p c_h w(k+1-h). \quad (1.6)$$

Por otra parte, este tipo de expresión podría pasar de relacionar únicamente variables escalares a relacionar variables de tipo vectorial, lo que nos llevaría a un modelo multivariable de la forma

$$\hat{Y}(k+1) = \sum_{i=1}^n A_i Y(k+1-i) + \sum_{j=1}^m B_j U(k+1-j) + \sum_{h=1}^p C_h W(k+1-h), \quad (1.7)$$

donde  $Y$ ,  $U$  y  $W$  son los vectores de salida, entrada y perturbaciones medibles, respectivamente, y  $A_i$ ,  $B_j$  y  $C_h$  son las matrices que ponderan la influencia de dichos vectores en la estimación hecha por el modelo.

Hasta ahora, hemos considerado representaciones lineales del comportamiento dinámico del proceso porque, aunque los procesos son básicamente no lineales, bajo ciertas condiciones de operación, su comportamiento dinámico puede ser aproximado localmente por ecuaciones lineales con parámetros constantes, tales como las consideradas previamente. Condiciones de operación diferentes para el mismo proceso real llevarán a diferentes representaciones lineales locales, pero el conjunto de todas ellas puede ser descrito globalmente por ecuaciones como las anteriores si los parámetros o matrices de peso son variables con el tiempo, siendo en consecuencia representados como funciones del tiempo de muestreo  $k$ . Asimismo, puede incluirse en el modelo un término  $\Delta(k)$ , conocido como vector de perturbaciones, para ajustar la salida  $\hat{Y}(k+1)$  estimada por el modelo (1.7) suponiendo que todos sus términos fueran perfectamente conocidos, con la salida realmente medida  $Y(k+1)$ . Este vector de perturbaciones incluye la influencia en la salida medida del proceso de todo tipo de ruidos y perturbaciones no medibles. En consecuencia, podemos considerar la descripción de la dinámica del proceso por medio de una expresión general tal como la siguiente:

$$Y(k+1) = \sum_{i=1}^n A_i(k)Y(k+1-i) + \sum_{j=1}^m B_j(k)U(k+1-j) + \sum_{h=1}^p C_h(k)W(k+1-h) + \Delta(k). \quad (1.8)$$

Podemos observar en (1.8) que existe un periodo de muestreo de tiempo de retardo entre la entrada al proceso  $U$  y la salida del proceso  $Y$ . Este tiempo de retardo es únicamente debido a la descripción en tiempo discreto de la dinámica del proceso. Sin embargo, en muchos procesos podemos encontrar tiempos de retardo adicionales debido a su naturaleza dinámica. Ejemplos típicos son los procesos en los que intervienen transportes de

masas o energías y dispositivos con inercias significativas. Por ello la ecuación (1.8) puede ser extendida para tener en cuenta estos retardos adicionales de la forma siguiente:

$$Y(K+1) = \sum_{i=1}^n A_i(k)Y(k+1-i) + \sum_{j=1}^m B_j(k)U(k+1-j-r) + \sum_{h=1}^p C_h(k)W(k+1-h-r_1) + \Delta(k). \quad (1.9)$$

donde  $r$  es el tiempo de retardo (en periodos de muestreo) relativo al vector de entrada  $U$  y  $r_1$  es el relativo al vector de perturbaciones  $W$ .

El tipo de modelos que hemos considerado en esta sección son usualmente conocidos como modelos de ecuaciones en diferencias. Serán utilizados de forma extensiva en este libro. Algunas herramientas matemáticas relacionadas con los mismos se presentan en el Apéndice A.

En la literatura de control podemos encontrar diferentes nombres para esta clase de modelos, tales como ARMA (del inglés "autoregressive moving average"), ARMAX ("ARMA with exogenous input") y CARMA ("controlled ARMA"), y asimismo considerando variables de entrada y salida incrementales en estos modelos, ARIMA, ARIMAX y CARIMA.

En la teoría de control hay otros tipos de modelos en tiempo discreto que pueden ser también utilizados para predecir la salida del proceso en los instantes de tiempo consecutivos. Consideraremos esta alternativa más en detalle en otros capítulos de este libro y particularmente en el Apéndice B, donde se considera la representación en el espacio de estado junto con modelos de respuestas a impulsos o escalones.

La representación de sistemas dinámicos por medio de redes neuronales ha sido asimismo sujeto de atención y estudio [HSW89, GM90, NP90, HKP91]. El objetivo en la modelización mediante redes neuronales es encontrar una estructura parametrizada capaz de emular el comportamiento dinámico no lineal de los procesos. Representaciones locales lineales han sido también consideradas en este marco para obtener descripciones globales de la dinámica del proceso [JF93, ZHDM94], de forma que las predicciones de la salida del proceso son obtenidas de manera similar a la previamente considerada con modelos de ecuaciones en diferencias. Este libro principalmente considera modelos de ecuaciones en diferencias, pero cualquier otra representación de la dinámica del proceso apropiada para

predecir [SBM91] puede ser utilizada como herramienta para aplicar los desarrollos que se van a considerar.

En este capítulo introductorio utilizaremos en la siguiente sección el modelo (1.2) para ilustrar el principio de control predictivo y su aplicación.

## 1.7 Control Predictivo: origen y conceptos básicos

La metodología de control predictivo fue introducida en 1974 en una Tesis Doctoral [Mar74]. Posteriormente, el principio básico original fue definido formalmente en una patente en EE.UU. [Mar76a]. Este principio puede expresarse en los siguientes términos: "Basándose en un modelo del proceso, el control predictivo es el que hace que la salida dinámica del proceso predicha por un modelo sea igual a una salida dinámica deseada convenientemente elegida". Definido de esta forma, el control predictivo es literalmente de sentido común y su objetivo de control tiene un claro significado físico.

En el contexto del ejemplo de climatización considerado previamente, la aplicación del principio de control predictivo implica que el caudal de aire frío que ha de ser introducido en la habitación tiene que ser calculado para conseguir que la temperatura predicha al cabo de 5 minutos,  $\hat{t}(+5)$ , sea igual a la temperatura deseada en dicho instante futuro. Utilizando la notación  $t_d(+5)$  para dicha temperatura deseada, podemos concluir que el control predictivo es el que satisface la condición

$$\hat{t}(+5) = t_d(+5). \quad (1.10)$$

Con el fin de calcular la señal de control predictivo, podemos utilizar el modelo definido por la ecuación (1.2), que determina la temperatura predicha a los 5 minutos. Sustituyendo  $\hat{t}(+5)$  por  $t_d(+5)$  en la ecuación (1.2) y despejando  $q(0)$ , obtenemos el cálculo del control predictivo en la forma

$$q(0) = \frac{t_d(+5) - a_1 t(0) - a_2 t(-5) - b_2 q(-5)}{b_1}. \quad (1.11)$$

Si la predicción realizada por el modelo (1.2) es correcta, la aplicación de control predictivo de acuerdo con (1.11) cada 5 minutos hará que los sucesivos valores de la temperatura, medidos cada 5 minutos, sean iguales a los sucesivos valores deseados, es decir, las temperaturas medidas seguirán

una trayectoria deseada. Esta trayectoria deseada puede ser elegida convenientemente para que sea físicamente realizable, con una acción de control acotada, y para que guíe la salida del proceso hacia el valor de consigna de una manera satisfactoria, rápida y suave, sin sobreoscilaciones ni desviaciones permanentes.

La estrategia de control predictivo descrita previamente puede ser generalizada y aplicada mediante un modelo predictivo que calcula la señal de control predictivo y un bloque conductor que genera la trayectoria deseada, tal como se representa en la Figura 1.7.

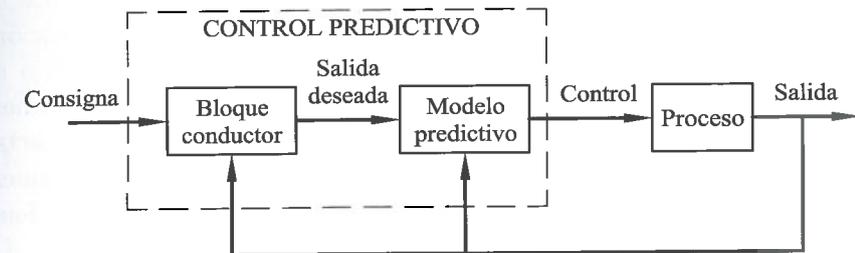


Figura 1.7: Diagrama de bloques básico del control predictivo.

El ejemplo de climatización que estamos considerando nos ha servido para definir el concepto de control predictivo y su aplicación práctica. Sin embargo, es lógico plantearse algunas objeciones a la practicidad de este concepto, en la forma en la que ha sido expuesto, tales como el hecho de que el modelo considerado es demasiado simple para describir con suficiente precisión la dinámica del proceso de climatización.

En efecto, existen otras muchas variables no recogidas en el modelo (1.2) que intervienen en el proceso de climatización, el cual, por añadidura, tiene parámetros variables con el tiempo. Vamos pues a considerar, en el apartado siguiente, el efecto de esas otras variables, la naturaleza inherentemente variable del proceso y la generalización metodológica que aparece como necesaria para resolver satisfactoriamente el problema de control en un entorno de operación real.

## 1.8 El efecto de las perturbaciones

No cabe duda de que el entorno de operación del proceso de climatización considerado es más complejo que el descrito para obtener la ecuación (1.2). Podemos de manera inmediata considerar diversas variables que actúan sobre dicho proceso; por ejemplo, la temperatura exterior, el número de personas en la habitación, el número de ordenadores en funcionamiento, la temperatura del caudal de aire frío que entra en la habitación, etc. Analizaremos a continuación los posibles efectos de estas variables sobre el proceso en cuestión.

Particularmente nos centraremos, a título de ejemplo, en la temperatura del caudal de aire frío que entra en la habitación. Consideremos una situación en la que, para los primeros utilizadores de la climatización a primera hora de la mañana, la temperatura del caudal de aire frío que entra en la habitación es de  $10^{\circ}\text{C}$ . Esta temperatura es suficientemente baja para enfriar la habitación eficazmente. Es decir, el efecto de actuar sobre el caudal de aire frío  $q(0)$  que entra en la habitación seguramente tendrá un impacto significativo en la temperatura de la habitación dentro de 5 minutos.

Siendo el parámetro  $b_1$  el factor de peso del efecto de  $q(0)$  sobre la temperatura dentro de 5 minutos, es evidente que este parámetro no será igual a cero, sino que seguramente tendrá un valor significativo. A modo de ejemplo, consideremos que el valor de este parámetro fuera  $-0.5$ . Esto significaría que un incremento de una unidad en el caudal de aire frío que entra en la habitación haría decrecer la temperatura de la misma medio grado centígrado en 5 minutos.

Sin embargo, puede ocurrir que la temperatura del caudal de aire frío cambie a lo largo del día, debido a que aumente la demanda global de aire frío por parte de los usuarios de la climatización y las máquinas de frío no puedan responder de la misma forma a esta demanda. Consideremos que al mediodía la temperatura del caudal de aire frío ha aumentado a  $16^{\circ}\text{C}$ . Obviamente este caudal enfriará la habitación, pero mucho menos enérgicamente que si la temperatura siguiese teniendo el valor anterior de  $10^{\circ}\text{C}$ . Bajo estas nuevas condiciones, cabe preguntarse si el valor del parámetro  $b_1$  va a seguir siendo  $-0.5$ . Obviamente, no. En estas nuevas condiciones, cabe esperar que el valor del parámetro  $b_1$  haya disminuido notablemente, lo que significa que la eficacia del caudal de aire para enfriar

la habitación disminuirá considerablemente y se necesitará un caudal muy superior para lograr el mismo efecto de climatización.

En consecuencia, podemos deducir que el aumento de la temperatura del caudal de aire frío de  $10^{\circ}\text{C}$  a  $16^{\circ}\text{C}$  no solo tenderá a hacer aumentar la temperatura dentro de la habitación, sino que hará cambiar el valor del parámetro  $b_1$  y, lógicamente, también el de los otros parámetros  $b_2$ ,  $a_1$  y  $a_2$  del modelo (1.2). Es decir, el cambio en la temperatura del caudal de aire frío hará cambiar asimismo la dinámica (relación causa-efecto) del proceso de climatización.

El análisis que hemos realizado sobre la temperatura del caudal de aire frío tiene un valor genérico y puede generalizarse al conjunto de todas las variables, incluidas variables de control y perturbaciones medibles y no medibles, que definen el entorno de operación de un proceso real. De este análisis podemos deducir que los cambios en las variables o perturbaciones que afectan al proceso tienen dos efectos, a saber:

1. Tenderán en general a hacer desviar de su consigna la variable bajo control.
2. Cambiarán la relación dinámica entre las variables de entrada y salida del proceso.

Cabe preguntarse cuál de estos dos efectos es el más perjudicial desde el punto de vista del control. Pues bien, desde la perspectiva del control predictivo, el efecto peor es claramente el cambio de la dinámica del proceso. Para aceptar esta afirmación, pensemos que el modelo del proceso es la herramienta que utilizamos para calcular el control predictivo. Un buen modelo puede asegurarnos una buena predicción y, por tanto, un buen control predictivo. Suponiendo que se disponga de un buen modelo para un cierto escenario de operación, los cambios que se produzcan en la dinámica del proceso darán lugar a un deterioro de la bondad del modelo y por ende de la predicción y del control predictivo.

El primer efecto considerado anteriormente, aunque nos preocupe, tiene un carácter secundario, porque si disponemos de un buen modelo del proceso, mediante la aplicación de control predictivo, podremos fácilmente corregir cualquier desviación que se produzca en la variable bajo control.

De lo anterior, podemos concluir que, por sí mismo, el control predictivo es sin duda una solución avanzada pero incompleta, porque los cambios que

de forma natural se producen en las variables o perturbaciones del entorno de operación de los procesos reales varían su dinámica y, en consecuencia, no se puede garantizar la precisión en la predicción de la salida del proceso a partir de un modelo con parámetros fijos y, por ende, un control predictivo satisfactorio.

## 1.9 La necesidad de adaptación

Podemos considerar que si dispusiéramos de un mecanismo de adaptación capaz de hacer variar los parámetros de nuestro modelo siguiendo con precisión los cambios que se producen en la dinámica del proceso, no nos preocuparía el que las perturbaciones variaran dicha dinámica, porque ese mecanismo compensaría dichos cambios ajustando apropiadamente nuestro modelo. Por otra parte, y bajo esta misma hipótesis, tampoco nos preocuparía que las perturbaciones desviarán de su consigna la variable bajo control, porque disponiendo de un buen modelo de la dinámica del proceso podríamos fácilmente corregir dichas desviaciones, como ya hemos indicado.

Podríamos incluso considerar que con un mecanismo de adaptación eficaz podría prescindirse del conocimiento de las perturbaciones, cuyos cambios afectan a la dinámica del proceso, y a pesar de ello llegar a conseguir un control satisfactorio del proceso. Para explicar esta idea de forma intuitiva, volvamos a continuación al caso del ejemplo de climatización que hemos venido utilizando.

Supongamos que, debido al cambio de la temperatura del aire frío y a otros cambios del entorno, los parámetros del modelo (1.2) van cambiando desde primera hora de la mañana hasta el mediodía. Si disponemos de un mecanismo de adaptación capaz de ajustar los parámetros de dicho modelo para seguir el cambio dinámico de la relación entre las temperaturas de la habitación y los caudales de aire frío, podremos servirnos de él para calcular en todo momento el caudal de aire frío necesario para que la temperatura de la habitación siga los valores deseados, sin necesidad de disponer de ningún otro conocimiento del entorno. Así, a primera hora de la mañana, si el mecanismo de adaptación nos dice que el parámetro  $b_1$  es igual a  $-0.5$ , y nos da asimismo el valor del resto de los parámetros, sabremos que el caudal de aire frío a aplicar será reducido y podremos calcularlo con precisión, independientemente de la temperatura del caudal de aire frío,

de la temperatura exterior y de cualquier otra variable o perturbación del entorno del proceso. De la misma forma, si al mediodía el mecanismo de adaptación nos dice que el parámetro vale  $-0.05$ , y nos da asimismo el valor del resto de los parámetros, sabremos que el caudal necesario para mantener la temperatura de la habitación en sus valores deseados será mucho mayor en este caso y podremos calcularlo con precisión, sin necesitar asimismo de ningún otro conocimiento de las variables o perturbaciones del entorno.

Por otra parte, supongamos que fuera necesario conocer con precisión todas las variables que afectan al proceso para aplicar un control predictivo satisfactorio. Esto, aún suponiendo que fuera posible, sería sin duda muy restrictivo al requerirse mucha información, lo que sería poco práctico en términos generales y particularmente para un control industrial.

Así pues podemos considerar que, para llegar a ser una solución completa e industrial, el control predictivo necesitaría dotarse de un mecanismo de adaptación capaz de ajustar convenientemente los parámetros del modelo predictivo cuando se modifica la dinámica del proceso. En el apartado siguiente vamos a considerar los conceptos y la forma básica para materializar un mecanismo de adaptación.

## 1.10 Sistemas adaptativos

El mecanismo de adaptación debe representar en la práctica un proceso de aprendizaje y, como tal, necesitará una información que le permita aprender. Esta información vendrá dada fundamentalmente por las variables de entradas y salidas del modelo predictivo que pretende ajustar y por los propios errores de predicción del modelo. Dichos errores, al producirse en los sucesivos instantes de muestreo, deberán añadir un conocimiento incremental al conocimiento previo de la dinámica del proceso, el cual reside en el valor de los parámetros del modelo. De forma sencilla e intuitiva podemos aventurar que la operación del mecanismo de adaptación, en un proceso tal como el de climatización que hemos venido considerando, debería producir un cambio en los parámetros de un modelo tal como el (1.2) en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} a_i(k) &= a_i(k-1) + \Delta_{a_i}(\varepsilon(k)); & i = 1, 2 \\ b_i(k) &= b_i(k-1) + \Delta_{b_i}(\varepsilon(k)); & i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Esto significa que el valor de cada uno de los parámetros del modelo en el instante de muestreo  $k$  será generado por el mecanismo de adaptación sumando al valor del parámetro en el instante anterior  $k - 1$  una función incremental que depende del error de predicción  $\varepsilon(k)$  producido en el instante  $k$ . La lógica que sustenta esta forma de adaptación puede ilustrarse en los puntos siguientes:

- En caso de que el error de predicción hubiera sido nulo en el instante  $k$ , es evidente que desearíamos conservar el conocimiento que poseemos de la dinámica del proceso y, en consecuencia, mantener el valor previo (en  $k - 1$ ) de los parámetros del modelo, lo que justifica el primer término del miembro derecho de la ecuación (1.12).
- En caso de que en el instante  $k$  se hubiera producido un error de predicción distinto de cero, es evidente que desearíamos mejorar nuestro conocimiento de la dinámica del modelo, pero sin olvidar el conocimiento previo. Es por ello que parece lógico añadir un conocimiento incremental como resultado del error de predicción constatado, lo que justifica las funciones en el segundo sumando en (1.12). De hecho, desearíamos que estas funciones incrementales estuvieran diseñadas de tal forma que, al tender el tiempo a infinito, el error de predicción se minimizara o tendiera hacia cero lo más rápidamente posible, de acuerdo con el objetivo fundamental de una buena predicción de la salida del proceso.

Para materializar estos conceptos en un esquema práctico, podemos acudir en la literatura de control a la formulación de los denominados sistemas adaptativos. Pero antes de referirnos a ella, debemos poner de relieve el hecho de que en las descripciones conceptuales previas en este capítulo, hemos considerado el concepto de modelo desde las siguientes perspectivas:

1. Por una parte, hemos razonado que la relación dinámica de entradas y salidas del proceso viene determinada intrínsecamente por una ecuación o ecuaciones, cuyos parámetros hemos asimilado a la dinámica particular del proceso, que en principio es desconocida.
2. Por otra parte, hemos visto cómo, si estas ecuaciones son conocidas, el control predictivo puede utilizarlas para obtener un control satisfactorio del proceso.

3. Finalmente, estamos considerando que al desconocer a priori la ecuación o ecuaciones del proceso y sus variaciones con el tiempo, deberemos intentar construir un modelo, que denominaremos "adaptativo", capaz de reproducir el comportamiento del mismo y de seguir sus cambios dinámicos con el tiempo.

Los sistemas adaptativos responden en general a un esquema tal como el representado en la Figura 1.8. La señal de entrada al proceso se aplica simultáneamente al modelo adaptativo y las salidas de ambos se comparan para producir una señal de error, a partir de la cual un mecanismo de adaptación ajusta los parámetros del modelo adaptativo.

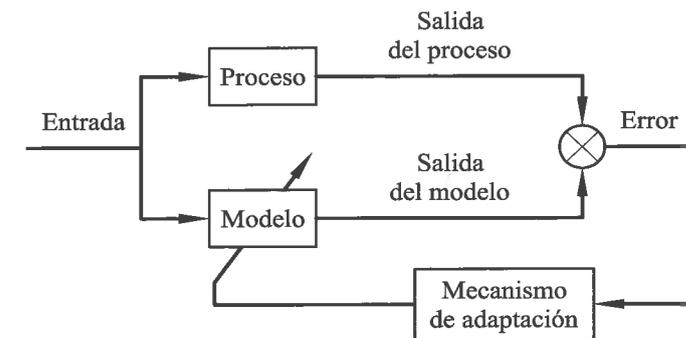


Figura 1.8: Esquema básico de un sistema adaptativo.

El problema de diseño de un mecanismo de adaptación tal como el que se presenta en la Figura 1.8 ha generado un interés considerable entre los investigadores. Algunos autores han enfocado el problema desde la perspectiva de la optimización, es decir, desde la perspectiva de la minimización de un índice o función del error previamente mencionado [AE71, Men73, Lju87]. Otro enfoque [Mar76b, Mar84, MSF84, Mar86, CMSF88] considera la solución desde la perspectiva de la estabilidad y lleva a resultados que se resumen en el siguiente párrafo.

La operación del mecanismo de adaptación asegura que el valor absoluto del error considerado en la Figura 1.8 permanecerá acotado a partir de un cierto instante de muestreo por el menor límite posible, de acuerdo con el nivel de ruidos y perturbaciones actuando sobre el proceso. Si no existen ruidos y perturbaciones actuando sobre el proceso, el error tenderá asintóticamente hacia cero. Estos resultados concuerdan con los conceptos previamente expuestos en relación al mecanismo de adaptación (1.12) y

serán desarrollados en los capítulos de este libro.

Los razonamientos y referencias considerados previamente nos indican que para que un modelo adaptativo pueda hacer el seguimiento de los cambios dinámicos del proceso, el mecanismo de adaptación tendrá que aprender dichos cambios a partir de los propios errores de predicción del modelo. En consecuencia y de nuevo a título de ejemplo, cuando en el proceso de climatización considerado aumente la temperatura del caudal de aire frío, dicho cambio determinará en principio e inevitablemente un aumento de la temperatura de la habitación, es decir, un alejamiento de dicha temperatura de su valor de consigna. Este alejamiento será detectado por el mecanismo de adaptación en términos de error de predicción, a partir del cual el modelo adaptativo empezará a aprender el cambio dinámico que se está produciendo en el proceso, al mismo tiempo que el control predictivo intentará corregir el mencionado alejamiento.

## 1.11 Sistemas de control adaptativo y predictivo

### 1.11.1 Diagrama de bloques

Cuando el esquema de control predictivo descrito en el Apartado 1.7 se combina con el sistema adaptativo considerado en el apartado anterior, obtenemos el sistema adaptativo predictivo global que se presenta en la Figura 1.9. En este esquema un mismo modelo juega simultáneamente dos papeles, modelo predictivo y modelo adaptativo, como se describe a continuación:

- Por una parte, el modelo adaptativo recibe la misma señal de control que el proceso, y la salida de ambos se comparan para generar la señal de error, a partir de la cual el mecanismo de adaptación ajusta los parámetros del modelo adaptativo con el fin de obtener el resultado de estabilidad considerado en el apartado anterior, es decir que la salida del modelo adaptativo tienda a coincidir con la salida del proceso.
- Por otra parte, el modelo predictivo calcula la señal de control a partir de la salida deseada generada por el bloque conductor. Este cálculo, realizado de acuerdo con el principio de control predictivo, hace que la salida deseada sea igual a la salida del modelo adaptativo, que es la salida predicha del proceso.

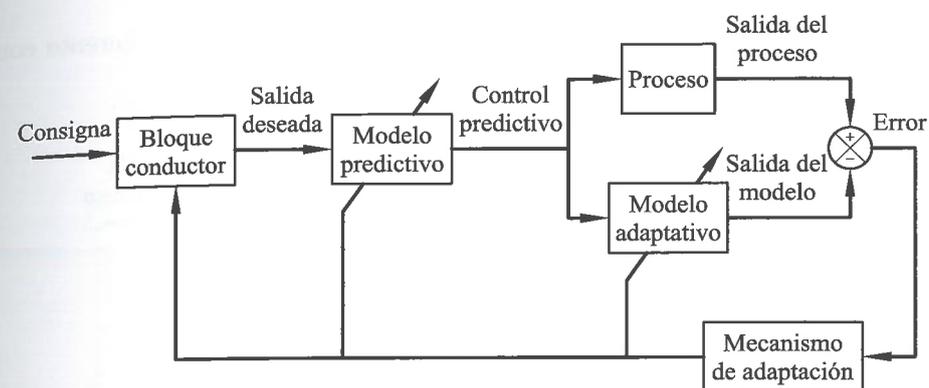


Figura 1.9: Esquema global de control adaptativo y predictivo.

En consecuencia, cuando el mecanismo de adaptación hace tender la diferencia entre la salida del proceso y del modelo adaptativo hacia cero, la diferencia entre la salida del proceso y la salida deseada tiende también hacia cero. De esta forma se alcanza la estabilidad global del control adaptativo predictivo. La teoría matemática que soporta los resultados de estabilidad del control adaptativo predictivo ha aparecido en diversas publicaciones [Mar76b, Mar84, MSF84, Mar86, CMSF88, MR96, MR97] y será asimismo presentada en los capítulos de este libro.

El diagrama de la Figura 1.9 puede simplificarse en el diagrama de la Figura 1.10, que es el diagrama generalmente utilizado para representar esta metodología. La funcionalidad de los bloques de este diagrama se describe brevemente a continuación:

- **Bloque conductor:** Genera la trayectoria de salida deseada que guiará la salida del proceso hacia la consigna en forma óptima.
- **Modelo predictivo:** Calcula la señal de control que hace que la salida del proceso predicha esté contenida en la trayectoria deseada generada por el bloque conductor.
- **Mecanismo de adaptación:** Ajusta los parámetros del modelo predictivo a partir de los errores de predicción, con el fin de que dichos errores tiendan eficientemente hacia cero. Asimismo, informa al bloque conductor de las desviaciones de la salida del proceso con respecto a la trayectoria deseada. De esta forma, el bloque conductor

puede redefinir la trayectoria deseada de una manera coherente con la salida medida del proceso.

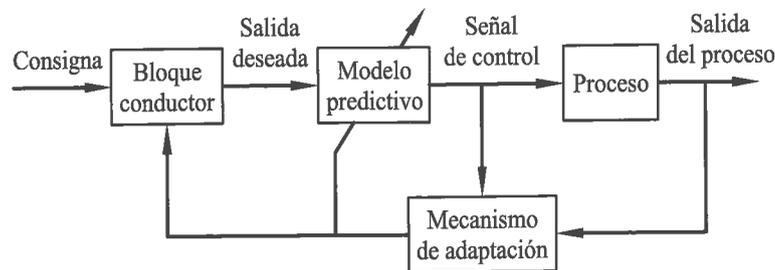


Figura 1.10: Diagrama de bloques de un sistema de control adaptativo predictivo.

### 1.11.2 Ejemplo conceptual de aplicación

A continuación, apoyándonos en la Figura 1.11, describiremos de forma conceptual e ilustrativa la aplicación de control adaptativo predictivo a un proceso de climatización (en este caso en invierno) por aire caliente similar al considerado en el Apartado 1.4.

En el instante de control inicial  $k$  (7 de la mañana) de la Figura 1.11, el bloque conductor (representado en la Figura 1.10) recibe la información, por una parte, del valor de consigna ( $20^\circ\text{C}$ ) y, por otra, del valor presente de la temperatura, que es  $12^\circ\text{C}$ . A partir de esta información, el bloque conductor genera en el instante  $k$  la trayectoria deseada que la temperatura bajo control debería seguir para alcanzar la consigna, que es la trayectoria 1 mostrada en la Figura 1.11. De acuerdo con esta trayectoria deseada, la temperatura debería aumentar en el siguiente periodo de control de 5 minutos de  $12^\circ\text{C}$  a  $13^\circ\text{C}$ . Este último valor es la salida deseada para el siguiente instante de control  $k+1$ , que le pasa el bloque conductor al modelo predictivo. A partir de esta salida deseada, el modelo predictivo calcula en el instante  $k$  la señal de control que hace la temperatura predicha en el instante  $k+1$  igual a  $13^\circ\text{C}$ . Consideremos que esta señal de control corresponde a una apertura de válvula de aire caliente del 50%, como se indica en la Figura 1.11.

Una vez la señal de control predictivo ha sido aplicada, el sistema espera hasta el siguiente instante de control, cuando la temperatura de la habitación es medida de nuevo. Supongamos que la temperatura medida

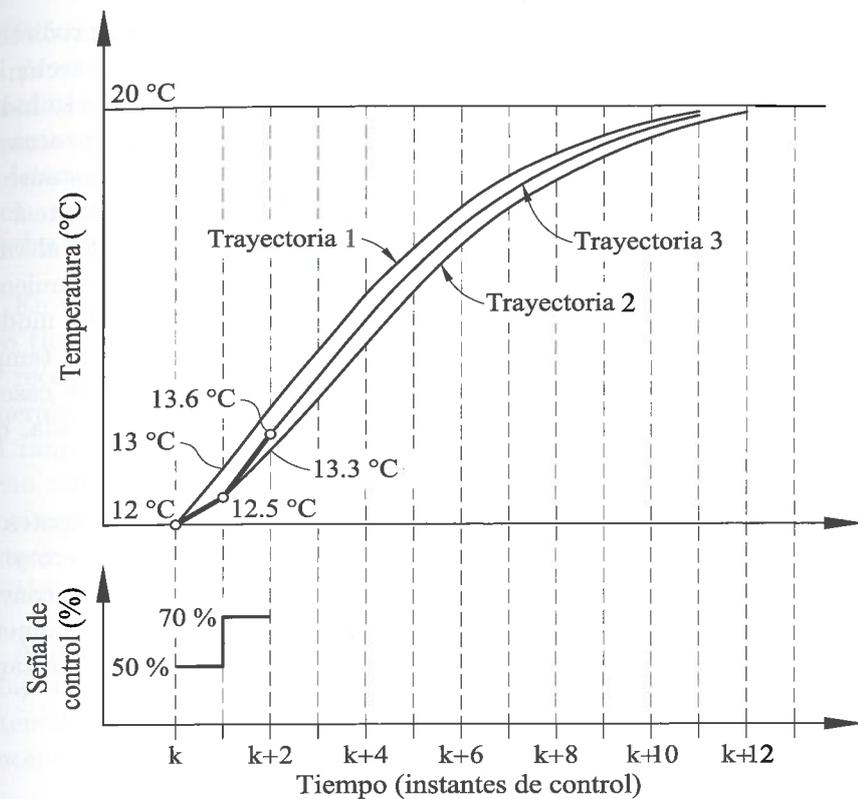


Figura 1.11: Ejemplo conceptual de aplicación de control adaptativo predictivo.

en el instante  $k+1$  es  $12.5^\circ\text{C}$  en lugar de los deseados  $13^\circ\text{C}$ . Por lo tanto ha existido un error de predicción de  $0.5^\circ\text{C}$ . En esta situación, el mecanismo de adaptación reacciona en dos niveles. En un primer nivel, ajusta los parámetros del modelo predictivo con el fin de hacer tender el error de predicción hacia cero. En un segundo nivel, informa al bloque conductor que la temperatura medida ha sido únicamente de  $12.5^\circ\text{C}$  en lugar de  $13^\circ\text{C}$ , como se esperaba de acuerdo con la primera trayectoria deseada. En consecuencia, el bloque conductor generará una segunda trayectoria deseada, teniendo en cuenta la evolución real de la variable del proceso. Esta segunda trayectoria es la trayectoria 2 representada en la Figura 1.11 y, como puede observarse, se inicia en el último valor de temperatura medido, que es  $12.5^\circ\text{C}$ . De acuerdo con esta segunda trayectoria deseada, la temperatura de la habitación deberá cambiar, durante el nuevo periodo de control, desde  $12.5^\circ\text{C}$  hasta  $13.3^\circ\text{C}$ . A partir de este valor, el modelo predictivo

calcula la nueva señal de control. Supongamos que el modelo predictivo, ya ajustado en el instante  $k + 1$ , calcula en este instante una acción de control correspondiente a una apertura de válvula del 70%, como se indica en la Figura 1.11. El sistema espera de nuevo la reacción del proceso y, más concretamente, la temperatura alcanzada en el siguiente instante de control. Supongamos que la nueva temperatura medida en el instante  $k + 2$  es  $13.6^{\circ}\text{C}$ . Así pues, en esta ocasión el valor medido ha excedido al valor predicho. El sistema reaccionará con el mismo modelo de comportamiento: a partir del nuevo error de predicción ajustará los parámetros del modelo predictivo, informará al bloque conductor de la nueva medida de temperatura, generará una nueva trayectoria de salida deseada (en este caso la trayectoria 3 de la Figura 1.11) y un nuevo valor de salida deseada, que será utilizado para calcular la nueva acción de control predictivo.

El resultado de la operación del sistema en los distintos instantes de control es que el error de predicción tiende rápidamente hacia cero y las diferentes trayectorias deseadas, generadas por el bloque conductor, convergen hacia una única trayectoria. Esta única trayectoria es la que finalmente seguirá la salida del proceso, en este caso la temperatura, para alcanzar la consigna de  $20^{\circ}\text{C}$ .

## 1.12 Límites del control adaptativo predictivo

El Control Adaptativo Predictivo descrito conceptualmente en el apartado anterior ha demostrado un funcionamiento muy satisfactorio en su aplicación a una amplia variedad de procesos industriales, como podremos comprobar en la Unidad Didáctica V de este libro y ha sido descrito en numerosas publicaciones [GR90, TO90, DAM92, GBHU93, GCM94, MGK94, PPCC94, CBC95, MR96, PPCC97, MP97, PMM98, SMM98, MLM99], siempre que exista una relación causa-efecto que determine el comportamiento dinámico del proceso y que dicha relación pueda ser identificada por medio de un modelo. Pero ello no siempre es así, de hecho se presentan con frecuencia ocasiones en que esto no ocurre y en las que, en consecuencia, la aplicación del control adaptativo predictivo no es aconsejable. Por ejemplo, en muchos procesos industriales se produce a veces la circunstancia de que la variable de salida del proceso, por efecto de las perturbaciones o por otras causas, entra en una zona de saturación o cercana a la saturación, donde las acciones de control pierden temporalmente su efecto

dinámico sobre la misma. En estas circunstancias, la relación causa-efecto del proceso deja de existir y, por ello, mantener la aplicación de control adaptativo predictivo sería contraproducente, pues el conocimiento de la dinámica del proceso que reside en los parámetros del modelo adaptativo se deterioraría significativamente. Dichos parámetros tenderían en general hacia cero, indicando la ausencia de una relación de entrada-salida, con lo que las acciones de control perderían su lógica.

En consecuencia, en determinados casos, el control adaptativo predictivo tiene unos límites más allá de los cuales su funcionamiento deja de ser recomendable. Dichos límites de funcionamiento pueden caracterizarse generalmente mediante dominios de operación situados en los extremos del rango de operación de la variable bajo control. Así pues, dentro de dicho rango de operación, puede existir uno o varios dominios donde el funcionamiento del control adaptativo predictivo sea perfectamente satisfactorio y otros dominios donde no deberá aplicarse control adaptativo o predictivo porque su funcionamiento podría deteriorarse.

A partir de esta realidad, se ha desarrollado el denominado control Adaptativo Predictivo Experto (ADEX), que pretende superar de forma sistemática los problemas mencionados. El apartado siguiente introduce conceptualmente la nueva metodología.

## 1.13 Control adaptativo predictivo experto

### 1.13.1 Dominios ADEX

El control ADEX, introducido en una solicitud de patente internacional PCT [Mar00], aceptada en EE.UU. [Mar03a] y en Europa [Mar03b], combina el control adaptativo predictivo con el control experto basado en reglas, mediante la definición de dominios de operación para ambos en una estructura de control integrada.

Dado un rango de operación de la variable bajo control, la metodología ADEX divide dicho rango en diferentes dominios de control adaptativo predictivo (AP) y de control experto (EX). La Figura 1.12 muestra un ejemplo en el que se han definido tres dominios AP, uno situado en la parte central (AP-C) del rango de variación de la variable, otro en la parte superior (AP-S) al central y otro en la parte inferior (AP-I), así como dos

dominios expertos, uno en la parte superior del rango de variación (EX-S) y otro en la parte inferior (EX-I).

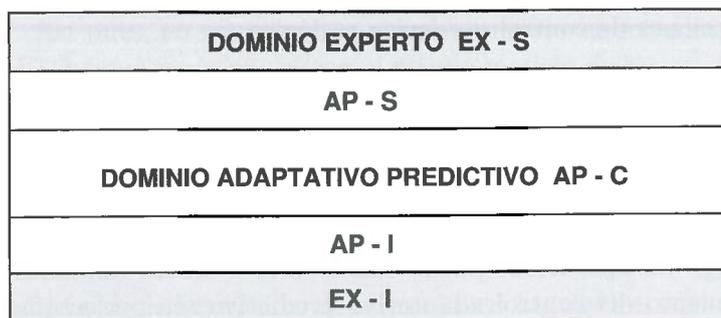


Figura 1.12: Dominios AP y EX en el rango de variación de la salida del proceso.

Los dominios AP son aquéllos en los que la relación dinámica causa-efecto entre las variables de entrada y salida del proceso puede ser identificada por medio de un sistema adaptativo. En estos dominios se aplicará control AP y la operación del proceso podrá ser generalmente controlada en forma óptima. Como muestra el ejemplo de la Figura 1.12, pueden definirse diferentes dominios AP y en cada uno de ellos puede definirse una forma distinta de aplicar control AP, que será la que más convenga en cada caso.

Los dominios expertos son dominios de operación donde el control manual puede proporcionar un control más robusto y eficiente que el control AP. Esto puede suceder cuando no existe una relación causa-efecto entre las variables de entradas y salidas o ésta no puede obtenerse en tiempo real o cuando adquirir dicho conocimiento llevaría cierto tiempo y no resultaría en una mejora sustancial sobre el control manual. Estos dominios se sitúan habitualmente en los extremos del rango de operación normal de las variables del proceso y en ellos se utiliza la experiencia del operador para definir las reglas que imitan la inteligencia del control manual. El control ADEX aplicado en los dominios expertos se diseña con el fin de conducir las variables del proceso hacia los dominios AP, donde se aplica el control AP.

### 1.13.2 Diagrama de bloques y descripción funcional

El diagrama de bloques de ADEX se presenta en la Figura 1.13 y, como puede observarse, es equivalente al del control AP, pero con un Bloque Experto añadido en un nivel superior. Este bloque experto, a partir de la información que recibe de las variables del proceso, es capaz de determinar y modificar la operación del bloque de control, el bloque conductor y el mecanismo de adaptación tal y como se describe a continuación.

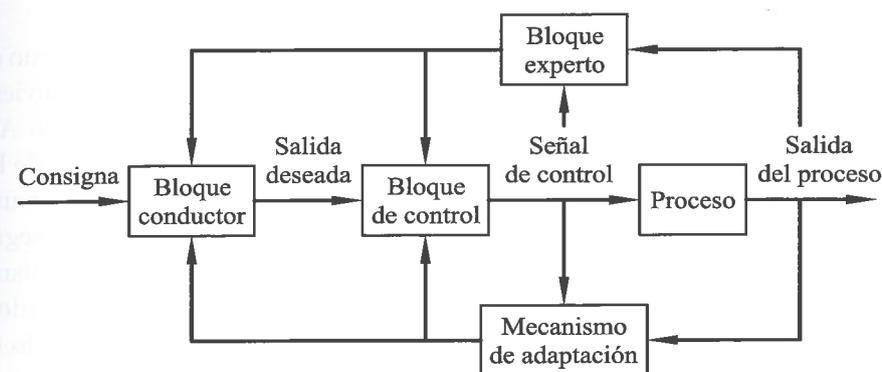


Figura 1.13: Diagrama de bloques del control adaptativo predictivo experto.

- **Bloque de control:** Dependiendo de si el dominio de operación en el que se encuentra la variable de salida del proceso es AP o EX, el bloque experto determina la aplicación de control AP o control experto. En el primer caso, el bloque de control actuará como modelo predictivo, dentro del esquema propio del control AP, y calculará el control predictivo a aplicar al proceso. Si debe aplicarse control experto, el bloque de control actuará como un sistema por reglas que, imitando la actuación del operador humano, aplicará control experto al proceso. Esta función del bloque experto evitará la aplicación de control AP cuando no es procedente y el deterioro que conllevaría este tipo de aplicación, y permitirá en estos casos una actuación de control razonable como la que llevaría a cabo el operador humano del proceso. Esta función del bloque experto por sí misma confiere al controlador ADEX una gran robustez y fiabilidad industrial.

- **Bloque conductor:** En su interacción con el bloque conductor, el bloque experto puede determinar el criterio de rendimiento para la generación de la trayectoria deseada más conveniente para cada uno de los dominios AP. Así pues, a título de ejemplo, puede determinar la velocidad de cambio o pendiente de la trayectoria deseada en su acercamiento a la consigna. Si el dominio está alejado de la consigna puede desearse una gran velocidad de cambio, pero si el dominio contiene la consigna, entonces podríamos desear una velocidad de cambio menor, para que la consigna se alcance suavemente y sin oscilaciones.

- **Mecanismo de adaptación:** En su interacción con el mecanismo de adaptación, el bloque experto puede determinar: (a) cuándo conviene activar o desactivar la adaptación de los parámetros del modelo AP, según sean las condiciones de operación, y (b) la reinicialización de los parámetros del modelo AP al variar el dominio de operación. Por una parte, al introducir criterios para arrancar o parar la adaptación según las condiciones de operación, el bloque experto vuelve al mecanismo de adaptación más robusto, evitando posibles deterioros de la identificación paramétrica en el modelo AP. Por otra parte y a título de ejemplo, si conocemos en forma aproximada cambios importantes de la dinámica del proceso en diferentes dominios de operación, el bloque experto puede ayudar sensiblemente al mecanismo de adaptación al reinicializar los parámetros del modelo AP cuando la salida del proceso cambia de uno a otro de estos dominios. Los procesos de tipo pH son un ejemplo típico de esta circunstancia.

En definitiva, el funcionamiento del bloque **experto** permite hacer uso del conocimiento previo del que disponemos sobre el proceso y utilizarlo, por medio de la aplicación de reglas, tanto en la aplicación del control experto como en la aplicación del control adaptativo predictivo de ADEX. Con ello el controlador puede utilizar ventajosamente dicho conocimiento para aplicar el control apropiado en los diferentes dominios de operación, y particularmente en los dominios AP eligiendo el criterio de rendimiento más apropiado para el bloque conductor y/o adaptando y reinicializando los parámetros del modelo AP cuando es conveniente.

### 1.13.3 Ejemplo conceptual de aplicación

Aunque posteriormente en este libro se presentará con todo detalle una aplicación industrial de ADEX, en este apartado queremos avanzar un ejemplo conceptual sencillo con ayuda de la Figura 1.14.

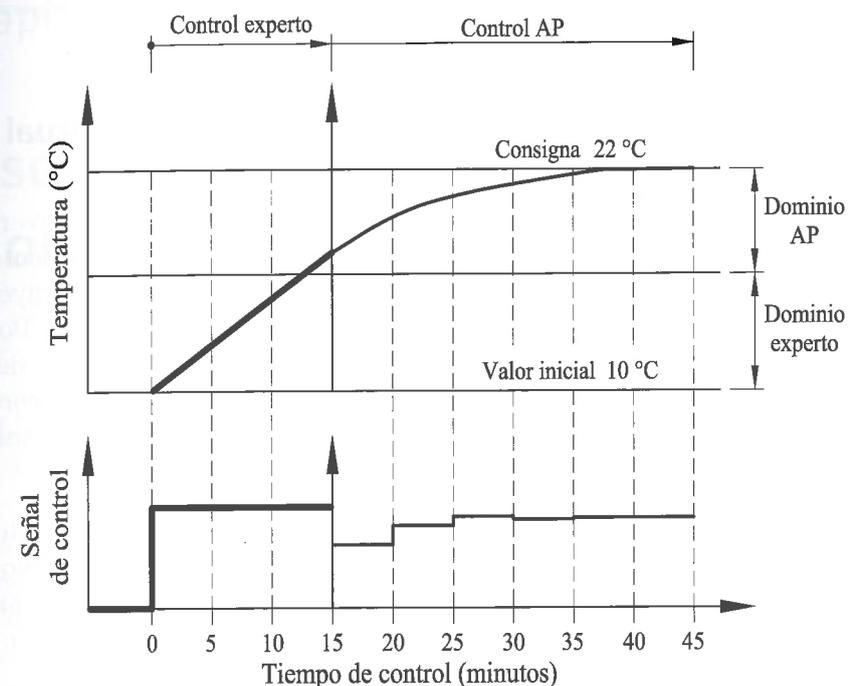


Figura 1.14: Ejemplo conceptual de aplicación de ADEX.

Volviendo al ejemplo de climatización (en invierno), la Figura 1.14 representa el inicio de la señal de control calefactora y su evolución, así como la evolución de la temperatura hasta alcanzar la consigna ( $22^{\circ}\text{C}$ ), después de una noche en la que no se gasta energía calefactora, es decir, en la que la señal de control es cero. El rango de variación de la temperatura, desde su valor inicial de  $10^{\circ}\text{C}$ , se divide en un dominio experto y un dominio AP. Como puede observarse, el dominio experto se define en una zona alejada de la consigna y donde la precisión del control no es crítica. Por su parte, el dominio AP se definirá alrededor de la consigna donde la precisión del control es importante.

Una vez iniciada la operación del controlador ADEX, como puede ob-

servarse en la Figura 1.14, mientras la variable de temperatura permanece en el dominio experto, se aplicará control experto, imitando la actuación del operador humano, que consiste en mantener una acción de control constante. Pero cuando la variable entra en el dominio AP, a partir del minuto 15, se iniciará la aplicación de control adaptativo predictivo para guiar la trayectoria de la temperatura de forma suave y sin oscilaciones hacia la consigna.

### 1.14 Un primer nivel de conocimiento conceptual

En las páginas de este capítulo hemos introducido conceptos básicos relacionados con el control de procesos y hemos analizado sucintamente la metodología de realimentación negativa PID, que ha venido constituyendo hasta nuestros días el estándar de control utilizado universalmente. Posteriormente, hemos considerado la influencia que tuvo la introducción de los computadores digitales en el desarrollo de la teoría y la práctica del control de procesos y cómo el principio de control predictivo apareció en el marco creado por la nueva tecnología digital.

El principio de control predictivo tiene una importancia relevante en control de procesos, porque a partir de él se han desarrollado metodologías capaces de ser aplicadas en la práctica industrial de forma sistemática, superando las limitaciones previas de la metodología de realimentación negativa PID.

En este capítulo hemos presentado un primer nivel de conocimiento conceptual del principio de control predictivo y de las metodologías de control adaptativo predictivo y de control adaptativo predictivo experto que de él se han derivado. Hemos pretendido una presentación lo más sencilla e ilustrativa posible, utilizando un lenguaje prácticamente coloquial apelando a la intuición de los conceptos. Ellos facilitarán el conocimiento en detalle de la tecnología que es objeto de este libro y de su aplicación práctica. El siguiente capítulo, profundiza en este nivel de conocimiento conceptual para asociarlo a condiciones matemáticas de estabilidad, a partir de las cuales se llevará a cabo el desarrollo de la tecnología.

## Capítulo 2

# Escenarios, Notaciones y Condiciones de Estabilidad

### 2.1 Introducción

Este capítulo progresa en la descripción de los conceptos de control adaptativo predictivo expuestos en el capítulo anterior, definiendo los distintos escenarios en los que pueden ser objeto de aplicación, introduciendo notaciones para definir un lenguaje matemático de análisis y determinando las condiciones de diseño que garantizarán el rendimiento deseado del conjunto del sistema de control.

Después de definir los diferentes escenarios, describiremos matemáticamente la ecuación del proceso y las dos funciones que realiza el modelo adaptativo predictivo (AP). En primer lugar, consideraremos lo que denominamos el caso ideal sin retardos puros en el proceso, posteriormente consideraremos la existencia de retardos puros y finalmente abordaremos lo que denominamos el caso real, que considera hipótesis propias de las aplicaciones de control industriales. En segundo lugar, definiremos el objetivo de control desde la perspectiva de la estabilidad, introduciendo los conceptos de estabilidad global y asintótica para el conjunto del sistema de control adaptativo predictivo.

Finalmente enunciaremos una Conjetura que establece condiciones para el diseño del Bloque Conductor y para el diseño del Mecanismo de Adap-

tación que, en caso de ser verificadas, garantizarán el diseño estable del conjunto del sistema de control adaptativo predictivo y, por ende, su rendimiento deseado.

## 2.2 Escenarios para el análisis y el diseño

En este apartado introduciremos, sin entrar todavía en la notación, los diferentes escenarios que pueden considerarse cuando nos planteamos el problema del diseño de un sistema de control adaptativo predictivo, en relación con el proceso y su entorno de operación. Para definir estos escenarios en un marco teórico que permita dicho diseño y su análisis de manera sistemática, es necesario utilizar un modelo matemático que describa la dinámica del proceso y su interacción con el entorno. Este modelo juega un papel relevante en este contexto. En efecto, un sistema de control se concibe para que el proceso real se comporte de acuerdo con ciertas especificaciones y, en la fase de diseño del sistema de control, se considera el modelo como "equivalente" al proceso y se trata de que el modelo bajo la acción de control exhiba sobre el papel el comportamiento deseado.

Es importante señalar que el modelo del proceso y el modelo adaptativo predictivo (AP) son entidades diferentes. Mientras que, como se ha dicho, el primero es una herramienta para describir matemáticamente el proceso, el modelo AP es la herramienta que utiliza el sistema de control para predecir la respuesta del proceso y calcular la acción de control. En éste y en los posteriores capítulos del libro consideraremos modelos lineales en tiempo discreto como los descritos en el Capítulo 1 (Apartado 1.6), tanto para el proceso como para el modelo AP. Ambos modelos no tienen por qué coincidir y en general no lo harán. Es más, el considerar que un proceso está descrito por un modelo supone introducir ciertas hipótesis que pueden ser más o menos realistas dependiendo de las dificultades del proceso y de su interacción con el entorno de operación. En este apartado se definirán unos escenarios de diseño de sistemas de control adaptativo predictivo atendiendo a distintas hipótesis aproximándonos progresivamente al contexto del proceso industrial.

Inicialmente podemos considerar el problema de síntesis de un sistema de control adaptativo predictivo en lo que denominaremos *caso ideal* y que responde a las siguientes hipótesis:

- a) El proceso se describe mediante ecuaciones lineales con parámetros constantes.
- b) Las ecuaciones del proceso y las del modelo son del mismo orden.
- c) No existen ruidos de medida ni perturbaciones no medibles actuando sobre el proceso.

Sin embargo, si queremos garantizar la operación satisfactoria de un sistema de control adaptativo predictivo en un entorno industrial, el problema de síntesis deberá considerar unas condiciones más realistas que las anteriores, como pueden serlo las siguientes:

- a1) El proceso puede ser descrito por ecuaciones lineales, pero con parámetros variables con el tiempo.
- b1) Las ecuaciones del proceso y del modelo tienen órdenes diferentes.
- c1) Existen ruidos de medida y perturbaciones no medibles actuando aleatoriamente sobre el proceso.

Las hipótesis anteriores nos sirven para definir los diferentes escenarios o *casos reales* que serán considerados en este libro y que son los siguientes:

- **Caso real sin diferencia de estructuras:** En este caso se mantendrán las hipótesis del caso ideal a y b, pero la hipótesis c será sustituida por la hipótesis c1.
- **Caso real con diferencia de estructuras:** En este caso solo se mantendrá la hipótesis a del caso ideal, pero las hipótesis b y c serán sustituidas por las hipótesis b1 y c1.
- **Caso real con parámetros variables con el tiempo:** Este escenario está definido por las hipótesis a1, b1 y c1. La primera de estas hipótesis tiene en cuenta la naturaleza no lineal y variable con el tiempo del proceso industrial. Debido a esta naturaleza, al intentar describir el proceso con ecuaciones lineales, ocurrirán cambios en sus parámetros originados por cualquier variación en las condiciones del entorno de operación.

## 2.3 Proceso y modelo AP en el caso ideal

Como se ha presentado en el Capítulo 1 y describe la Figura 2.1, el esquema de control adaptativo predictivo resulta de la combinación de un sistema de control predictivo y un sistema adaptativo. Dicha combinación, como ya se ha explicado, no consiste en la simple yuxtaposición de ambos sistemas, sino que explota el beneficio de su interacción. En efecto, el conocimiento que el modelo adaptativo adquiere de la dinámica del proceso mediante el mecanismo de adaptación es utilizado por el modelo predictivo del sistema de control predictivo para calcular la señal de control.

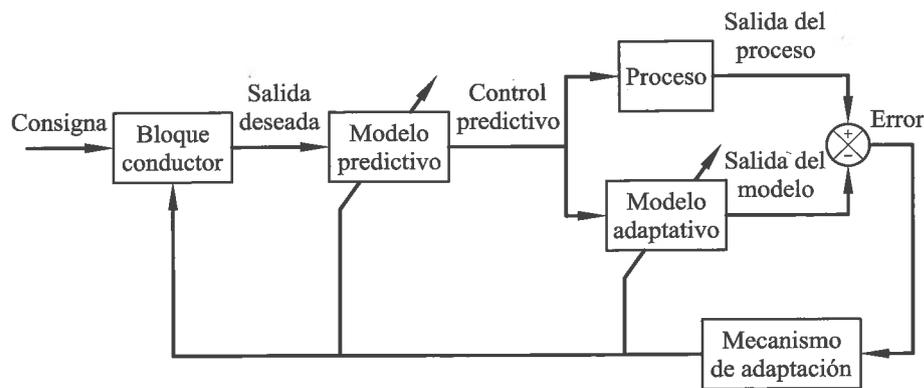


Figura 2.1: Esquema global de control adaptativo predictivo.

Podemos entender mejor esta combinación considerando que ambos sistemas comparten un mismo modelo, que es ajustado periódicamente por el mecanismo de adaptación y que realiza dos funciones distintas, una en el esquema de control predictivo, y otra en el sistema adaptativo. Este modelo compartido recibe el nombre de *modelo adaptativo predictivo (AP)* aludiendo a las dos funciones que realiza.

En este apartado consideraremos el escenario ideal a partir de dos ejemplos sencillos, uno sin y otro con retardos puros, para dar una descripción matemática del proceso y de las dos funciones del modelo AP. Asimismo introduciremos notaciones que nos permitirán generalizar dichas descripciones y que serán utilizadas a lo largo de los desarrollos y demostraciones presentados en este libro.

### 2.3.1 Ejemplo de proceso sin retardos puros

En este primer ejemplo consideraremos que el proceso que aparece en la Figura 2.1 puede ser descrito por la siguiente función de transferencia en  $z$ :

$$T(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}. \quad (2.1)$$

Como puede observarse, este proceso no contiene retardos, excepto el retardo inherente a la discretización. No se consideran ruidos o perturbaciones actuando sobre el proceso y su comportamiento dinámico está regido por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2), \quad (2.2)$$

donde  $u$  e  $y$  representan las variables de entrada y salida respectivamente.

Una de las dos funciones que realiza el modelo AP, tal y como puede observarse en la Figura 2.1, es la de generar la salida del modelo adaptativo. Esta salida del modelo es una estimación de la salida del proceso que puede generarse en cada instante  $k$  de dos maneras distintas, representadas por las siguientes ecuaciones para el ejemplo que estamos considerando:

$$\hat{y}(k|k-1) = \hat{a}_1(k-1)y(k-1) + \hat{a}_2(k-1)y(k-2) + \hat{b}_1(k-1)u(k-1) + \hat{b}_2(k-1)u(k-2), \quad (2.3)$$

$$\hat{y}(k|k) = \hat{a}_1(k)y(k-1) + \hat{a}_2(k)y(k-2) + \hat{b}_1(k)u(k-1) + \hat{b}_2(k)u(k-2). \quad (2.4)$$

El término  $\hat{y}(k|k-1)$  representa la estimación de la salida del proceso en el instante  $k$ , que se calcula según (2.3) utilizando los valores de los parámetros del modelo AP ( $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_1, \hat{b}_2$ ) dados por el mecanismo de adaptación en el instante  $k-1$ . Por su parte,  $\hat{y}(k|k)$  indica la estimación de la salida del proceso también en el instante  $k$  pero utilizando toda la información disponible hasta el instante  $k$ , en particular los parámetros del modelo AP más recientes, adaptados en el instante  $k$ . La estimación realizada por la ecuación (2.3) se llama estimación *a priori* de la salida del proceso por estar calculada a partir de la información recibida en el instante previo  $k-1$ . La realizada por la ecuación (2.4) se llama estimación *a posteriori*. En ambos casos, de ser los parámetros del modelo AP iguales a los del proceso, se tendría una estimación exacta de la salida del proceso, lo que justifica la elección de (2.3) y (2.4) para describir la función estimadora del modelo AP.

El tipo de notación utilizada en las ecuaciones anteriores será la habitual en el resto del libro. En general, para una variable genérica cuyo valor medido en un instante  $k$  se representa por  $v(k)$ , se expresará en la forma  $\hat{v}(k_f|k_i)$  la estimación de su valor en un instante  $k_f$  utilizando únicamente la información disponible hasta el instante  $k_i$ , incluyendo en esta información tanto las variables de entradas y salidas del proceso como los parámetros del modelo AP. Por su parte, al referirnos a un parámetro genérico en la forma  $p(k)$  estaremos indicando que es un parámetro del modelo que describe el proceso, mientras que la notación  $\hat{p}(k)$  significará la estimación de este parámetro calculada por el mecanismo de adaptación en el instante  $k$  indicado.

La otra función que realiza el modelo AP consiste en calcular la acción de control predictivo. Para ello calcula, en cada instante  $k$ , la predicción de la salida futura del proceso, iguala esta predicción al valor deseado y despeja la acción de control que verifica dicha igualdad. En el ejemplo sin retardos puros que estamos considerando, la predicción se realiza para el instante  $k+1$  en la siguiente forma:

$$\hat{y}(k+1|k) = \hat{a}_1(k)y(k) + \hat{a}_2(k)y(k-1) + \hat{b}_1(k)u(k) + \hat{b}_2(k)u(k-1). \quad (2.5)$$

En esta ecuación,  $\hat{y}(k+1|k)$  representa la predicción de la salida del proceso para el instante  $k+1$  realizada en el instante  $k$ , utilizando por tanto el valor de los parámetros del modelo AP y de las entradas y salidas del proceso actualizados todos en dicho instante  $k$ . Nótese que esta ecuación utiliza la misma notación introducida en (2.3) y (2.4) ya que la predicción de la salida del proceso en el instante  $k+1$  no deja de ser una estimación de la salida en el instante  $k+1$  utilizando todo el conocimiento adquirido de la dinámica del proceso hasta el instante  $k$ .

Igualando la salida predicha en (2.5) a un valor deseado expresado en la forma  $y_d(k+1)$ , se obtiene el siguiente control adaptativo predictivo:

$$u(k) = \frac{y_d(k+1) - \hat{a}_1(k)y(k) - \hat{a}_2(k)y(k-1) - \hat{b}_2(k)u(k-1)}{\hat{b}_1(k)}. \quad (2.6)$$

Con objeto de facilitar la generalización de los conceptos expuestos previamente para este ejemplo y simplificar la escritura de las ecuaciones co-

respondientes, introduciremos las siguientes notaciones adicionales:

$$\begin{aligned} \theta^T &= [a_1, a_2, b_1, b_2], \\ \hat{\theta}(k)^T &= [\hat{a}_1(k), \hat{a}_2(k), \hat{b}_1(k), \hat{b}_2(k)], \\ \hat{\theta}_0(k)^T &= [\hat{a}_1(k), \hat{a}_2(k), \hat{b}_2(k)]; \quad \hat{\theta}_1(k) = \hat{b}_1(k), \\ \phi(k-1)^T &= [y(k-1), y(k-2), u(k-1), u(k-2)], \\ \phi(k)^T &= [y(k), y(k-1), u(k), u(k-1)], \\ \phi_0(k)^T &= [y(k), y(k-1), u(k-1)], \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde  $T$  indica el vector traspuesto.

De acuerdo con estas notaciones, los parámetros del proceso se agrupan en un vector  $\theta$  y análogamente los parámetros del modelo AP en un vector  $\hat{\theta}(k)$ . De la misma forma se define un vector  $\phi$  que contiene valores de las variables de entrada y salida que intervienen en las ecuaciones en distintos instantes de tiempo.

Utilizando las notaciones anteriores, las ecuaciones (2.2) a (2.6) pueden expresarse en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y(k) &= \theta^T \phi(k-1), \\ \hat{y}(k|k-1) &= \hat{\theta}(k-1)^T \phi(k-1), \\ \hat{y}(k|k) &= \hat{\theta}(k)^T \phi(k-1), \\ \hat{y}(k+1|k) &= \hat{\theta}(k)^T \phi(k) = \hat{\theta}_0(k)^T \phi_0(k) + \hat{\theta}_1(k)u(k), \\ u(k) &= \frac{y_d(k+1) - \hat{\theta}_0(k)^T \phi_0(k)}{\hat{\theta}_1(k)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Estas ecuaciones simplifican notablemente los desarrollos al expresar las distintas relaciones entre entradas y salidas como simples productos escalares entre vectores de parámetros y vectores de entradas-salidas. Además estas expresiones son más generales que las equivalentes en (2.2) - (2.6) ya que su expresión no cambiaría en caso de que el proceso y el modelo adaptativo fueran de orden superior al considerado en este caso. Simplemente, habría que aumentar las dimensiones de los vectores de acuerdo con el orden apropiado.

### 2.3.2 Ejemplo de proceso con retardos puros

En este segundo ejemplo consideraremos que el proceso de la Figura 2.1 responde a la siguiente función de transferencia en  $z$ :

$$T(z) = z^{-1} \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}. \quad (2.9)$$

El proceso es de primer orden y tiene, además del retardo de discretización, un retardo puro de un período de control. Tampoco se consideran ruidos o perturbaciones actuando sobre el proceso y su comportamiento dinámico está descrito por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + b_1 u(k-2). \quad (2.10)$$

En este caso, para expresar matemáticamente las dos funciones que realiza el modelo AP, existen las dos alternativas que vamos a considerar a continuación.

#### Alternativa 1

Las estimaciones a priori y a posteriori de la salida del proceso en el instante  $k$  (primera función del modelo AP) podrían expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k|k-1) &= \hat{a}_1(k-1)y(k-1) + \hat{b}_1(k-1)u(k-2), \\ \hat{y}(k|k) &= \hat{a}_1(k)y(k-1) + \hat{b}_1(k)u(k-2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

En ambos casos puede observarse que, debido a la existencia de un retardo puro, la estimación calculada en el instante  $k$  no depende de la acción de control aplicada al proceso en el instante  $k-1$ , sino de la acción  $u(k-2)$  aplicada en  $k-2$ .

La función de predicción del modelo AP puede describirse mediante la ecuación

$$\hat{y}(k+1|k) = \hat{a}_1(k)y(k) + \hat{b}_1(k)u(k-1), \quad (2.12)$$

donde puede observarse que, debido al retardo puro, la salida predicha en  $k+1$  no depende de la acción de control en  $k$ , sino de la acción de control

en  $k-1$ , por lo que la acción de control  $u(k)$  no puede calcularse a partir de esta ecuación. Para que la predicción de la salida del proceso sea función de la señal de control  $u(k)$ , debemos considerar la predicción de dicha salida en el instante  $k+2$ , la cual dependerá de la salida en el instante  $k+1$ . Como no se dispone de la medida de la salida del proceso en el instante  $k+1$ , ésta puede sustituirse por la estimación de dicha medida utilizando la propia ecuación (2.12). Con ello la predicción en cuestión puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+2|k) &= \hat{a}_1(k)\hat{y}(k+1|k) + \hat{b}_1(k)u(k) \\ &= \hat{a}_1(k)^2 y(k) + \hat{b}_1(k)u(k) + \hat{a}_1(k)\hat{b}_1(k)u(k-1), \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde aparece explícitamente la acción de control  $u(k)$ .

Sustituyendo en (2.13) la salida predicha del proceso en el instante  $k+2$  por la correspondiente salida deseada  $y_d(k+2)$ , obtenemos

$$u(k) = \frac{y_d(k+2) - \hat{a}_1(k)^2 y(k) - \hat{a}_1(k)\hat{b}_1(k)u(k-1)}{\hat{b}_1(k)}, \quad (2.14)$$

que representa el cálculo de la señal de control adaptativo predictivo para esta alternativa.

#### Alternativa 2

La segunda alternativa para definir las dos funciones del modelo AP considera la sustitución recursiva del valor de  $y(k-1)$ , obtenido utilizando el modelo del proceso (2.10), en la propia ecuación (2.10), con lo que se deduce la siguiente ecuación equivalente para describir el comportamiento dinámico del proceso:

$$\begin{aligned} y(k) &= a_1[a_1 y(k-2) + b_1 u(k-3)] + b_1 u(k-2) \\ &= a_1^2 y(k-2) + b_1 u(k-2) + a_1 b_1 u(k-3). \end{aligned} \quad (2.15)$$

En esta ecuación el valor de la salida del proceso medida en el instante  $k$  es función de las entradas y salidas del proceso medidas en el instante  $k-2$  y previos. Dado que en el contexto del control adaptativo predictivo los parámetros del proceso son desconocidos, podemos reescribir la ecuación (2.15) en la forma

$$y(k) = a_1^* y(k-2) + b_1^* u(k-2) + b_2^* u(k-3). \quad (2.16)$$

A partir de esta forma de representar la dinámica del proceso, la primera función del modelo AP de estimar la salida del proceso puede definirse mediante las ecuaciones siguientes:

$$\hat{y}(k|k-1) = \hat{a}_1(k-1)y(k-2) + \hat{b}_1(k-1)u(k-2) + \hat{b}_2(k-1)u(k-3), \quad (2.17)$$

$$\hat{y}(k|k) = \hat{a}_1(k)y(k-2) + \hat{b}_1(k)u(k-2) + \hat{b}_2(k)u(k-3), \quad (2.18)$$

donde (2.17) genera la estimación a priori y (2.18) la estimación a posteriori y los parámetros del modelo AP son una estimación de los parámetros de la ecuación del proceso (2.16).

La función de predicción del modelo AP queda ahora definida mediante la ecuación:

$$\hat{y}(k+2|k) = \hat{a}_1(k)y(k) + \hat{b}_1(k)u(k) + \hat{b}_2(k)u(k-1), \quad (2.19)$$

donde la salida predicha del proceso para el instante  $k+2$  es explícitamente función de la señal de control predictivo  $u(k)$ . Sustituyendo en (2.19) la salida predicha del proceso en el instante  $k+2$  por la correspondiente salida deseada  $y_d(k+2)$ , se obtiene la señal de control

$$u(k) = \frac{y_d(k+2) - \hat{a}_1(k)y(k) - \hat{b}_2(k)u(k-1)}{\hat{b}_1(k)}, \quad (2.20)$$

que representa el cálculo de la acción de control adaptativo predictivo para esta alternativa.

Las dos alternativas consideradas para tratar este ejemplo son válidas. Sin embargo seguiremos esta segunda alternativa por razones de simplicidad en los desarrollos que vamos a presentar en este libro cuando se consideren procesos con retardos puros.

Al igual que en el primer ejemplo, con objeto de facilitar la generalización de los resultados obtenidos y simplificar la escritura de las ecuaciones correspondientes, introduciremos para este ejemplo las notaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \theta^T &= [a_1^*, b_1^*, b_2^*], \\ \hat{\theta}(k)^T &= [\hat{a}_1(k), \hat{b}_1(k), \hat{b}_2(k)], \\ \hat{\theta}_0(k)^T &= [\hat{a}_1(k), \hat{b}_2(k)]; \quad \hat{\theta}_1(k) = \hat{b}_1(k), \\ \phi(k)^T &= [y(k), u(k), u(k-1)], \\ \phi_0(k)^T &= [y(k), u(k-1)], \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde  $\theta$  y  $\hat{\theta}(k)$  son los vectores de parámetros del proceso y del modelo AP respectivamente y  $\phi(k)$  es el vector de entradas y salidas. Utilizando estas notaciones las ecuaciones (2.16) – (2.20) pueden ahora escribirse en la forma

$$\begin{aligned} y(k) &= \theta^T \phi(k-d), \\ \hat{y}(k|k-1) &= \hat{\theta}(k-1)^T \phi(k-d), \\ \hat{y}(k|k) &= \hat{\theta}(k)^T \phi(k-d), \\ \hat{y}(k+d|k) &= \hat{\theta}(k)^T \phi(k) = \hat{\theta}_0(k)^T \phi_0(k) + \hat{\theta}_1(k)u(k), \\ u(k) &= \frac{y_d(k+d) - \hat{\theta}_0(k)^T \phi_0(k)}{\hat{\theta}_1(k)}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde el entero  $d$  representa la suma del retardo de discretización y el retardo puro del proceso. En el ejemplo que estamos considerando el retardo puro ha sido 1 y por tanto tenemos  $d=2$ .

Estas ecuaciones representan de forma simplificada la dinámica del proceso y las dos funciones del modelo AP en el ejemplo en cuestión. Además son generales en el sentido de que sirven para cualquier caso en que el proceso y el modelo AP sean de orden superior al considerado en el ejemplo y el proceso tenga un número cualquiera de retardos puros.

## 2.4 Descripción general en el caso real

### 2.4.1 Descripción del proceso

Para ilustrar el caso real con parámetros variables con el tiempo, consideraremos un proceso monovariante cuya relación de entrada/salida, utilizando una notación similar a la introducida en el capítulo anterior, viene dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} y_a(k) &= \sum_{i=1}^n a_i(k)y_a(k-i) + \sum_{i=1}^m b_i(k)u_a(k-r-i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p c_i(k)w_a(k-r_1-i) + \xi(k), \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde  $y_a$ ,  $u_a$  y  $w_a$  son los valores auténticos (exentos de ruido), en el instante  $k$  y anteriores, de la salida, entrada y perturbación medible del proceso,

respectivamente. Los números enteros  $r$  y  $r_1$  representan los retardos puros en períodos de control asociados a la entrada y perturbación medible del proceso, respectivamente. La variable  $\xi(k)$  representa el efecto de las perturbaciones no medibles en la salida del proceso en el instante  $k$ . Los parámetros del proceso son  $a_i$ ,  $b_i$  y  $c_i$  que son en general desconocidos y variables con el tiempo.

Utilizando la ecuación (2.23) para expresar las salidas del proceso  $y_a$  en los instantes  $k-1, \dots, k-r$ , y sustituyendo recursivamente estos valores en el segundo miembro de la propia ecuación (2.23), de la misma forma realizada con la ecuación del proceso (2.10) en el ejemplo de proceso con retardos puros del caso ideal del apartado anterior, la ecuación (2.23) puede escribirse en la forma

$$y_a(k) = \sum_{i=1}^n a_i^*(k) y_a(k-r-i) + \sum_{i=1}^{m+r} b_i^*(k) u_a(k-r-i) + \sum_{i=1}^{p+r} c_i^*(k) w_a(k-r_1-i) + \xi(k), \quad (2.24)$$

donde los parámetros  $a_i^*$ ,  $b_i^*$  y  $c_i^*$  se obtienen a partir de  $a_i$ ,  $b_i$  y  $c_i$ .

Utilizando una notación más sencilla como en los ejemplos del caso ideal, la ecuación (2.24) puede expresarse en la forma

$$y_a(k) = \theta(k)^T \phi_a(k-d) + \xi(k), \quad (2.25)$$

en la que

$$\phi_a(k-d)^T = [y_a(k-d), y_a(k-d-1), \dots, y_a(k-d-n+1), u_a(k-d), u_a(k-d-1), \dots, u_a(k-d-m+2), w_a(k-d_1), w_a(k-d_1-1), \dots, w_a(k-p-d-d_1+2)]$$

y

$$\theta(k)^T = [a_1^*(k), a_2^*(k), \dots, a_n^*(k), b_1^*(k), b_2^*(k), \dots, b_{m+r}^*(k), c_1^*(k), c_2^*(k), \dots, c_{p+r}^*(k)],$$

siendo  $\phi_a(k-d)$  y  $\theta(k)$  los vectores de entrada/salida y de parámetros del proceso en los instantes  $k-d$  y  $k$  respectivamente, definidos de forma similar a la utilizada en el caso ideal con retardos. El entero  $d$  representa el tiempo de retardo asociado a la entrada del proceso e incluye el retardo de discretización más el retardo puro, es decir,  $d = r + 1$ , y  $d_1$  es el retardo equivalente asociado a la perturbación medible,  $d_1 = r_1 + 1$ .

Los valores medidos de las variables del proceso difieren de sus valores auténticos debido a errores de medida, ruidos, etc. Las siguientes ecuaciones tienen en cuenta estas circunstancias:

$$\begin{aligned} y(k) &= y_a(k) + n_y(k), \\ u(k) &= u_a(k) + n_u(k), \\ w(k) &= w_a(k) + n_w(k), \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde  $y(k)$ ,  $u(k)$  y  $w(k)$  son las variables medidas de salida, entrada y perturbaciones medibles del proceso respectivamente, mientras que  $n_y(k)$ ,  $n_u(k)$  y  $n_w(k)$  son las correspondientes señales de error o ruido asociadas a dichas variables.

Teniendo en cuenta (2.26), podemos definir el vector  $\phi$  para este caso de la forma siguiente:

$$\phi(k) = \phi_a(k) + n_\phi(k). \quad (2.27)$$

Este vector, de forma similar al caso ideal, es conocido como vector de entradas/salidas o vector de regresión. Sustituyendo (2.26) y (2.27) en la ecuación del proceso (2.25), obtenemos

$$\begin{aligned} y(k) &= \theta(k)^T \phi(k-d) + \Delta(k), \\ \Delta(k) &= n_y(k) - \theta(k)^T n_\phi(k-d) + \xi(k). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nos referiremos a  $\Delta(k)$  como señal de perturbaciones, ya que representa el efecto de las perturbaciones no medibles y los ruidos de medida actuando sobre el proceso. Las suposiciones acerca de la relación entre las entradas y salidas del proceso se corresponden con las hipótesis a1 y c1 del caso real, en las cuales se considera la existencia de perturbaciones no medibles, ruidos de medida y parámetros del proceso variables con el tiempo.

La ecuación del proceso (2.28) puede escribirse también en la forma

$$y(k) = \theta_o(k)^T \phi_o(k-d) + \theta_1(k) u(k-d) + \Delta(k), \quad (2.29)$$

donde  $\theta_1(k)$  es el parámetro incluido en el vector  $\theta(k)$  en la ecuación del proceso (2.28) que multiplica en el producto escalar la señal de control en el instante  $k-d$ ,  $u(k-d)$ . Los vectores  $\theta_o(k)$  y  $\phi_o(k-d)$  resultan de excluir el parámetro  $\theta_1(k)$  y la señal de control  $u(k-d)$  del vector de parámetros  $\theta(k)$  y del vector de entradas/salidas  $\phi(k-d)$ , respectivamente.

El vector de parámetros  $\theta_0(k)$  y el parámetro  $\theta_1(k)$  se suponen siempre acotados y el valor absoluto de  $\theta_1(k)$  se supone mayor que una cierta constante positiva, es decir,  $|\theta_1(k)| > \nu > 0$ .

### 2.4.2 Descripción de las dos funciones del modelo AP

La Figura 2.2 presenta el esquema global de control adaptativo predictivo introduciendo las notaciones simplificadas que utilizaremos a continuación en la descripción matemática de las dos funciones del modelo AP en el caso real aquí considerado.

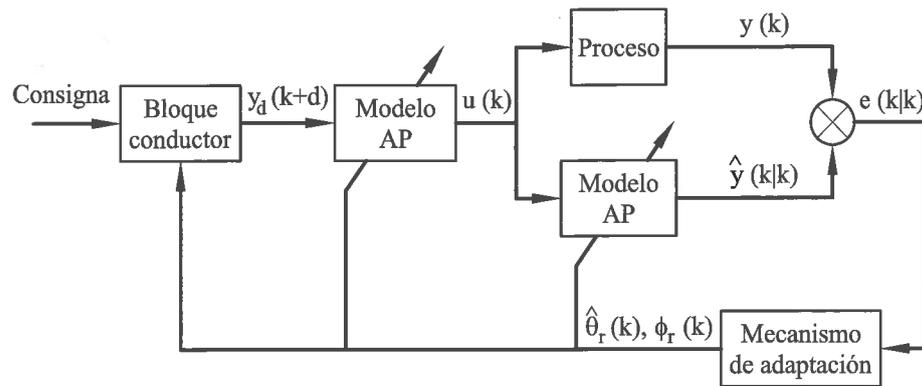


Figura 2.2: Esquema global de control adaptativo predictivo.

En su funcionamiento en el sistema adaptativo, el modelo AP generará en este caso una estimación a posteriori de la salida del proceso en el instante  $k$  a partir de un vector de parámetros estimados y de un vector de entradas/salidas, cuyas dimensiones serán iguales o inferiores a los vectores equivalentes previamente considerados en la descripción del proceso (2.25). Dicha estimación se expresará pues en la forma

$$\hat{y}(k|k) = \hat{\theta}_r(k)^T \phi_r(k-d), \quad (2.30)$$

donde

$$\phi_r(k-d)^T = [y(k-d), y(k-d-1), \dots, y(k-d-n_r+1), \\ u(k-d), u(k-d-1), \dots, u(k-d-m_r+1), \\ w(k-d_1), w(k-d_1-1), \dots, w(k-d_1-p_r+1)]$$

$$\hat{\theta}_r(k) = [\hat{a}_1(k), \hat{a}_2(k), \dots, \hat{a}_{n_r}(k), \hat{b}_1(k), \hat{b}_2(k), \dots, \hat{b}_{m_r}(k), \\ \hat{c}_1(k), \hat{c}_2(k), \dots, \hat{c}_{p_r}(k)].$$

Así pues las dimensiones de  $\phi_r$  y  $\hat{\theta}_r$  serán iguales o menores que las dimensiones de  $\phi$  y  $\theta$ . El vector  $\phi_r(k-d)$  contiene un subconjunto de las más recientes entradas y salidas del proceso incluidas en  $\phi(k-d)$ . Estas suposiciones tienen en cuenta la hipótesis b1 del caso real (Apartado 2.2), en la cual se considera que las ecuaciones del proceso y del modelo tienen órdenes diferentes.

Los errores de estimación a posteriori y a priori vendrán dados ahora por las expresiones

$$e(k|k) = y(k) - \hat{y}(k|k) = y(k) - \hat{\theta}_r(k)^T \phi_r(k-d) \quad (2.31)$$

$$e(k|k-1) = y(k) - \hat{y}(k|k-1) = y(k) - \hat{\theta}_r(k-1)^T \phi_r(k-d). \quad (2.32)$$

La función de predicción del modelo AP queda ahora definida mediante la expresión

$$\hat{y}(k+d|k) = \hat{\theta}_r(k)^T \phi_r(k). \quad (2.33)$$

Cuando  $r > r_1$ , algunos términos en  $\phi_r(k)$  relacionados con la perturbación  $w$  no habrán sido todavía medidos en el instante  $k$  y, ya que generalmente serán desconocidos, se considerará que mantienen el último valor medido. Por razones de simplicidad consideraremos en lo que sigue que  $r \geq r_1$ .

Aplicando el principio de control predictivo, es decir, sustituyendo el valor predicho por el deseado en  $k+d$ ,  $y_d(k+d)$ , obtenemos la expresión

$$y_d(k+d) = \hat{\theta}_r(k)^T \phi_r(k). \quad (2.34)$$

Esta ecuación puede asimismo escribirse en la forma

$$y_d(k+d) = \hat{\theta}_{r_0}(k)^T \phi_{r_0}(k) + \hat{\theta}_1(k)u(k), \quad (2.35)$$

donde  $\phi_{r_0}(k)$  y  $\theta_{r_0}(k)$  resultan de excluir en  $\phi_r(k)$  y  $\theta_r(k)$  la señal de control  $u(k)$  y el correspondiente parámetro  $\theta_1(k)$ , respectivamente.

A partir de (2.35), la ley de control predictivo puede escribirse en la forma

$$u(k) = \frac{y_d(k+d) - \hat{\theta}_{ro}(k)^T \phi_{ro}(k)}{\hat{\theta}_1(k)}. \quad (2.36)$$

Obviamente el mecanismo de adaptación deberá garantizar siempre que el parámetro  $\hat{\theta}_1(k)$  no tiene el valor cero en ningún instante  $k$ . La diferencia entre la salida del proceso y la salida deseada se define como el *error de seguimiento* o *error de control* y viene dada por

$$\epsilon(k) = y(k) - y_d(k). \quad (2.37)$$

Como vamos a considerar en los apartados siguientes, este error juega lógicamente un importante papel en la caracterización del rendimiento obtenido en la aplicación de control adaptativo predictivo.

## 2.5 Objetivos de control

Recordando los conceptos básicos introducidos en el capítulo anterior, si la dinámica del proceso fuera conocida, la aplicación de control predictivo nos permitiría guiar la salida del proceso a lo largo de trayectorias seleccionadas convenientemente. La precisión de este guía estaría limitada únicamente por el nivel de ruidos y perturbaciones actuando sobre el proceso, los cuales están contenidos en lo que hemos definido en el apartado anterior como la señal de perturbaciones. En este contexto, el objetivo de control quedaría determinado por el objetivo de diseño del bloque conductor, que genera la trayectoria deseada para el proceso, y podría definirse conceptualmente en los dos puntos siguientes:

- La trayectoria deseada deberá conducir la salida del proceso hacia el valor de consigna, fijado por el operador, de acuerdo con una dinámica deseada y, en consecuencia, permanecerá acotada, en tanto en cuanto los cambios que en el valor de consigna pueda introducir el operador permanezcan asimismo acotados, lo que en adelante consideraremos que siempre sucede.
- La trayectoria deseada deberá ser *físicamente realizable*, es decir, la secuencia de señales de control capaz de producir una salida del proceso que siga la trayectoria deseada deberá ser asimismo acotada.

Sin embargo, en la práctica del control de procesos, es difícil disponer de un conocimiento preciso de la dinámica del proceso. Incluso aunque llegáramos a disponer en un cierto momento de este conocimiento, el proceso podría evolucionar variando su dinámica con el tiempo, como generalmente sucede en el dominio industrial. El propósito al añadir un sistema adaptativo al sistema de control predictivo consiste precisamente en llegar a alcanzar, en el entorno variable con el tiempo que estamos considerando, los resultados satisfactorios que el control predictivo podría obtener en el caso de que la dinámica del proceso fuera conocida.

En consecuencia, los objetivos que deberíamos esperar alcanzar con la aplicación de control adaptativo predictivo podrían conceptualmente definirse de la siguiente manera:

1. Después de un cierto tiempo de adaptación, la salida del proceso debería de seguir la trayectoria deseada con un error de seguimiento que debería mantenerse siempre acotado en el caso real y que debería tender a cero en el caso ideal.
- 2. La trayectoria deseada debe responder a la dinámica deseada, ser acotada y físicamente realizable.

El primer punto concierne al diseño del mecanismo de adaptación, mientras que el segundo resume los dos objetivos de diseño apuntados previamente para el bloque conductor. De hecho, la condición de acotación en la secuencia de control que implica la realizabilidad física de la trayectoria deseada viene impuesta en la práctica por los límites en los actuadores que determinan la acción de control al proceso. Asimismo, la condición de acotación en la salida deseada está asociada de forma natural con el rango limitado de variación de los sensores que permiten la medida de las variables del proceso.

Las condiciones de acotación previamente consideradas no representan en la práctica limitaciones de las capacidades de control, dado que cualquier variable que, debido a su naturaleza, evolucionara de forma no acotada, podría ser controlada por medio de una variable asociada a la misma de forma incremental o derivativa, cuyos valores evolucionaran en un cierto rango de variación limitado.

En definitiva, los objetivos de control que acabamos de plantear pueden resumirse diciendo que el fin último del control adaptativo predictivo es

hacer que la salida del proceso siga una trayectoria deseada, acotada y físicamente realizable.

## 2.6 Diseño desde una perspectiva de estabilidad

En este apartado traduciremos a una formulación matemática en términos de estabilidad los objetivos de control que se han planteado de forma intuitiva en el apartado anterior. Esta formulación determinará los posteriores diseños, tanto del bloque conductor como del mecanismo de adaptación, que desarrollaremos en los capítulos siguientes de este libro.

La perspectiva de estabilidad en el diseño del sistema adaptativo ha sido ya mencionada en el Apartado 1.10. En el sistema adaptativo, el mecanismo de adaptación debe llevar a cabo el ajuste de los parámetros del modelo AP con el fin de que la salida de dicho modelo reproduzca tan fielmente como sea posible la salida del proceso cuando ambos, proceso y modelo, reciben la misma señal de entrada. Así pues, resulta natural caracterizar el rendimiento del sistema adaptativo por la diferencia entre la salida del proceso y la del modelo AP. En nuestro caso esta diferencia está representada por el error de estimación a posteriori  $e(k|k)$ .

En el caso ideal, bajo las hipótesis a - c del Apartado 2.2, el resultado que deberíamos esperar de una solución satisfactoria del problema de síntesis del mecanismo de adaptación es que el error  $e(k|k) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$  a partir de cualquier condición inicial. Si obtenemos este resultado, asociando el error de estimación  $e(k|k)$  con el estado del sistema adaptativo teniendo el valor 0 como estado de equilibrio, podemos decir que el sistema adaptativo resultante es globalmente y asintóticamente estable, tal y como se ha definido de manera clásica este concepto en el Apéndice A.

En los casos reales considerados en el Apartado 2.2, no es razonable esperar que la solución al diseño del mecanismo de adaptación nos garantice la convergencia del error de estimación hacia cero, ya que simplemente el ruido de medida podría desviar dicho error de cero, incluso en el caso hipotético de que dicho valor se hubiera alcanzado. Por tanto el resultado que podríamos esperar de una solución satisfactoria al problema de diseño del mecanismo de adaptación sería en este caso que, para cualesquiera que sean las condiciones iniciales, el error debería estar acotado a partir de cierto instante de muestreo  $k_f$  y la correspondiente acotación debería ser la

más pequeña posible teniendo en cuenta el nivel de ruidos, perturbaciones de todo tipo y cambios dinámicos actuando sobre el proceso. Este resultado puede expresarse matemáticamente de la siguiente forma:

$$|e(k|k)| < \bar{M}, \quad \text{para todo } k \geq k_f.$$

En los casos reales podemos asimismo asociar el error  $e(k|k)$  con el estado del sistema adaptativo, pero considerando las perturbaciones y ruidos como entradas externas. En este caso podemos interpretar la anterior condición de acotación del error en términos de los conceptos de estabilidad descritos en el Apéndice A diciendo que el sistema adaptativo es externamente estable.

Al considerar el conjunto del sistema de control adaptativo predictivo, desearíamos relacionar el rendimiento deseado con los correspondientes conceptos de estabilidad previamente considerados para el sistema adaptativo. Así pues, podríamos considerar que el error de seguimiento  $\varepsilon(k)$ , que representa la diferencia entre la salida deseada y la salida del proceso en el instante  $k$ , está relacionado con el estado del conjunto del sistema y, si el sistema adaptativo ha sido diseñado estable, el error de seguimiento debería satisfacer las propiedades de estabilidad previamente consideradas para el error de estimación  $e(k|k)$ .

Sin embargo, este resultado de estabilidad del sistema adaptativo no es suficiente para cubrir los objetivos de rendimiento deseados para el control adaptativo predictivo definidos en el apartado anterior. De hecho, la práctica industrial impone como condición inmediata que la señal de control debe estar entre los límites físicos de los actuadores del proceso. Sin embargo, como analizaremos en el Capítulo 3, para hacer que la salida del proceso siga ciertas trayectorias, podría ser necesario aplicar al proceso señales de control no acotadas. Si la trayectoria deseada fuera de este tipo, aunque los errores de estimación y de seguimiento fueran estables, el rendimiento obtenido por la aplicación de control adaptativo predictivo no sería deseable. De la misma forma, la salida del proceso producida por el control adaptativo predictivo debe de evolucionar dentro del rango de medición de los correspondientes sensores. La misma consideración debería extenderse a las variables consideradas como perturbaciones. Todos estos requisitos sobre las señales de entrada y salida pueden resumirse en la condición de que el vector de entradas/salidas  $\phi(k)$  tiene que estar acotado. Esta condición debe necesariamente formar parte de un rendimiento

satisfactorio del control adaptativo predictivo.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, definiremos el concepto de estabilidad global para el control adaptativo predictivo que corresponde a su rendimiento deseado.

**Definición 2.1:** Se dice que un sistema de control adaptativo predictivo es globalmente estable si se verifican las siguientes condiciones:

- 1)  $|\varepsilon(k)| \leq M < \infty, \quad \forall k \geq k_f > 0,$
- 2)  $\|\phi(k)\| \leq \Omega < \infty, \quad \forall k \geq k_f > 0,$

donde  $\|\cdot\|$  denota la norma euclídea.

Esta definición corresponde al resultado de estabilidad que podemos esperar alcanzar en los casos reales. Para el caso ideal, el resultado de estabilidad deseado corresponde a la siguiente definición.

**Definición 2.2:** Se dice que un sistema de control adaptativo predictivo es globalmente asintóticamente estable si se verifican las siguientes condiciones:

- 1)  $\varepsilon(k) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty,$
- 2)  $\|\phi(k)\| \leq \Omega < \infty, \quad \forall k \geq k_f > 0.$

Los desarrollos metodológicos y teóricos que seguirán en este libro tienen por objeto el diseño de sistemas de control adaptativo predictivo que verifiquen los resultados de estabilidad expuestos en las definiciones anteriores y, particularmente, el diseño del bloque conductor y del mecanismo de adaptación.

## 2.7 Condiciones de estabilidad

Este apartado establece los principios de diseño para sistemas de control adaptativo predictivo, que seguiremos en este libro, por medio de una conjetura. Esta conjetura establece condiciones para el bloque conductor y para

el mecanismo de adaptación que, en caso de ser satisfechas, garantizarán la estabilidad global del conjunto del sistema de control adaptativo predictivo en el sentido de la Definición 2.1 (para el caso real) y de la Definición 2.2 (para el caso ideal) y, como consecuencia, la satisfacción de los objetivos de rendimiento deseados para el sistema de control.

La conjetura considera, tanto en su enunciado como en su demostración, la descripción del proceso y de las dos funciones del modelo AP descritas para el caso real en la Sección 2.4, del cual el caso ideal es un caso particular.

**Conjetura:** Si el Bloque Conductor consigue que la salida deseada  $y_d(k+r+1)$  sea

- 1) acotada, y
- 2) físicamente realizable,

y el Sistema Adaptativo (o el Mecanismo de Adaptación) satisface las propiedades

- a)  $\hat{\theta}_r(k) = \hat{\theta}_r(k-d), \quad \forall k \geq k_f > 0, \quad y$
- b)  $|e(k|k)| \leq M < \infty, \quad \forall k \geq k_f > 0,$

entonces el Sistema de Control Adaptativo Predictivo cumplirá las siguientes propiedades:

- I)  $|\varepsilon(k)| = |y(k) - y_d(k)| \leq M < \infty, \quad \forall k \geq k_f > 0 \quad y$
- II)  $\|\phi(k)\| \leq \Omega < \infty, \quad \forall k \geq k_f > 0.$

□

**Demostración:** La ecuación (2.34), que define la función del modelo AP de igualar la salida predicha a la deseada en el instante  $k+d$ , puede escribirse para el instante  $k$  en la forma:

$$y_d(k) = \hat{\theta}_r(k-d)^T \phi_r(k-d). \quad (2.38)$$

Comparando las ecuaciones (2.30) y (2.38), es obvio que, si se cumple la condición a, podemos deducir:

$$y_d(k) = \hat{y}(k|k), \quad \forall k \geq k_f > 0,$$

y en consecuencia:

$$\varepsilon(k) = e(k|k), \quad \forall k \geq k_f > 0.$$

A partir de este resultado y de la condición b de la Conjetura, la propiedad I se deduce directamente. Por otra parte, si se cumple la condición 1, a partir de la propiedad I previamente probada, se deriva que  $y(k)$  será acotada para todo  $k \geq k_f$ . Adicionalmente, si se cumple la condición 2, asimismo a partir de la propiedad I se deriva por continuidad que  $u(k)$  estará acotada para todo  $k \geq k_f - d$ , y en consecuencia se verifica la propiedad II, lo que concluye la demostración de esta conjetura. ■

En lo que se refiere al diseño del bloque conductor, la verificación de la condición 1 de acotación de la salida deseada es sencilla y solo requerirá en principio la acotación de las consignas correspondientes. Por su parte, la verificación de la condición 2 de realizabilidad física debe tener en cuenta, en primer lugar, los ruidos y perturbaciones no medibles, es decir, el vector de perturbaciones, que de forma prácticamente permanente actúa sobre el proceso real y, en segundo lugar, la dinámica propia del proceso en cuestión.

La consideración del vector de perturbaciones actuando sobre el proceso originó un primer diseño del bloque conductor, diferenciándose del concepto previo de modelo de referencia, en el marco de la denominada estrategia básica de control predictivo. Las limitaciones de la estrategia básica motivaron la consideración de la propia dinámica del proceso en el diseño del bloque conductor y condujeron a la que denominamos estrategia extendida de control predictivo. Ambas estrategias de control predictivo, y los correspondientes diseños del bloque conductor, son objeto de la Unidad Didáctica II.

En lo que concierne al diseño del sistema adaptativo o del mecanismo de adaptación, la condición a) define una forma de convergencia de los parámetros del modelo AP, mientras que la condición b) formula la estabilidad del sistema adaptativo tal y como la hemos considerado en el apartado anterior. Las condiciones a) y b) representan un cambio filosófico o de perspectiva en el diseño de sistemas de control, como vamos a explicar a continuación.

El diseño de sistemas de control ha estado tradicionalmente basado en el conocimiento de las ecuaciones o representación matemática del comportamiento dinámico del proceso. Las distintas metodologías de control han

venido utilizando este conocimiento, al menos teóricamente, para determinar la ley de control a aplicar al proceso. Es por ello que el desarrollo de técnicas de identificación de procesos ha sido una de las áreas donde se ha centrado el esfuerzo investigador en teoría de control.

En consecuencia, es importante hacer notar que las condiciones a) y b) que establece la Conjetura para la obtención de un rendimiento de control deseado no requieren en absoluto la identificación de los parámetros del proceso por medio de los parámetros del modelo AP. En efecto, la condición a) no requiere que los parámetros del modelo AP sean iguales o tiendan a ser iguales a los parámetros del proceso, sino que demanda únicamente que dichos parámetros converjan a ciertos valores que no tienen por qué ser iguales a los del proceso. Adicionalmente la condición b), como ya se ha indicado, demanda la estabilidad del sistema adaptativo.

Así pues, la dificultad de resolver el problema de identificación, que es bien conocida particularmente en el caso de procesos industriales, queda soslayada o sustituida, en el planteamiento enunciado por la Conjetura, por la verificación de unas condiciones que se presentan como menos exigentes o más fáciles de alcanzar.

La Unidad Didáctica III presentará soluciones ilustrativas al problema de síntesis del mecanismo de adaptación en los diferentes contextos del caso ideal, el caso real sin diferencia de estructuras y el caso real con diferencia de estructuras. Se demostrará que los sistemas adaptativos propuestos verifican las condiciones de convergencia y de estabilidad de la Conjetura en el caso de que la sucesión de valores  $\{\|\phi_r(k)\|\}$  sea acotada. Obviamente, la acotación del vector de entradas/salidas no puede garantizarla el sistema adaptativo por sí mismo, ya que la señal de control es producida por el conjunto del sistema de control adaptativo predictivo. Es pues únicamente este sistema global el que puede garantizar la condición de acotación. Sin embargo, se demostrará que los sistemas adaptativos propuestos cumplen propiedades cercanas a las condiciones de la Conjetura y que son inherentes al sistema adaptativo por sí mismo, independientemente de la acotación o no de la sucesión  $\{\|\phi_r(k)\|\}$ . La Unidad Didáctica IV combinará estas propiedades con las de realizabilidad física y acotación de la salida deseada y el principio de control predictivo para demostrar formalmente la acotación de la sucesión  $\{\|\phi_r(k)\|\}$  y, en consecuencia, alcanzar el objetivo deseado en el rendimiento del sistema de control.

En el caso real en el que los parámetros del proceso varían con el tiempo,

la condición a) de la Conjetura puede ser incompatible con el objetivo de control deseado cuando la variación de los mencionados parámetros es permanente. Sin embargo, el Capítulo 6 de la Unidad Didáctica III considerará la síntesis del mecanismo de adaptación para dicho caso y probará una forma de convergencia de los parámetros del modelo AP que, dentro de las restricciones que son razonables en un entorno industrial, será suficiente para alcanzar en la práctica los objetivos deseados para el rendimiento del sistema de control, como se ilustrará en los capítulos de aplicación de este libro.

## 2.8 Del conocimiento conceptual al aprendizaje profundo

Este capítulo ha completado la Unidad Didáctica I, en la que se ha presentado lo que podríamos considerar como el nivel de conocimiento conceptual e intuitivo de la materia que es objeto del libro. Los conceptos básicos han sido expuestos en el capítulo anterior y en éste se les ha asociado un lenguaje matemático que ha permitido un primer nivel de análisis. De esta forma hemos deducido las condiciones que deberán ser verificadas en la materialización práctica de los conceptos para alcanzar los resultados deseados en su aplicación real.

La materialización práctica de los conceptos de control adaptativo predictivo experto (ADEX), expuestos en esta Unidad Didáctica, debe:

1. Realizar una definición concreta de todo el tratamiento de la información que es propio de la operación del sistema en cuestión, verificando las condiciones de estabilidad que para él hemos deducido.
2. Asegurar el soporte, en este caso informático, que permita los cálculos asociados al mencionado tratamiento de la información.
3. Definir la operación del sistema en el entorno apropiado que permita el flujo de información que le es necesario, es decir, la captación en tiempo real de las señales del proceso y la aplicación al mismo de las señales de control generadas.

En este libro, las Unidades Didácticas II, III, IV y VI definen y analizan un diseño para los distintos bloques que determinan el funcionamiento

del control adaptativo predictivo experto. Así la Unidad Didáctica II se centra en el análisis y el diseño del Bloque Conductor y en su operación conjunta con el Modelo Predictivo, incluido en el Bloque de Control; la Unidad Didáctica III se centra en el análisis y el diseño del Mecanismo de Adaptación y la Unidad Didáctica VI presenta un diseño para el Sistema Experto, también incluido en el Bloque de Control.

Asimismo, la Unidad Didáctica VI presenta el diseño y las directrices para la utilización de la plataforma software denominada ADEX COP (Acrónimo de ADEX "Control & Optimization Platform"). Esta plataforma permite la integración de controladores ADEX en la lógica de control de los actuales sistemas comerciales, garantizando de esta forma el soporte informático requerido para los cálculos que deben realizar los mencionados controladores y, al mismo tiempo, el entorno apropiado para su operación.

De acuerdo con el enfoque didáctico de este libro, el conocimiento profundo de la tecnología debe completarse con la experimentación en la práctica. En este sentido, las Unidades Didácticas V y VI presentan al alumno ejemplos de aplicación de control predictivo sin adaptación, control adaptativo predictivo y control adaptativo predictivo experto a distintos procesos reales. Adicionalmente, las Unidades Didácticas I, II y III presentan ejercicios que permiten al alumno, mediante programación, simular procesos y aplicar los conocimientos tecnológicos objeto de dichas unidades. Alternativamente, el alumno podrá realizar vía Internet ejercicios prácticos en un laboratorio virtual para el control adaptativo predictivo experto de procesos simulados.

## E I

---

# Ejercicios de la Unidad Didáctica I

## E1.1 Introducción

Los procesos reales, como se ha considerado en la Unidad Didáctica I, tienen un comportamiento dinámico que puede ser en general aproximado por ecuaciones lineales cuando las variables de entrada y salida del proceso se miden como incrementos con respecto a sus valores de equilibrio. Son muchos los libros de texto que describen la teoría de los sistemas lineales. Los ejercicios que aquí se presentan pretenden realizar un análisis básicamente experimental. Como es sabido, cualquier proceso cuya relación dinámica está expresada por una ecuación lineal en diferencias puede descomponerse en suma de procesos de primero y segundo orden, por lo que los ejercicios en cuestión se centrarán concretamente en estos dos casos.

Los experimentos que se proponen sirven únicamente de ejemplo o guía y para motivar al alumno a que profundice tanto como lo crea oportuno en dicha experimentación, que se justifica debido al hecho de que la aplicación de control adaptativo predictivo (AP), que será objeto de las Unidades Didácticas posteriores, está basada en la utilización de un modelo AP, cuyos parámetros son estimaciones de los parámetros reales del proceso.

Para realizar los ejercicios, el alumno deberá disponer de un entorno de programación que le permita la simulación de procesos cuyo compor-

tamiento dinámico esté regido por ecuaciones en diferencias, o por funciones de transferencia en  $z$ , tales como las consideradas en los capítulos de esta Unidad Didáctica. En los ejercicios en simulación que vamos a considerar, se supondrá que los valores de equilibrio de entrada, salida y perturbaciones medibles del proceso son iguales a cero, por razones de simplicidad, y que los valores de dichas variables se miden como incrementos con respecto a estos valores de equilibrio.

El programa tipo de simulación que considerarán los ejercicios consistirá básicamente en un bucle "for" cuyo índice representará el tiempo de simulación, medido en períodos de control desde un instante inicial 0 hasta el tiempo final del experimento. En cada ejecución del bucle las operaciones a realizar serán:

1. Determinar la entrada al proceso y, en su caso, el valor de la perturbación medible.
2. Ejecutar la ecuación del proceso para obtener el correspondiente valor de la variable de salida y, en su caso, la aplicación de un filtro a esta variable.
3. Almacenar los datos de las variables de entrada-salida para su presentación gráfica o numérica, que sirvan para el correspondiente análisis.

Entornos de programación de uso habitual que permiten la simulación considerada pueden ser Matlab, Excel o cualquier otro que permita la creación de bucles de cálculo con ejecución de ecuaciones en diferencias. Nos referiremos a este entorno de programación como escenario de simulación genérico para la realización de los ejercicios que se proponen en esta Unidad Didáctica.

Los ejercicios que a título de ejemplo se proponen tienen como objeto, sin requerir una programación compleja, que el alumno experimente:

- La relación entre los parámetros del proceso y la naturaleza de estabilidad del mismo y, por lo tanto, su comportamiento dinámico.
- La influencia de la elección que se haga del período de control sobre el valor de los parámetros del proceso.

- La influencia que ejerce el añadir un filtro a la variable de salida en los parámetros del proceso extendido incluyendo el filtro.

## E1.2 Ejercicios

El primer ejercicio pretende experimentar la relación entre los parámetros de un proceso de primer orden y su comportamiento dinámico.

**Ejercicio 1.1.-** Sea un proceso de primer orden descrito por la ecuación

$$y(k) = ay(k-1) + bu(k-1),$$

donde  $k$  es el tiempo discreto de simulación. La función de transferencia es

$$T(z) = \frac{bz^{-1}}{1 - az^{-1}}.$$

En el escenario de simulación genérico, y partiendo de las condiciones iniciales de equilibrio, es decir con todas las variables de entrada-salida iguales a cero, aplicar como señal de control un escalón unitario en el instante de control  $k = 10$ , siendo  $k$  el instante de control (correspondiente al índice del bucle en la simulación), asignando a los parámetros  $a$  y  $b$  del proceso los valores que se indican en los siguientes casos:

- 1)  $a = 0.4$ ;  $b = 0.6$
- 2)  $a = 0.9$ ;  $b = 0.1$
- 3)  $a = 1.0$ ;  $b = 0.1$
- 4)  $a = 1.1$ ;  $b = 0.1$ .

Ajustar convenientemente las escalas de la representación gráfica para todos los casos, teniendo en cuenta la ganancia del proceso en los casos 1 y 2.

□

El ejercicio que se propone a continuación pone de relieve la influencia de la elección del período de control en el valor de los parámetros de la ecuación que representa al proceso.

**Ejercicio 1.2.-** El comportamiento dinámico de un proceso, cuando el período de control es igual a 1 segundo, puede representarse mediante la

ecuación del ejercicio anterior, donde el valor del parámetro  $a$  es igual a 0.9 y el valor del parámetro  $b$  es 0.1. Calcular:

1. La ganancia del proceso.
2. La ecuación que representaría el comportamiento dinámico de este mismo proceso si el período de control fuera igual a 3 segundos.
3. La ecuación que representaría el comportamiento dinámico de este mismo proceso si el período de control fuera igual a  $m$  segundos.
4. La ecuación que representaría el proceso con período de control  $m$  segundos, si la ganancia del proceso se hiciera igual a 5.
5. El límite de los parámetros  $a$  y  $b$  cuando el período de control tiende a infinito.
6. El límite de los parámetros  $a$  y  $b$  cuando el período de control tiende a cero.

Partiendo de las condiciones de equilibrio, representar gráficamente las respuestas a un escalón unitario de las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del proceso cuando el período de control es igual a 1 segundo y cuando el período de control es 3 segundos. Comprobar que el valor numérico de ambas respuestas coincide en los instantes de control correspondientes al último período de control.

□

Los ejercicios que siguen pretenden experimentar, para sistemas de segundo orden, la relación entre el valor de los parámetros de la ecuación del proceso y su respuesta dinámica. El siguiente ejercicio considera procesos cuyas funciones de transferencia tienen polos reales.

**Ejercicio 1.3.-** Sea un proceso de segundo orden cuya ecuación es

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1),$$

donde  $k$  es el tiempo discreto de simulación. La función de transferencia es

$$T(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}.$$

Consideremos la particularización de este proceso genérico asignando valores a sus parámetros en los siguientes casos:

- 1)  $a_1 = 1.6; a_2 = -0.64; b_1 = 0.04$
- 2)  $a_1 = 1.0; a_2 = -0.25; b_1 = 0.25$
- 3)  $a_1 = 0.4; a_2 = -0.04; b_1 = 0.64$
- 4)  $a_1 = 1.0; a_2 = -0.16; b_1 = 0.16$
- 5)  $a_1 = 1.9; a_2 = -0.88; b_1 = 0.02.$

Para cada uno de estos casos:

1. Calcular los polos de la función de transferencia.
2. En el escenario de simulación genérico, partiendo de sus condiciones iniciales de equilibrio, aplicar un escalón unidad y obtener las gráficas correspondientes. Observar experimentalmente la ganancia del proceso y el tiempo de respuesta, que es el tiempo que la salida del proceso tarda en alcanzar una banda de  $\pm 5\%$  alrededor del nuevo valor de equilibrio. □

El siguiente ejercicio considera procesos cuyas funciones de transferencia tienen polos complejos conjugados.

**Ejercicio 1.4.-** Sea un proceso genérico de segundo orden descrito por la ecuación del ejercicio anterior. Consideremos la particularización de este proceso genérico, asignando valores a sus parámetros en los casos siguientes:

- 1)  $a_1 = 1.2; a_2 = -0.37; b_1 = 0.17$
- 2)  $a_1 = 1.2; a_2 = -0.45; b_1 = 0.25$
- 3)  $a_1 = 1.2; a_2 = -0.72; b_1 = 0.52$
- 4)  $a_1 = 1.2; a_2 = -1.00; b_1 = 0.80$
- 5)  $a_1 = 1.2; a_2 = -1.17; b_1 = 0.97.$

Para cada uno de estos casos:

1. Calcular los polos y la ganancia de la función de transferencia.
2. En el escenario de simulación genérico, y partiendo de sus condiciones iniciales de equilibrio, aplicar un escalón unitario, obtener las gráficas correspondientes y observar el tiempo de respuesta. □

Los sistemas de control a los que nos hemos referido en esta Unidad Didáctica y nos referiremos en las siguientes consideraciones que la señal de control se mantiene constante durante el período de control. Esta forma de actuar corresponde a la acción de lo que se conoce como un mantenedor de orden cero en los libros clásicos de control para sistemas discretos. La acción de este tipo de dispositivo introduce siempre un cero en la función de transferencia del proceso. En general, encontraremos ceros en las funciones de transferencia de los procesos. Los dos siguientes ejercicios pretenden experimentar la influencia de estos ceros en la respuesta dinámica del proceso.

**Ejercicio 1.5.-** Sea un proceso genérico de segundo orden descrito por la ecuación

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2),$$

cuya función de transferencia es

$$T(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}.$$

Consideremos la particularización de este proceso genérico asignando valores a sus parámetros en los siguientes casos:

- 1)  $a_1 = 1.0; a_2 = -0.25; b_1 = 0.625; b_2 = -0.125$
- 2)  $a_1 = 1.0; a_2 = -0.25; b_1 = 1.0; b_2 = -0.5$
- 3)  $a_1 = 1.0; a_2 = -0.25; b_1 = 1.5; b_2 = -0.9$
- 4)  $a_1 = 1.0; a_2 = -0.25; b_1 = 1.66; b_2 = -1.16$
- 5)  $a_1 = 1.0; a_2 = -0.25; b_1 = 5.0; b_2 = -4.5$
- 6)  $a_1 = 1.0; a_2 = -0.25; b_1 = -5.0; b_2 = 5.5$ .

Para cada uno de estos casos:

1. Calcular los polos y la ganancia de la función de transferencia.
2. En el escenario de simulación genérico, y partiendo de sus condiciones iniciales de equilibrio, aplicar un escalón unitario, obtener las gráficas correspondientes y observar el tiempo de respuesta.

□

**Ejercicio 1.6.-** Consideremos la particularización de un proceso genérico descrito por la ecuación del ejercicio anterior asignando valores a sus parámetros

metros en los casos siguientes:

- 1)  $a_1 = 1.0; a_2 = -0.25; b_1 = 0.416; b_2 = 0.083$
- 2)  $a_1 = 1.0; a_2 = -0.25; b_1 = 0.333; b_2 = 0.166$
- 3)  $a_1 = 1.0; a_2 = -0.25; b_1 = 0.294; b_2 = 0.205$
- 4)  $a_1 = 1.0; a_2 = -0.25; b_1 = 0.263; b_2 = 0.236$
- 5)  $a_1 = 1.0; a_2 = -0.25; b_1 = 0.238; b_2 = 0.261$ .

Para cada uno de estos casos:

1. Calcular los polos y la ganancia de la función de transferencia.
2. En el escenario de simulación genérico, y partiendo de sus condiciones iniciales de equilibrio, aplicar un escalón unitario y analizar las gráficas correspondientes. □

El siguiente ejercicio experimenta la influencia de la aplicación de un filtro a la salida del proceso en el valor de los parámetros que determinan la ecuación dinámica entre la entrada del proceso y la salida filtrada.

**Ejercicio 1.7.-** Sea un proceso que responde a las ecuaciones

$$y_a(k) = a_1 y_a(k-1) + a_2 y_a(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2),$$

$$y(k) = y_a(k) + n_y(k),$$

donde  $n_y(k)$  es un ruido blanco gaussiano de media 0 y desviación estándar 0.05. Consideramos un filtro de primer orden sobre la variable de salida  $y(k)$  definido por la ecuación

$$y_f(k) = F y(k) + (1 - F) y_f(k-1).$$

Consideremos la particularización de este proceso genérico y del filtro asignando valores a sus parámetros en los casos siguientes:

- 1)  $a_1 = 0.9; a_2 = 0; b_1 = 0.1; b_2 = 0; F = 0.25$
- 2)  $a_1 = 0.9; a_2 = 0; b_1 = 0.1; b_2 = 0; F = 0.75$
- 3)  $a_1 = 1.0; a_2 = -0.25; b_1 = 0.333; b_2 = 0.166; F = 0.25$
- 4)  $a_1 = 1.0; a_2 = -0.25; b_1 = 0.333; b_2 = 0.166; F = 0.75$ .

Para cada uno de estos casos:

1. Calcular los polos, los ceros y la ganancia de la función de transferencia del proceso sin filtro y con filtro, en ausencia de ruido de medida.
2. En el escenario de simulación genérico, y partiendo de sus condiciones iniciales de equilibrio, aplicar al proceso un escalón unitario y obtener las gráficas de la salida del proceso y de la salida filtrada.
3. Repetir el punto anterior eliminando el ruido de medida sobre la salida del proceso.
4. Deducir la ecuación que relaciona directamente la entrada al proceso con la salida filtrada a partir del cálculo realizado en el punto 1.
5. En el escenario de simulación genérico, utilizando como ecuación del proceso la obtenida en el punto anterior y sin considerar ruido de medida, aplicar un escalón unitario. Obtener la gráfica de la salida de este proceso y comprobar que esta gráfica coincide con la gráfica obtenida en el punto 3 para la salida filtrada.

□

### E1.3 Comentarios a los ejercicios

**Ejercicio 1.1:** Puede observarse que en los casos 1 y 2 los procesos son estables, mientras que los casos 3 y 4 corresponden a procesos inestables, aunque los dos tienen naturaleza diferente. En el caso 3 la salida tiende a infinito integrando el valor de la entrada, mientras que en el caso 4 la salida tiende a infinito exponencialmente.

De acuerdo con la teoría clásica de estabilidad de los sistemas lineales, podemos observar que el valor de  $z$  que anula el denominador de la función de transferencia (el polo), coincide en los cuatro casos con el valor del parámetro  $a$ . Por lo tanto, en el plano complejo el polo estará dentro del círculo unidad en los casos 1 y 2; en la circunferencia unidad en el caso 3; y fuera de dicho círculo en el caso 4. Asimismo, se puede observar que, aunque los casos 1 y 2 corresponden a procesos estables, la respuesta en el 1 es más rápida que en el 2. Esto se debe a que el parámetro  $a$  determina la velocidad de la respuesta ante una entrada en escalón, siendo ésta tanto

más rápida cuanto menor sea el valor del citado parámetro  $a$ . Por otro lado, el parámetro  $b$  es el que determina la ganancia del proceso.

De hecho, si introducimos el índice de tiempo  $n = k - k_0$ , donde  $k_0$  es el instante en el que se aplica el escalón unidad a la entrada del proceso, podemos fácilmente observar que la salida del proceso para todo  $n \geq 1$  es

$$y(n) = b(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}).$$

Dado que la parte derecha de esta ecuación es una progresión geométrica cuya razón es  $a$ , podemos escribir

$$y(n) = b \frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

En los casos 1 y 2, siendo  $a < 0$ , el término  $a^n$  tenderá a 0 cuando  $n$  tienda a infinito. En consecuencia la salida del proceso tenderá al valor  $b/(1 - a)$ , que será el valor de la ganancia. Es evidente que cuando  $a$  se aproxime a 0, la salida del proceso alcanzará la ganancia más rápidamente, y cuando se aproxime a 1 lo hará más lentamente, como puede observarse en los resultados del ejercicio.

En el caso 3, dado que el valor de  $a$  es 1, se tiene  $y(n) = nb$ , es decir, la salida del proceso integra el valor de  $b$  a lo largo del tiempo. En el caso 4, al ser  $a > 1$ , observamos que la salida del proceso tenderá a infinito.

**Ejercicio 1.2:** Este ejercicio muestra la influencia de la elección del período de control en el valor de los parámetros del proceso. El alumno puede deducir que cuando el período de control tiende hacia cero, el parámetro  $b$  tiende también hacia cero y el parámetro  $a$  tiende a 1. La explicación intuitiva es que, cuando el período de control tiende a cero, el efecto de una acción de control sobre la salida del proceso en el siguiente período de control, representado dicho efecto por el parámetro  $b$ , también tenderá a cero. Asimismo, para procesos estables, cuando el período de control tiende a cero, el cambio en la salida del proceso también tenderá a cero, y en consecuencia el parámetro  $a$  tenderá a 1. Asimismo, el alumno puede observar que, cuando el período de control tiende a infinito, el parámetro  $b$  tiende a la ganancia del proceso y el parámetro  $a$  tiende a cero. Este resultado es igualmente intuitivo ya que la salida del proceso tenderá a depender únicamente de la acción de control previa cuando el período de control tiende a infinito.

**Ejercicio 1.3:** En los casos 1, 2 y 3 existe un polo doble real igual a 0.8, 0.5 y 0.2 respectivamente. Puede observarse que el tiempo de respuesta aumenta con el valor de la parte real del polo doble. Este valor es aproximadamente de 20 períodos de control en el primer caso, de 7 en el segundo y de 4 en el tercero. Puede observarse asimismo que la ganancia es igual a la unidad en todos los casos. De hecho, el cálculo de la ganancia puede hacerse a partir de los parámetros  $a$  y  $b$  tomando  $z = 1$  en la función de transferencia. En el Apartado 11.4.4 de la Unidad Didáctica VI se explica intuitivamente este resultado.

En el caso 4 existen dos polos reales simples iguales a 0.2 y 0.8. Podemos observar que el tiempo de respuesta en este caso es aproximadamente de 14 períodos de control, estando la primera parte de la respuesta dominada por el polo 0.2 (es decir, una respuesta inicialmente rápida), y la segunda parte dominada por el polo 0.8, lo que hace que sea más lenta en alcanzar el valor permanente.

En el caso 5 existen dos polos reales simples iguales a 0.8 y 1.1. Este segundo se encuentra situado fuera del círculo unidad y determina la inestabilidad del proceso.

**Ejercicio 1.4:** En este ejercicio la parte real del polo conjugado es siempre igual a 0.6, mientras que la parte imaginaria toma, a lo largo de los cinco casos considerados, los valores de 0.1, 0.3, 0.6, 0.8 y 0.9 respectivamente. Puede observarse cómo es la parte imaginaria del polo la que causa un mayor o menor nivel de oscilaciones. En efecto, si la parte imaginaria está cercana a cero, la oscilación es mínima. Esta oscilación aumenta a medida que el aumento de la parte imaginaria aproxima el polo a la circunferencia unidad. La oscilación se automantiene, resultando así un sistema neutramente estable, cuando el polo se sitúa en la circunferencia unidad, mientras que las oscilaciones tienden a crecer de manera ilimitada cuando el polo se sitúa ya fuera del círculo unitario, provocando de esta manera la inestabilidad del proceso.

**Ejercicio 1.5:** En todos los casos la función de transferencia tiene un polo doble igual a 0.5 y un cero que en los casos 1, 2 y 3 vale 0.2, 0.5 y 0.6 respectivamente. En estos casos la rapidez de la respuesta del proceso aumenta a medida que aumenta el valor del cero. Cuando el valor del cero es igual al valor del polo, el cero cancela un polo y la respuesta del proceso

coincide con la de primer orden para dicho polo.

En los casos 4 y 5 el valor del cero es igual a 0.7 y 0.9 respectivamente. Así se produce una sobreoscilación de la respuesta del proceso sobre el valor permanente, que aumenta al acercarse el cero a 1. En el caso 6 el valor del cero es igual a 1.1 (fuera del círculo unidad) y tiene una respuesta que se inicia en sentido contrario al del valor permanente, y es típica de los procesos con inverso inestable. Aunque este cero "inestable" no vuelve inestable la respuesta del proceso, sí que puede desestabilizar el sistema de control adaptativo predictivo del proceso tal como se analiza en la Unidad Didáctica II.

**Ejercicio 1.6:** El valor de los ceros para los distintos casos es  $-0.2$ ,  $-0.5$ ,  $-0.7$ ,  $-0.9$  y  $-1.1$ . Para todos ellos, la respuesta del proceso es similar y sin sobrepasamiento, con un tiempo de respuesta de aproximadamente 8 períodos de control. El efecto del cero inestable sobre el lazo de control será analizado en la Unidad Didáctica II.

**Ejercicio 1.7:** La aplicación de un filtro de primer orden es sencilla y permite, generalmente, mejorar el rendimiento del sistema de control, minimizando el impacto del ruido de medida sobre el mismo. Directrices para el uso de filtros de primer orden se recogen en la Unidad Didáctica VI (Capítulo 11. Apartado 11.4.3). La aplicación de este tipo de filtro añade un polo a la función de transferencia del proceso filtrado, que es igual al valor del complemento a uno de la constante del filtro, sin modificar la ganancia del proceso en cuestión. Asimismo añade un cero en  $z = 0$ . En consecuencia, el añadir un filtro a la salida del proceso cambia los parámetros del proceso bajo control, que en definitiva es el proceso filtrado, e incluso aumenta el orden del mismo. Es por ello que la aplicación de un filtro en un lazo de control no adaptativo requerirá el correspondiente ajuste en los parámetros del controlador. En el contexto adaptativo predictivo este ajuste no será necesario, ya que la modificación paramétrica será tenida en cuenta por el mecanismo de adaptación. Las consideraciones realizadas para un filtro de primer orden son extensibles a filtros de segundo orden y de órdenes superiores.

## E1.4 Comentarios finales

Como ya se ha indicado, los ejercicios considerados en esta Unidad Didáctica se han centrado en un análisis experimental de procesos de primero y de segundo orden, dado que el análisis de procesos de órdenes superiores siempre puede reducirse al análisis de una superposición de este tipo de procesos. Por otra parte, la respuesta del proceso a la señal de control no es de naturaleza diferente a la respuesta a perturbaciones medibles, por lo que la experimentación realizada es igualmente válida para estas últimas.

Se sugiere al alumno que experimente en el escenario de simulación genérico con diferentes definiciones de la ecuación del proceso de órdenes superiores a los considerados en los ejercicios, simulando cambios tanto en la señal de control como en las perturbaciones medibles.

Por último, cualquier proceso multivariable, con  $n$  salidas y  $m$  entradas, puede siempre considerarse descompuesto en  $n$  subprocesos de una salida y  $m$  entradas. Así la experimentación del proceso global equivale a la superposición de las experimentaciones con los subprocesos. Estos subprocesos de una salida y  $m$  entradas pueden considerarse como una simple extensión, añadiendo las perturbaciones medibles que sean pertinentes, de los procesos que han sido objeto de análisis experimental en los ejercicios de esta Unidad Didáctica.

## Unidad Didáctica II

---

# Diseño del Bloque Conductor: Estrategias Básica y Extendida de Control Predictivo

## Resumen de la Unidad Didáctica II

---

En esta Unidad Didáctica se lleva a cabo la materialización tecnológica del concepto de controlador predictivo en el estadio de definición de la metodología de aplicación. Esta materialización se realiza a partir de las condiciones de rendimiento deseado, definidas previamente en la Unidad Didáctica I, y se describe en dos capítulos.

El primer capítulo de esta Unidad Didáctica, Capítulo 3 del libro, se centra en la formulación matemática del principio de control predictivo y su aplicación a través de la denominada Estrategia Básica. Además analiza el concepto de Bloque Conductor e introduce los conceptos de Salida Deseada Proyectada (SDP) y Salida Deseada Conductora (SDC). Estos conceptos son de gran importancia en la unificación de la teoría de estabilidad en el contexto del control adaptativo predictivo y por tanto en el análisis teórico presentado en este libro. La incapacidad de la estrategia básica para controlar procesos con inverso inestable es puesta de relieve por medio de un ejemplo que muestra la necesidad de una estrategia extendida.

El segundo capítulo, que es el Capítulo 4 del libro, desarrolla la estrategia extendida de control predictivo. Esta estrategia está basada en la evaluación en cada instante de control de las distintas secuencias de las variables de entrada/salida del proceso que pueden ser predichas en un horizonte de predicción. Este horizonte se extiende en un cierto intervalo de períodos de control y se redefine en cada instante de control. Como ejemplos para la mencionada evaluación, se consideran índices lineales cuadráticos e índices con una secuencia de control predicha en forma de escalón. La capacidad de la estrategia extendida para controlar procesos con inverso inestable, así como sus propiedades de estabilidad y robustez en presencia de errores de modelización, son analizadas e ilustradas por medio de diversos ejemplos. También se considera la significación de los principales parámetros de diseño, en particular la longitud del horizonte de predicción.

Esta Unidad Didáctica se completa con ejercicios que tienen como objeto que el alumno experimente la aplicación de control predictivo a distintos tipos de procesos, utilizando tanto la estrategia básica como la extendida y en un entorno mono o multivariable.

## Capítulo 3

# Estrategia Básica de Control Predictivo

### 3.1 Introducción

Este capítulo sirve de introducción al diseño del bloque conductor en el contexto de la forma más inmediata de aplicación del control predictivo, que denominamos *Estrategia Básica*. La introducción del concepto de bloque conductor, y su primer diseño, fueron motivados por la necesidad de garantizar la realizabilidad física de la salida deseada cuando el proceso se ve sometido a ruidos y perturbaciones no medibles, es decir en la generalidad de los casos.

La introducción didáctica del nuevo concepto nos lleva a considerar en primer lugar el concepto previo de modelo de referencia y sus limitaciones, que motivaron el primer diseño del bloque conductor. En la formulación matemática consideraremos procesos monovariantes por razones de simplicidad. La teoría para el caso multivariable no es esencialmente más complicada que para el caso monovariante y se deduce fácilmente como una extensión natural de este último. El caso multivariable se considera en el Apéndice B y se describen aplicaciones en los Capítulos 8 y 9.

El diseño del bloque conductor introduce los conceptos de *Salida Deseada Proyectada* y *Salida Deseada Conductora*, cuyos papeles respectivos serán ilustrados mediante un ejemplo. Un segundo ejemplo servirá para

ilustrar las limitaciones teóricas y prácticas de la estrategia básica de control predictivo y poner de relieve la necesidad de una extensión de la mencionada estrategia, que se presentará en el capítulo siguiente de esta unidad didáctica. El Apéndice A recoge una breve descripción de los conceptos básicos en análisis de sistemas que serán utilizados en este y en el siguiente capítulo.

### 3.2 Estrategia básica de control predictivo

El control predictivo, tal como se ha introducido y descrito en los capítulos anteriores, consiste en calcular la acción de control que hace que la salida predicha del proceso sea igual a una salida deseada. La estrategia básica de control predictivo consiste en la aplicación directa de este principio por medio de un único instante de predicción, calculando la salida deseada de manera independientemente sin tener en cuenta la dinámica propia del proceso bajo control.

Si consideramos un proceso sin retardos puros, la estrategia básica calculará, en cada instante de control  $k$ , la salida deseada para el instante  $k + 1$ , para la cual utilizaremos a partir de ahora la notación  $y_d(k + 1|k)$ . Una vez obtenido este valor, la estrategia básica de control predictivo se resume en la siguiente condición:

$$\hat{y}(k + 1|k) = y_d(k + 1|k), \quad (3.1)$$

donde, de acuerdo con la notación establecida en el capítulo anterior,  $\hat{y}(k + 1|k)$  es la salida del proceso predicha en el instante  $k$  para el instante  $k + 1$ . En caso de que el proceso tuviera  $r$  retardos puros, la condición anterior pasaría a ser

$$\hat{y}(k + r + 1|k) = y_d(k + r + 1|k). \quad (3.2)$$

Las condiciones anteriores son las mismas que las que hemos considerado para obtener el cálculo del control predictivo en el capítulo anterior y tienen, como analizaremos en el capítulo siguiente, una validez general en la aplicación de cualquier estrategia de control predictivo. Como ya hemos indicado, lo que caracteriza la estrategia básica es la forma de calcular la salida deseada y que el cálculo de la señal de control predictivo requiere únicamente un instante de predicción. Una primera solución al diseño de la salida deseada podría basarse en el concepto de modelo de referencia,

utilizado en el marco de otras técnicas de control adaptativo [Lan74]. En el apartado siguiente se introduce este concepto para posteriormente ilustrar cómo sus limitaciones dan lugar al concepto de bloque conductor que se desarrollará en éste y en el siguiente capítulo.

### 3.3 El concepto clásico de modelo de referencia

Para introducir este concepto nos ayudaremos de la Figura 3.1. Cuando el operador de un proceso ha de cambiar el punto de operación de una variable de salida desde un valor  $SP_1$  a un valor  $SP_2$ , lo normal es introducir el cambio correspondiente de consigna de forma instantánea en el panel de control, tal como se ilustra en la gráfica superior de la Figura 3.1. No obstante, en realidad no se desea un cambio instantáneo sino que la variable del proceso se comporte como muestra la gráfica inferior de la Figura 3.1. Es decir, una vez que se decide el cambio de consigna, se espera que la trayectoria de la variable del proceso empiece a evolucionar suavemente hacia el nuevo valor deseado, que adquiera una cierta pendiente y que alcance el nuevo valor deseado suavemente y sin sobreoscilaciones.

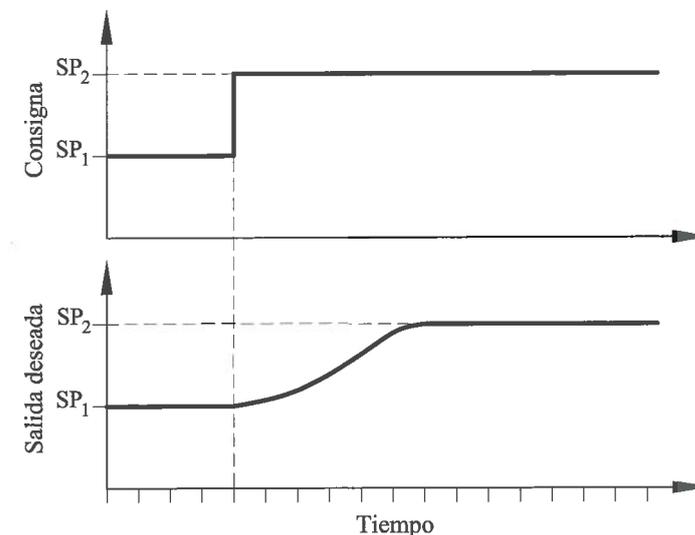


Figura 3.1: Modelo de referencia.

Una trayectoria como la descrita puede ser generada por lo que, en la literatura de control, se ha llamado un modelo de referencia. Este modelo

recibe como entrada el valor deseado o consigna para la variable del proceso y genera como salida una trayectoria de referencia con las características deseadas. Un ejemplo bastante típico de modelo de referencia puede definirse en la forma

$$\begin{aligned} y_r(k+1) &= \alpha_1 y_r(k) + \alpha_2 y_r(k-1) + \beta_1 y_{sp}(k) + \beta_2 y_{sp}(k-1), \\ y_r(0) &= y_0; \quad y_r(-1) = y_1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde  $y_r$  e  $y_{sp}$  representan la salida de referencia y la consigna respectivamente. Con esta ecuación puede obtenerse toda una trayectoria para los instantes de tiempo  $k = 0, 1, \dots$  a partir de unos valores iniciales  $(y_0, y_1)$  y en función de los valores dados para la consigna. Los parámetros  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  de este modelo de segundo orden pueden elegirse [Oga70] para que la transición entre dos valores constantes de consigna se haga con un amortiguamiento crítico, evitando sobreoscilaciones, y con una constante de tiempo que determinará la velocidad del transitorio. Adicionalmente, la ganancia del modelo de referencia debe ser igual a 1, ya que el incremento de entrada en las consignas tiene que ser igual al incremento permanente en la trayectoria de referencia. Obviamente, el modelo (3.3) es solo un ejemplo. Un diseño general del modelo de referencia puede utilizar modelos de orden superior y otras formas distintas de representación.

### 3.4 El nuevo concepto de bloque conductor

En este apartado introduciremos el concepto de bloque conductor [Mar76] con un ejemplo más didáctico que real, pero que trata de describir con claridad la motivación del concepto.

Consideremos un globo aerostático que empieza su maniobra de aterrizaje a 1 Km de altura y, para el cual, deseamos determinar una trayectoria deseada para su altitud en sucesivos instantes discretos de tiempo con un periodo de 1 minuto hasta que alcance el suelo en forma suave. Consideremos que deseamos que el globo descienda en el primer periodo de 1 minuto desde 1 Km hasta 800 m y que esta proporción de descenso se mantenga en los sucesivos periodos hasta el aterrizaje. Una forma de generar esta trayectoria deseada puede ser mediante el siguiente modelo de referencia:

$$\begin{aligned} y_r(k+1) &= 0.8 y_r(k), \quad k = 0, 1, \dots \\ y_r(0) &= 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

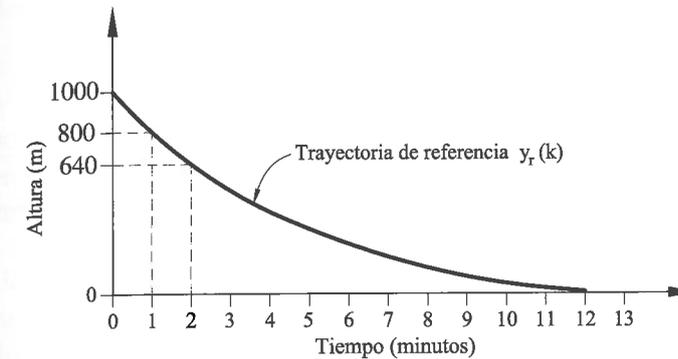


Figura 3.2: Generación de la trayectoria deseada por modelo de referencia.

cuya evolución temporal se ilustra en la Figura 3.2.

Consideremos que una ráfaga de viento afecta al globo y en el minuto 3, en lugar de descender al valor deseado de 512 m, sube hasta una altitud de 850 m. En estas condiciones, cabe preguntarse si es conveniente que en el minuto 4 la salida deseada sea igual a la salida de referencia de 409.6 m, es decir si es bueno pretender que el globo descienda de 850 a 409.6 metros en un único periodo de 1 minuto. La respuesta a esta pregunta es lógicamente negativa y por lo tanto no queremos que la salida deseada para el minuto 4 sea igual a la salida del modelo de referencia.

Pero si ello es así, hemos de plantearnos cuál será la salida deseada más conveniente y cómo podemos generarla. Parece razonable que la altura deseada en el minuto 4 deberá tener en cuenta la altura real del globo en el minuto 3 y, por otra parte, podemos desear mantener la razón de decrecimiento que habíamos elegido para generar la trayectoria de referencia. Una solución de diseño que puede satisfacer ambas premisas es la que se representa en la Figura 3.3 y puede concretarse en la ecuación

$$y_d(k+1) = 0.8 y(k). \quad (3.5)$$

Observemos las relaciones entre el modelo de referencia (3.4) y la ecuación (3.5). Para el cálculo de la salida deseada en (3.5), se mantiene el mismo factor de decrecimiento deseado, es decir la misma dinámica deseada que en el modelo (3.4). En (3.4) y como se ve en la Figura 3.2, el modelo de referencia genera la salida deseada fijando toda una trayectoria desde el

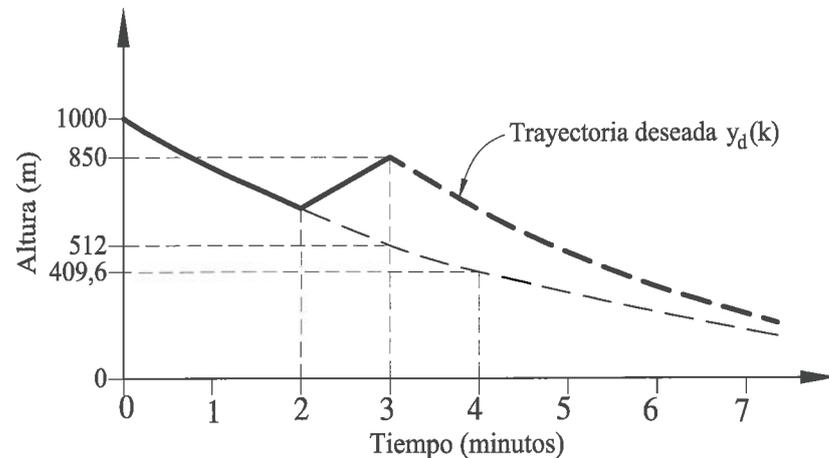


Figura 3.3: Generación de la trayectoria deseada por bloque conductor.

instante inicial ( $k = 0$ ) sin que se tenga en cuenta cuál es la evolución de la salida del proceso a lo largo del tiempo. En cambio, en (3.5) y según se observa en la Figura 3.3, la salida deseada se calcula a partir del valor real medido de la salida del proceso en cada nuevo instante de control.

El pequeño cambio introducido en (3.5) en relación a (3.4) nos hace pasar, en el diseño de la trayectoria deseada, del concepto de modelo de referencia al concepto de bloque conductor. La diferencia esencial entre ambos está en que el bloque conductor tiene en cuenta la salida real del proceso y la utiliza para generar la salida deseada, mientras que el modelo de referencia genera la salida deseada de forma autónoma, sin tener en cuenta la evolución real de la salida del proceso. Este cambio de enfoque en el diseño de la trayectoria deseada es fundamental para que dicha trayectoria pueda garantizar la condición de ser físicamente realizable cuando el proceso se ve sometido a diferentes tipos de perturbaciones, como se irá viendo a lo largo del libro. De momento, siguiendo con el ejemplo del globo en la Figura 3.3, nuestra intuición puede hacernos ver que una salida deseada generada por un modelo de referencia será insensible a las desviaciones de la salida producidas por la existencia de ruidos y perturbaciones no medibles, lo que puede introducir acciones de control excesivamente enérgicas, pudiendo llegar incluso a la inestabilidad, en su intento de forzar a la salida del proceso a seguir una trayectoria prefijada que puede ir quedando más y

más alejada de sus valores medidos.

Por su parte, el nuevo enfoque del bloque conductor mantiene una misma dinámica deseada como objetivo para la evolución de la salida del proceso, pero hace este objetivo más flexible al adaptarlo al estado real del proceso en cada nuevo instante de control. Como se ve en la Figura 3.3, una nueva trayectoria es definida con la misma dinámica a partir del valor actual de la salida, lo que contribuye a reducir acciones drásticas de control y ayuda por tanto a la realizabilidad física de la salida deseada generada, es decir, que ésta sea compatible con acciones de control más moderadas, estabilizando el rendimiento del sistema de control.

### 3.5 El concepto de trayectoria deseada proyectada

De acuerdo con la filosofía introducida por el bloque conductor, pretendemos que la salida deseada pertenezca a una trayectoria que, partiendo de los valores medidos de la salida del proceso, alcance la consigna en forma suave, sin acciones de control abruptas, pero al mismo tiempo rápidamente y sin oscilaciones. Esta trayectoria que tendrá que ser redefinida en cada instante  $k$ , cuando llega la nueva medida de la salida del proceso, será denominada *trayectoria deseada proyectada* ( $TDP_k$ ) [MR96].

Una forma sencilla y eficaz de generar este tipo de trayectoria consiste en utilizar la salida de un modelo estable con la dinámica deseada, que recibe como entrada la consigna y que, como condiciones iniciales, tiene las salidas del proceso medidas en el instante actual y en instantes anteriores. A título de ejemplo, este tipo de trayectoria puede definirse mediante la ecuación

$$y_d(k+j|k) = \sum_{i=1}^p \alpha_i y_d(k+j-i|k) + \sum_{i=1}^q \beta_i y_{sp}(k+j-i) \quad (3.6)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots$$

donde

$$y_d(k+1-i|k) = y(k+1-i); \quad i = 1, \dots, p.$$

Por ejemplo, una manera razonable de elegir los parámetros que determinan la dinámica de la trayectoria deseada ( $p, q, \alpha_i, \beta_i$ ) es hacer que la evolución de la misma hacia una consigna constante  $y_{sp}$ , a partir de unas condiciones iniciales  $y(k)$  e  $y(k-1)$ , tenga la forma mostrada en la Figura 3.4. Estos

parámetros pueden elegirse de forma idéntica a la considerada para los del modelo de referencia (3.3) [Oga70], es decir que correspondan a los de un modelo de segundo orden con un factor de amortiguamiento crítico y una ganancia estática igual a 1. La constante de tiempo del modelo determinará la velocidad de acercamiento de la trayectoria deseada proyectada a la consigna.

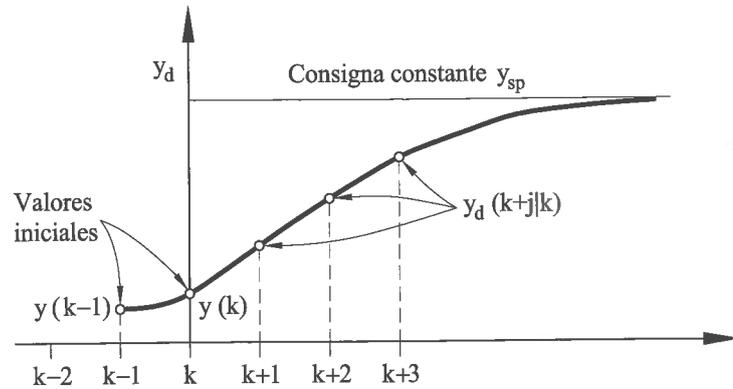


Figura 3.4: Trayectoria deseada proyectada  $TDP_k$ .

Así pues, el tipo de respuesta mostrado en la Figura 3.4 es similar a la del modelo de referencia previamente considerado en el Apartado 3.3, con la diferencia esencial de que la trayectoria generada por el modelo de referencia, a partir de un instante  $k = 0$ , no considera ningún tipo de redefinición en los siguientes instantes  $k = 1, 2, \dots$ . De esta forma, como ya se ha considerado anteriormente, la trayectoria de referencia ignora la evolución real de la salida del proceso, pudiendo separarse de ésta, ser físicamente irrealizable y conllevar inestabilidad. Esta misma carencia de realimentación en la trayectoria de referencia de la salida real del proceso afecta de la misma manera a la aplicación práctica de los denominados sistemas adaptativos con modelo de referencia [Lan74].

El bloque conductor es un concepto esencial en control predictivo, sin el cual la estrategia básica de control predictivo se aproximaría a la estrategia de control de mínima varianza [Ast70].

### 3.6 Ejemplo de aplicación de la estrategia básica

Supongamos la dinámica del proceso descrita por la ecuación

$$y(k) = \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^m b_i u(k-i) + \Delta(k), \quad (3.7)$$

que es un caso particular de la ecuación (2.28), analizada en el Apartado 2.4, donde  $\Delta(k)$  es el vector de perturbaciones. Consideremos asimismo que la predicción de la salida del proceso para el instante  $k+1$ , hecha en el instante  $k$ , viene dada por la ecuación del modelo AP:

$$\hat{y}(k+1|k) = \sum_{i=1}^{\hat{n}} \hat{a}_i y(k+1-i) + \sum_{i=1}^{\hat{m}} \hat{b}_i u(k+1-i), \quad (3.8)$$

que es asimismo un caso particular de la ecuación (2.33) del Apartado 2.4.

La aplicación de la estrategia básica de control predictivo en este caso contemplará la ejecución de las dos operaciones siguientes en cada instante de control  $k$ :

- 1) Cálculo de la salida deseada en  $k+1$ , que corresponderá al valor en  $k+1$  de la trayectoria deseada proyectada  $TDP_k$ :

$$y_d(k+1|k) = \sum_{i=1}^p \alpha_i y(k+1-i) + \sum_{i=1}^q \beta_i y_{sp}(k+1-i). \quad (3.9)$$

- 2) Cálculo de la señal de control predictivo  $u(k)$  en la forma

$$u(k) = \frac{y_d(k+1|k) - \sum_{i=1}^{\hat{n}} \hat{a}_i y(k+1-i) - \sum_{i=2}^{\hat{m}} \hat{b}_i u(k+1-i)}{\hat{b}_1}. \quad (3.10)$$

A continuación describiremos la aplicación de esta estrategia de control a un proceso continuo cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+4s)} \quad (3.11)$$

y cuya respuesta a un escalón se presenta en la Figura 3.5.

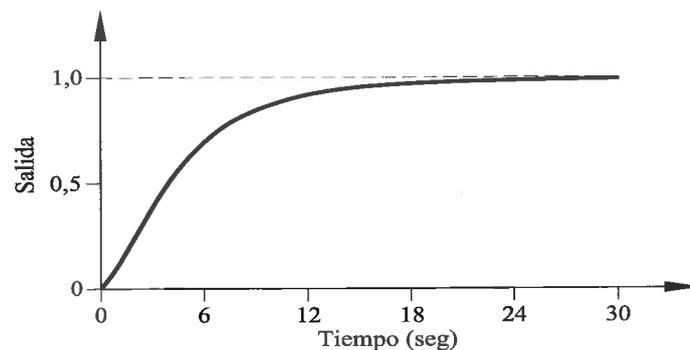


Figura 3.5: Respuesta a un escalón del proceso (3.11).

La ley de control (3.10) se aplica con un periodo de 2 segundos. Para este periodo de control, la ecuación en diferencias que describe la dinámica del proceso en tiempo discreto, obtenida según el procedimiento descrito en el Apéndice A (Apartado A.2.5), toma la forma

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2), \quad (3.12)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.7419 & a_2 &= -0.0821 \\ b_1 &= 0.2364 & b_2 &= 0.1038. \end{aligned} \quad (3.13)$$

En este ejemplo consideraremos que no hay errores de modelización y, por lo tanto, que el modelo predictivo será igual al del proceso. Es decir,  $n = m = 2$  y los valores de los parámetros  $\hat{a}_i$  y  $\hat{b}_i$  en (3.8) serán iguales a los del proceso expresados en (3.13). Sin embargo, consideraremos que el actuador tiene límites en los incrementos de las señales de control aplicadas al proceso. Para calcular la salida deseada  $y_d(k+1|k)$  utilizaremos

la ecuación (3.9) con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.667 & \alpha_2 &= -0.111 \\ \beta_1 &= 0.333 & \beta_2 &= 0.11. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Nuestra intención es ejecutar los pasos de cálculo correspondientes a unos pocos instantes de control con el fin de ilustrar, con ayuda de la Figura 3.6, cómo funciona la estrategia de control.

Consideraremos que en el instante inicial  $k = 0$  el proceso está en equilibrio con las variables de entrada y salida iguales a cero. A partir de esta situación, aplicaremos la ley de control (3.10) con el propósito de conducir la salida del proceso a su consigna, que es igual a 1. La salida deseada para el instante siguiente se calcula de acuerdo con (3.9) a partir de la consigna y de las salidas previas del proceso en los instantes  $k = 0$  y  $k = -1$  (ambas son iguales a 0), resultando  $y_d(1|0) = 0.333$ . Como hemos considerado previamente, el valor de  $y_d(1|0)$  pertenece a una trayectoria deseada proyectada que evoluciona hacia la consigna de acuerdo con la dinámica elegida al designar los parámetros de la ecuación (3.9). Esta trayectoria se indica como  $TDP_0$  en la Figura 3.6.

A partir del valor de  $y_d(1|0)$ , la ley de control (3.10) calcula la acción de control, que resulta ser  $u(0) = 1.41$ . Sin embargo, el valor de la acción de control realmente aplicado al proceso no es el valor calculado sino 0.4 ya que éste es el valor del límite de saturación incremental del actuador. Conociendo este límite,  $u(0)$  se redefine igual a 0.4 con el fin de que sea utilizado propiamente en los cálculos futuros del control predictivo mediante (3.10).

Obviamente, si no existieran límites de control y el modelo predictivo fuera una representación perfecta del proceso (tal y como se ha considerado en este ejemplo), la salida predicha  $\hat{y}(1|0)$ , que se ha igualado a la salida deseada  $y_d(1|0)$ , sería igual a la salida del proceso  $y(1)$  medida en el instante siguiente. Sin embargo, en general, la predicción no será correcta debido, entre otras razones, a límites de control y errores de modelización. En tal caso la salida  $y(1)$  medida en  $k = 1$  no será igual a la salida deseada. Esto es justamente lo que sucede en nuestro ejemplo, donde la salida medida en el instante 1 es  $y(1) = 0.094$  en lugar de 0.333. Si este error no existiera, podríamos considerar como salida deseada  $y_d(2|1)$  en el siguiente instante el valor siguiente sobre la misma trayectoria deseada proyectada  $TDP_0$ . Sin embargo, la existencia de este error invita a abandonar la  $TDP_0$  y

a redefinir una nueva trayectoria  $TDP_1$  partiendo del valor medido  $y(1)$ , como puede observarse en la Figura 3.6.

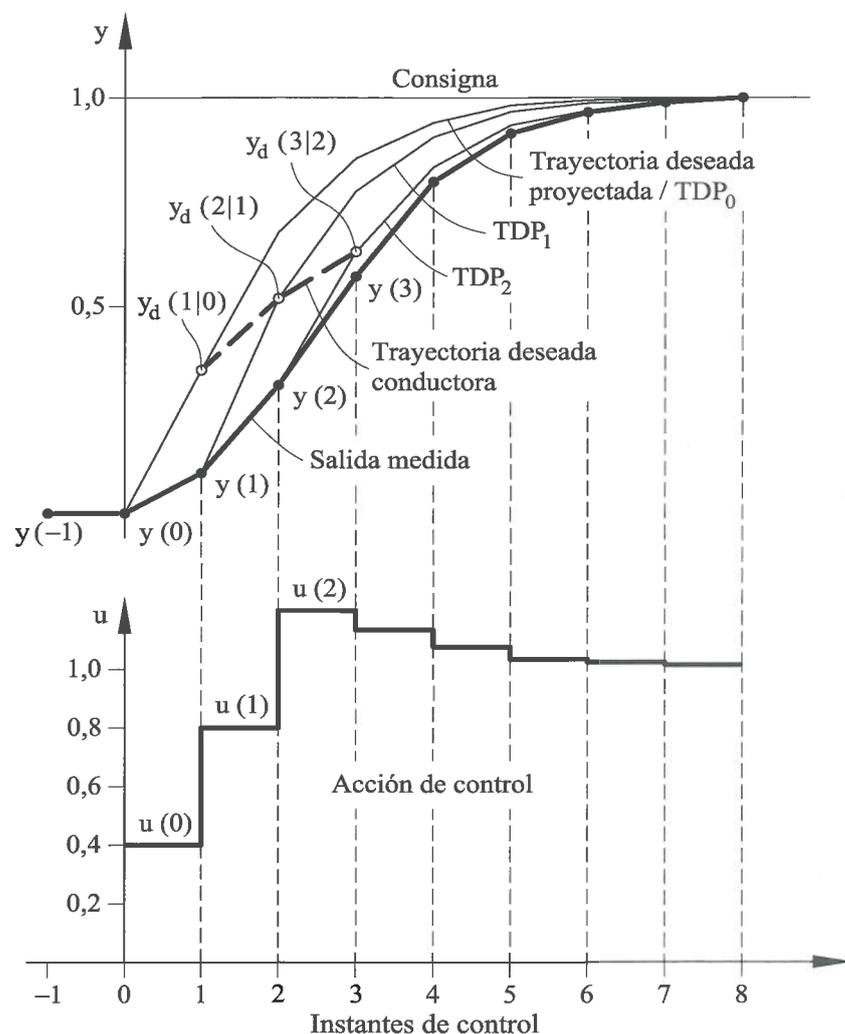


Figura 3.6: Trayectorias deseadas y de salida del proceso bajo control predictivo.

En la trayectoria  $TDP_1$  encontramos el valor  $y_d(2|1) = 0.506$  de la salida deseada que ha sido calculado de forma similar por medio de (3.9). A partir de este valor, la ecuación (3.10) genera el siguiente valor de la acción de control  $u(1) = 1.87$ . También en este caso el control aplicado al proceso, debido a los límites incrementales de control, será únicamente 0.8 y originará una salida  $y(2) = 0.247$ . Este valor difiere de nuevo de la

salida deseada y requiere de la redefinición de una nueva  $TDP_2$  a partir de  $y(2)$ . Los pasos de cálculo que acabamos de detallar se repiten de forma sistemática para cada uno de los sucesivos instantes de control.

### 3.7 El concepto de trayectoria deseada conductora

A partir del comportamiento del bloque conductor descrito previamente, podemos introducir el concepto de *trayectoria deseada conductora (TDC)* [MR96] como la envolvente de los primeros valores de las trayectorias deseadas proyectadas que se definen en los sucesivos instantes de control  $k$ , tal y como se ilustra en la Figura 3.6. Así pues, la *TDC* será generada punto por punto en tiempo real y, a partir de sus valores, se generará la acción de control de acuerdo con el principio de control predictivo. En consecuencia, es esta trayectoria la que tiene que guiar la salida del proceso hacia la consigna en la forma deseada: rápidamente, sin oscilaciones y, además, de forma compatible con una secuencia de control acotada. La Figura 3.6 muestra la evolución final de la salida del proceso en los sucesivos instantes de control. Puede observarse cómo la trayectoria seguida por la salida del proceso converge hacia la trayectoria deseada conductora para finalmente alcanzar con ella la consigna. Asimismo, podemos observar que las acciones de control predictivo se acercan a un valor permanente con incrementos ya compatibles con los límites incrementales del actuador.

El diseño de la trayectoria deseada proyectada en cada instante  $k$  puede ser similar al propuesto en el Apartado 3.5 o puede realizarse con otros criterios como consideraremos en el siguiente capítulo. Pero, cualquiera que sea el diseño, debe asegurar que la trayectoria deseada conductora es capaz de guiar la salida del proceso hacia la consigna de una forma satisfactoria.

### 3.8 Necesidad de extensión de la estrategia básica

En el diseño del bloque conductor y en la aplicación de la estrategia básica considerados en los apartados anteriores, hemos podido constatar que la trayectoria deseada proyectada en cada instante  $k$  ha sido generada independientemente de la naturaleza dinámica del proceso. De hecho, los parámetros  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ , que definen la forma de la trayectoria deseada en cada instante  $k$ , han sido seleccionados sin ninguna relación con los parámetros

$a_i$  y  $b_i$  que definen la dinámica del proceso, o con  $\hat{a}_i$  y  $\hat{b}_i$  que definen el modelo predictivo. A pesar de ello, el proceso utilizado en el ejemplo anterior pertenece a una clase de procesos para los que, si la predicción es correcta, la ley de control predictivo (3.10) genera una secuencia de control que es acotada, independientemente de la clase de trayectoria que se pide que siga el proceso, con la única condición de que la trayectoria sea acotada.

Sin embargo, existe otra clase de procesos para los que el valor absoluto de la secuencia de control generada por (3.10) puede crecer sin limitación con el tiempo cuando requerimos que el proceso siga una trayectoria deseada acotada, generada de la forma considerada en los apartados anteriores. A continuación utilizaremos un ejemplo para ilustrar este comportamiento, que es propio de los procesos con inverso inestable.

Consideremos un proceso continuo descrito por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{1 - 4s}{(1 + s)(1 + 4s)}, \quad (3.15)$$

cuya respuesta a un escalón se muestra en la Figura 3.7.

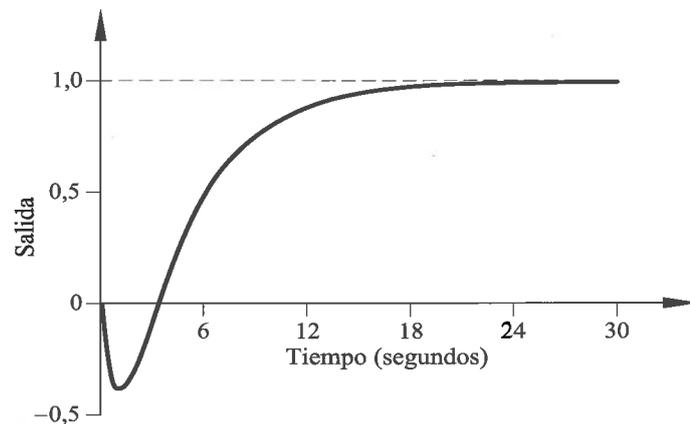


Figura 3.7: Respuesta a un escalón del proceso (3.15).

Este proceso se aproxima al valor permanente de forma similar al del considerado en el ejemplo anterior, por tener los mismos polos las funciones de transferencia de ambos. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, el proceso ahora considerado tiene un inverso inestable por tener un cero po-

sitivo ( $s = 0.25$ ). La respuesta mostrada en la Figura 3.7 es representativa de procesos con esta característica, en la que la respuesta a una acción de control positiva es inicialmente negativa.

Para la aplicación de la ley de control (3.10), hemos utilizado un periodo de control de 2 segundos y los valores consecutivos de salidas deseadas generadas mediante la ecuación (3.9) con los parámetros definidos en (3.14). También en este ejemplo hemos considerado que el modelo predictivo es igual a la representación discreta del proceso, que es de la forma (3.12) con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.7419 & a_2 &= -0.0821 \\ b_1 &= -0.3919 & b_2 &= 0.7321. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Además, en este caso consideraremos que el actuador no tiene límites incrementales, por lo que la aplicación de control predictivo se llevará a cabo en el caso ideal. La Figura 3.8 muestra los resultados obtenidos a partir del instante inicial  $k = 0$ .

La aplicación de control predictivo en estas condiciones ideales hace que todas las trayectorias deseadas proyectadas coincidan con la trayectoria deseada conductora como muestra la Figura 3.8. Asimismo, a diferencia del ejemplo de la sección anterior donde la existencia de límites originaba un error entre la salida deseada y la medida, en este caso la salida deseada y la medida son iguales en cada instante  $k$ . Sin embargo, resulta interesante observar la evolución de la señal de control requerida para hacer que la salida del proceso sea igual a la salida deseada.

En el instante  $k = 0$ , el valor  $y_d(1|0) = 0.333$  se obtiene por medio de (3.9) y este valor produce, por medio de (3.10), una acción de control negativa  $u(0) = -0.850$  para que la salida del proceso  $y(1)$  alcance el valor de  $y_d(1|0)$ . La acción de control requerida para alcanzar  $y_d(2|1) = 0.665$  en el siguiente instante es asimismo negativa,  $u(1) = -2.659$ , pero mucho mayor que la anterior en valor absoluto. La acción de control requerida para alcanzar  $y_d(3|2) = 0.852$  es  $u(2) = -5.95$ . De este análisis se concluye que la acción de control requerida para que la salida del proceso siga la trayectoria deseada en este caso tiende a menos infinito.

La Figura 3.8 ayuda a interpretar este resultado. Esta figura muestra las trayectorias predichas que se obtendrían si la acción de control calculada en cada instante de control se aplicara de forma indefinida al proceso. Por

ejemplo, la trayectoria predicha 0 es la que se obtendría a partir del instante 0 si se aplicara el valor  $u(0) = -0.851$  al proceso de forma permanente. Obviamente, dado que  $u(0)$  ha sido calculado a partir de la ley básica de control predictivo (3.10), la trayectoria predicha 0 coincidirá en el instante 1 con la trayectoria deseada conductora, pero ambas trayectorias se separan a partir del instante 2.

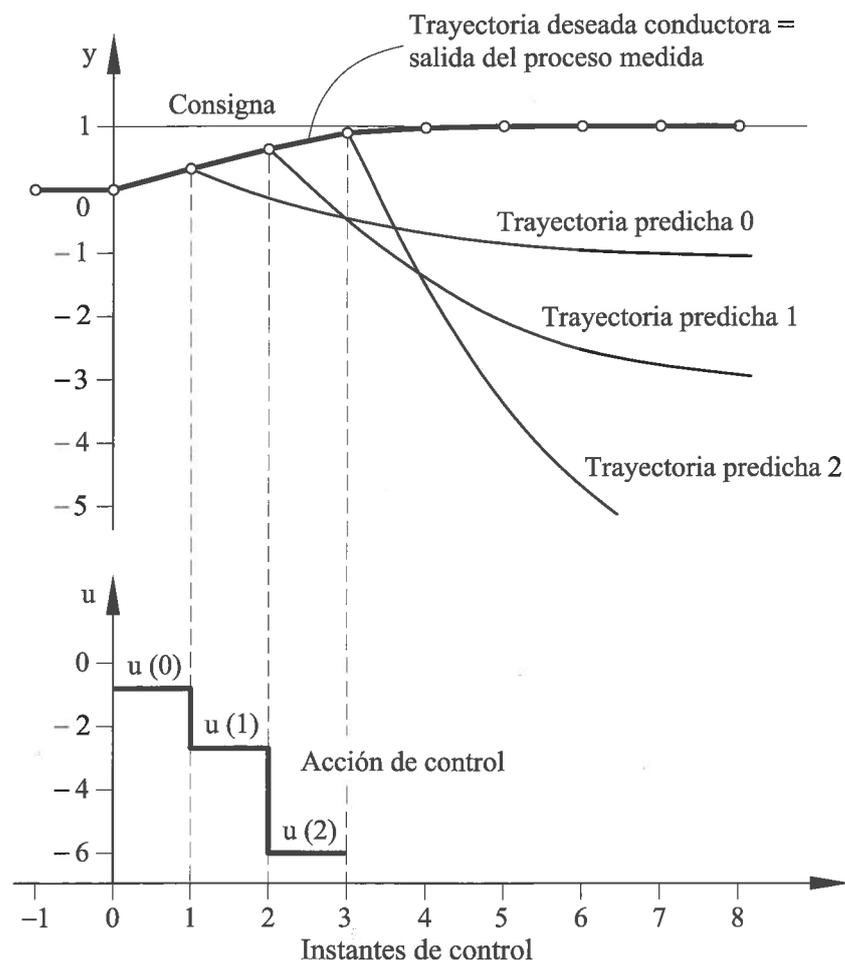


Figura 3.8: Trayectoria deseada conductora, trayectorias predichas y acción de control inestable.

La trayectoria predicha 1, definida a partir del instante  $k = 1$ , es igual a la trayectoria conductora en el instante  $k = 2$  por la misma razón considerada previamente, pero difiere de ella a partir del instante  $k = 3$  de

forma mucho más significativa, tendiendo a un valor permanente mucho más alejado de la consigna que el valor permanente al que tendía la trayectoria predicha 0. Comentarios similares pueden hacerse para la trayectoria predicha 2 definida a partir del instante  $k = 2$ .

En resumen, la señal de control generada por la ley de control (3.10) en cada instante de control  $k$  es capaz de hacer coincidir la trayectoria predicha y la conductora en  $k + 1$ . Sin embargo, las trayectorias predichas, que se obtendrían de mantener las sucesivas acciones de control de forma indefinida, se alejan de forma cada vez más significativa de la consigna, y la acción de control requiere incrementos negativos cada vez mayores para compensar la tendencia natural del proceso creada por las acciones de control previas, como puede observarse en la Figura 3.8.

El comportamiento mostrado en este ejemplo puede ser interpretado también a partir de conceptos clásicos de estabilidad de sistemas discretos, que han sido descritos en el Apéndice A y utilizaremos a continuación.

Aplicando la transformada en  $z$  a la ley de control (3.10) obtenemos

$$y_d(z) = \sum_{i=1}^n a_i z^{-i+1} y(z) + \sum_{i=1}^m b_i z^{-i+1} u(z), \quad (3.17)$$

donde hemos considerado  $\hat{n} = n$ ,  $\hat{m} = m$ ,  $\hat{a}_i = a_i$  y  $\hat{b}_i = b_i$  porque, como ha sido considerado en el ejemplo, no existen diferencias entre el modelo predictivo y el modelo del proceso. Aplicando también la transformada en  $z$  al modelo del proceso (3.7) sin el vector de perturbaciones, obtenemos

$$y(z) = \sum_{i=1}^n a_i z^{-i} y(z) + \sum_{i=1}^m b_i z^{-i} u(z) \quad (3.18)$$

o, de forma equivalente, la función de transferencia discreta

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = H(z^{-1}), \quad (3.19)$$

donde  $A$  y  $B$  son polinomios de la forma

$$A(z^{-1}) = 1 - \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}; \quad B(z^{-1}) = \sum_{i=1}^m b_i z^{-i}. \quad (3.20)$$

Comparando (3.17) y (3.18), deducimos que

$$y(z) = z^{-1} y_d(z), \quad (3.21)$$

y sustituyendo (3.19) en (3.21) se obtiene

$$u(z) = \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} z^{-1} y_d(z). \quad (3.22)$$

La ecuación (3.21) garantiza que la sucesión de salidas  $y(\cdot)$  es igual, con un retardo de un periodo de control, a la sucesión de salidas deseadas  $y_d(\cdot)$ . Por otra parte, (3.22) contiene la inversa de la función de transferencia del proceso (3.19). Por tanto, si el polinomio  $B(z^{-1})$  tiene raíces con  $|z| > 1$ , el proceso tiene inverso inestable y, en consecuencia, es necesaria una sucesión no acotada de valores de  $u(\cdot)$  para que el proceso pueda seguir una sucesión arbitraria de valores de  $y_d(\cdot)$ . En definitiva, en un caso como el considerado, la acción de control, que en teoría es capaz de conducir la salida del proceso hasta la consigna, resulta en la práctica físicamente irrealizable.

En el análisis que acabamos de realizar, hemos considerado una sucesión  $y_d(\cdot)$  completamente arbitraria. Sin embargo, como hemos considerado en el ejemplo, esta sucesión puede ser generada por una ecuación tal como (3.9). A continuación, extenderemos este análisis para considerar esta forma de generar la salida deseada.

Aplicando la transformada en  $z$  a (3.9) obtenemos

$$y_d(z) = \Phi(z^{-1})y(z) + \Delta(z^{-1})y_{sp}(z), \quad (3.23)$$

donde  $F$  y  $D$  son polinomios de la forma

$$\Phi(z^{-1}) = \sum_{i=1}^p \alpha_i z^{-i+1}; \quad \Delta(z^{-1}) = \sum_{i=1}^q \beta_i z^{-i+1}. \quad (3.24)$$

Sustituyendo (3.23) en (3.21) y utilizando (3.19), obtenemos

$$u(z) = \frac{A(z^{-1})\Delta(z^{-1})}{B(z^{-1})[1 - z^{-1}\Phi(z^{-1})]} z^{-1} y_{sp}(z). \quad (3.25)$$

La ecuación (3.25) define la relación en lazo cerrado entre la consigna y la acción de control predictivo y muestra claramente el efecto de los términos dinámicos en el diseño del bloque conductor. Particularmente, podemos observar que los ceros inestables en  $B(z^{-1})$  pueden ser cancelados a través del diseño de  $\Delta(z^{-1})$  de forma que incluya los mismos ceros inestables. De esta forma podría evitarse una sucesión de acciones de control no

acotada. En nuestro ejemplo, la ecuación (3.9) se ha definido sin tener en cuenta los ceros inestables del proceso, obteniéndose en consecuencia una sucesión de acciones de control no acotada.

Sin embargo, el requerimiento de un conocimiento preciso de los ceros inestables del proceso hace del procedimiento de cancelación previamente considerado una solución únicamente teórica, sin posibilidades de ser utilizada en un contexto práctico. El capítulo siguiente presenta una solución general al problema que hemos analizado, extendiendo la forma en la que el control predictivo puede ser aplicado.

## Capítulo 4

# Estrategia Extendida de Control Predictivo

### 4.1 Introducción

La necesidad de superar la inestabilidad vista en la aplicación de la estrategia básica a procesos con inverso inestable fue la principal motivación para el desarrollo de una forma más general de aplicación del control predictivo capaz de explotar su potencial en diferentes tipos de procesos. Esta forma se denomina *estrategia extendida* de control predictivo en un doble sentido. Por un lado, mientras que la estrategia básica consideraba la predicción de la salida del proceso en un único instante futuro, la estrategia extendida considera un horizonte de predicción con un mayor número de instantes. Por otro lado, la estrategia extendida satisface el principio de control predictivo en el primer instante del horizonte de predicción al igual que la estrategia básica.

Este capítulo presenta el marco general de la estrategia extendida de control predictivo basado en un proceso de evaluación de las trayectorias de entrada y salida del proceso predichas mediante un modelo en el horizonte de predicción, proceso que se redefine en cada instante de muestreo. Para llevar a cabo esta evaluación, se utiliza un criterio de rendimiento que prescribe un comportamiento deseado para el proceso en el intervalo de predicción. Como un prototipo de criterio de rendimiento, este capítulo propone la minimización de una función de coste lineal cuadrática. El pro-

blema se plantea y se resuelve en detalle en términos matemáticos y de ahí se obtiene una ley de control predictivo. Se presenta un caso particular de función de coste imponiendo secuencias de control constantes en el horizonte de predicción, de lo que resulta una forma de ley de control más sencilla de diseño y de implementación. Esta ley de control es la que se utilizará en las aplicaciones prácticas de los sistemas de control adaptativo predictivo y adaptativo predictivo experto descritas en posteriores capítulos de este libro. Por tanto, este capítulo incluye un análisis de algunas propiedades esenciales de la ley de control relacionadas con su estabilidad y robustez en conexión con la longitud del horizonte de predicción. Este análisis se lleva a cabo mediante técnicas básicas para describir sistemas lineales y que se resumen en el Apéndice A.

## 4.2 Estrategia extendida de control predictivo

### 4.2.1 La estrategia extendida

Hemos visto en el Capítulo 3 que una aplicación estable de la estrategia básica de control predictivo pasa por una selección apropiada, en cada uno de los sucesivos instantes de muestreo  $k$ , de las trayectorias deseadas proyectadas ( $TDP_k$ ) que garanticen que la salida del proceso siga una trayectoria deseada conductora ( $TDC$ ) compatible con una señal de control acotada.

La generación de la  $TDP$  en el capítulo anterior se ha hecho mediante la ecuación

$$y_d(k+1|k) = \sum_{i=1}^p \alpha_i y(k+1-i) + \sum_{i=1}^q \beta_i y_{sp}(k+1-i). \quad (4.1)$$

Esta ecuación utiliza la salida del proceso en el instante  $k$  y anteriores, pero no tiene en cuenta la naturaleza dinámica del proceso. Parece lógico usar el conocimiento de esta naturaleza dinámica para evaluar la evolución de las variables del proceso en un intervalo futuro y seleccionar la  $TDP$  a partir de esta evaluación. La información de la dinámica del proceso está contenida en el modelo predictivo y la evaluación del comportamiento del proceso puede hacerse mediante la introducción de un criterio de rendimiento en el intervalo de predicción mencionado. Esta forma de aplicar el control predictivo se conoce como la *estrategia extendida*.

La Figura 4.1 ilustra el hecho de que, usando información sobre las entradas y salidas conocidas en el instante  $k$ , podemos considerar un horizonte de predicción  $[k, k+\lambda]$  definido por un número  $\lambda$  de periodos de control, en el que se puede predecir una secuencia de salidas  $\hat{y}(k+j|k)$  mediante un modelo en función de una secuencia de controles  $\hat{u}(k+j-1|k)$ , donde  $j = 1, \dots, \lambda$ .

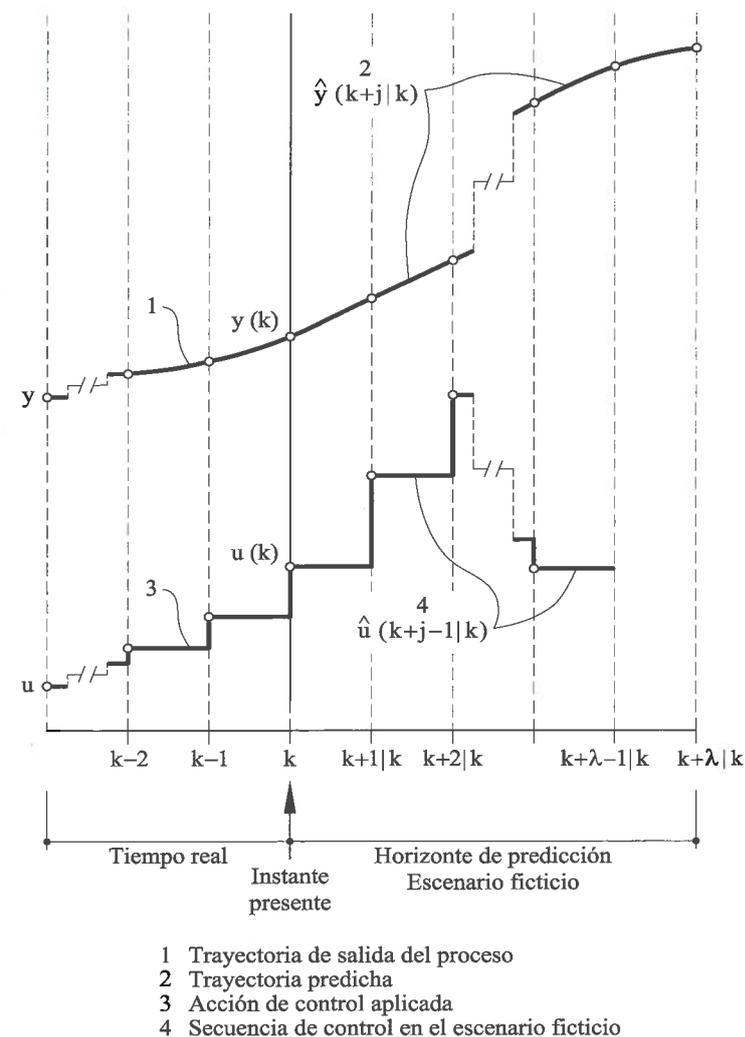


Figura 4.1: Horizonte de predicción de la estrategia extendida.

De entre todas las posibles trayectorias predichas, se elige como  $TDP$ ,  $y_d(k+j|k)$ ,  $j = 1, \dots, \lambda$ , la que, junto con la secuencia de control que la

produce, satisface un criterio de rendimiento.

Los primeros valores de las  $TDPs$ ,  $y_d(k+1|k)$ , en cada uno de los sucesivos instantes  $k$ , definen la trayectoria deseada conductora  $TDC$  descrita en el Capítulo 3. La acción de control aplicada al proceso en cada instante  $k$  corresponde al valor  $y_d(k+1|k)$  de la  $TDC$ , de acuerdo con el principio básico de control predictivo. Como resultado, dicha acción es igual al primer valor de la secuencia de control  $\hat{u}(k+j-1|k)$  que produce la  $TDP$ , es decir,  $u(k) = \hat{u}(k|k)$ .

Puesto que este procedimiento para escoger una nueva  $TDP$  se redefine en cada instante  $k$ , el horizonte de predicción  $[k, k+\lambda]$  no representa un tiempo real. De hecho define un escenario ficticio que se usa solo con el propósito de generar la  $TDP_k$ .

Como veremos en los apartados siguientes, la acción de control aplicada en cada instante  $k$  puede obtenerse directamente a partir de la verificación del criterio de rendimiento usado para escoger la  $TDP_k$ . Sin embargo, esta acción de control produce una salida predicha en  $k+1$  igual a la salida deseada contenida en la  $TDC$ . Por tanto, bajo esta estrategia extendida, el principio de control predictivo mantiene completamente su validez.

Después de la introducción del control predictivo [Mar74, Mar76a], la estrategia extendida fue sugerida en [Mar77b], definida formalmente en [Mar80] y analizada en [Rod82]. Otros autores han presentado algoritmos que pueden ser enmarcados en la metodología de control predictivo y su estrategia extendida. Algunos de ellos se conocen en la literatura con nombres como "Identification and Command (IDCOM)" [RTP78], "Dynamic Matrix Control (DMC)" [CR80, PG80], "Model Algorithmic Control (MAC)" [RM82, MRER82], "Internal Model Control (IMC)" [GM82, MG84], "Predictor-Based Self Tuning Control [Pet84]", "Extended Horizon Adaptive Control (EHAC) [Yds84, YKS85]", "Extended Predictive Self-Adaptive Control (EPSAC)" [DV85, DVD85], "Generalized Predictive Control (GPC) [CM87, CMT87, TC88]", "Multistep Multivariable Adaptive Control (MUSMAR)" [GMMZ84, MZM84, MZL89] y otros tales como [LL83, IFF86, GWK87, MMS88, Gri93]. Artículos generales sobre control predictivo, incluyendo muchas otras referencias pueden verse en [KU88, GPM89, Ric93, QB96, Hen98, ML99]. Libros de texto relacionados con control predictivo son, por ejemplo, [BGW90, Soe92, MGPL93, Mos94, CB95, MR96, AZ00, Mac02].

Los problemas de la predicción y generación de la trayectoria deseada proyectada y la acción de control en cada instante  $k$  se verán a continuación en los dos siguientes apartados.

#### 4.2.2 Predicción extendida

Como se ilustra en la Figura 4.1, definimos un intervalo  $[k, k+\lambda]$  en el instante de muestreo presente  $k$ , en el cual podemos predecir una secuencia de salidas  $\hat{y}(k+j|k)$  en función de una secuencia de control  $\hat{u}(k+j-1|k)$ , donde  $j = 1, \dots, \lambda$ . Para llevar a cabo esta predicción, podemos usar el modelo predictivo (3.8) pero aumentando el número de instantes de tiempo futuros en la forma

$$\hat{y}(k+j|k) = \sum_{i=1}^{\hat{n}} \hat{a}_i \hat{y}(k+j-i|k) + \sum_{i=1}^{\hat{m}} \hat{b}_i \hat{u}(k+j-i|k) \quad (4.2)$$

$$j = 1, 2, \dots, \lambda,$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1-i|k) &= y(k+1-i); & i &= 1, \dots, \hat{n} \\ \hat{u}(k+1-i|k) &= u(k+1-i); & i &= 1, \dots, \hat{m}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde  $y(k+1-i)$  y  $u(k+1-i)$  son las salidas medidas y las entradas ya aplicadas en el instante  $k$ . Esta predicción extendida incluye así el caso particular de  $\lambda = 1$ , correspondiente a la predicción en un único instante que ha sido considerada previamente en el Capítulo 3.

Como en el Capítulo 3, aquí se usa un modelo predictivo concreto basado en la descripción del proceso mediante una ecuación en diferencias con una entrada y una salida. Cabe señalar que pueden usarse otros modelos, incluyendo también el caso multivariable, dentro de la estrategia extendida de control predictivo. En los desarrollos que siguen en este capítulo se utilizará el modelo (4.2). En el Apéndice B se presentan formulaciones de esta estrategia utilizando otros modelos predictivos.

Señalemos también un aspecto relativo al tiempo de retardo. En el modelo (4.2) no se incluye explícitamente un tiempo de retardo puro exceptuando el periodo de discretización de un instante debido a la conversión digital/analógico en el lazo de control. En el caso de la existencia de un número  $r$  de instantes de muestreo de tiempo de retardo puro, podría ponerse  $\hat{u}(k+j-i-r|k)$  en lugar de  $\hat{u}(k+j-i|k)$  en el segundo sumatorio de

(4.2). No obstante, con el objeto de simplificar la presentación y sin perder por ello generalidad, dejaremos el modelo en la forma (4.2) suponiendo que los primeros  $r$  parámetros  $\hat{b}_i$  son cero.

### 4.2.3 Criterio de rendimiento, trayectoria deseada proyectada y acción de control

De acuerdo con la estrategia extendida presentada previamente, la *TDP* en cada instante  $k$  es la trayectoria predicha por el modelo predictivo en respuesta a la secuencia de control tal que dicha trayectoria y la secuencia de control satisfacen un criterio de rendimiento. Para aclarar este concepto, consideremos el criterio de rendimiento formulado mediante la siguiente función de coste:

$$J_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\lambda} Q_j [\hat{y}(k+j|k) - y_r(k+j|k)]^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\lambda-1} R_j \hat{u}(k+j|k)^2, \quad (4.4)$$

donde  $y_r(k+j|k)$  es una *trayectoria de referencia* que puede generarse en una forma análoga a la que se ha usado para generar la *TDP* en la estrategia básica en el Capítulo 3. Así pues, tomando la ecuación

$$y_d(k+j|k) = \sum_{i=1}^p \alpha_i y_d(k+j-i|k) + \sum_{i=1}^q \beta_i y_{sp}(k+j-i|k) \\ j = 1, 2, \dots$$

del Capítulo 3 y usándola en el horizonte de predicción  $[k, k+\lambda]$ , la trayectoria de referencia  $y_r$  puede definirse en la forma

$$y_r(k+j|k) = \sum_{i=1}^p \alpha_i y_r(k+j-i|k) + \sum_{i=1}^q \beta_i y_{sp}(k+j-i) \\ j = 1, 2, \dots, \lambda, \quad (4.5)$$

donde

$$y_r(k+1-i|k) = y(k+1-i), \quad i = 1, \dots, p, \quad (4.6)$$

recordando que  $y_{sp}(\cdot)$  representa la consigna.

La función de coste (4.4) impone un compromiso entre que la *TDP* resultante esté lo más próxima posible a la trayectoria de referencia  $y_r$  mientras que el control requerido no sea excesivo. Los coeficientes  $Q_j$  y  $R_j$

se eligen para dar más o menos peso al seguimiento de la trayectoria de referencia o a la magnitud de la acción de control. Con este criterio, una trayectoria predicha que requiere una secuencia de control no acotada no puede ser posible. Seleccionando la trayectoria de referencia, el diseñador puede definir, de forma sencilla e independientemente de la dinámica del proceso, el tiempo de respuesta y el amortiguamiento que serían deseables para la *TDP*.

Sabemos que existe una trayectoria predicha y una secuencia de control, ambas relacionadas mediante el modelo predictivo (4.2), que minimizan el valor de la función de coste (4.4). La secuencia de control correspondiente  $\hat{u}(k+j|k)$  (para  $j = 0, 1, \dots, \lambda-1$ ) es óptima en el sentido de que minimiza la función de coste  $J_k$ .

Según las pautas que definen la estrategia extendida, la única acción de control que se aplicará al proceso será el primer valor de la secuencia de control óptima, lo que corresponde al primer valor de la *TDP*. Esto es  $u(k) = \hat{u}(k|k)$ . En el nuevo instante  $k+1$ , se redefinen una nueva *TDP* y la correspondiente secuencia de control, y así sucesivamente en cada uno de los instantes de muestreo.

La estrategia extendida de control predictivo no es restrictiva en cuanto al tipo de criterio de rendimiento usado para generar las *TDPs* [Mar80]. En cualquier caso, el objetivo final es que la trayectoria deseada conductora (*TDC*) resultante, formada por los valores iniciales de cada una de las *TDPs*, sea capaz de conducir la salida del proceso hacia la consigna de una forma estable y eficiente. La función de coste definida en (4.4) no es más que un ejemplo en este contexto, aunque representa un criterio de rendimiento con un claro significado físico. No obstante, la formulación del criterio de rendimiento ha de tener en cuenta el esfuerzo requerido para la implementación asociado al problema técnico de encontrar la secuencia óptima de control, lo que puede ser laborioso. Este problema puede ser especialmente serio si el propósito es aplicar la estrategia de control predictivo en un contexto adaptativo, combinado con la estimación de los parámetros del modelo, ya que en tal caso la solución del criterio de rendimiento debe rehacerse en tiempo real en cada instante de muestreo.

La minimización de la función de coste (4.4) es un problema de minimización en un horizonte finito que tiene  $\lambda$  incógnitas

$$\hat{u}(k|k), \hat{u}(k+1|k), \dots, \hat{u}(k+\lambda-1|k).$$

Pueden obtenerse distintas soluciones dependiendo del modelo predictivo usado para relacionar las secuencias de entradas y salidas, así como del procedimiento específico para imponer la condición de mínimo. En el siguiente apartado usamos el modelo predictivo en ecuación en diferencias (4.2) para deducir un procedimiento de minimización y la ley de control resultante. Con el propósito de reducir el esfuerzo de cálculo y a modo de ejemplo, en un apartado posterior se deducirá una solución alternativa que es muy sencilla de implementar y mantiene el requisito de producir un control estable y eficiente para una amplia variedad de procesos.

En el Apéndice B se desarrollan otras formulaciones alternativas.

### 4.3 Minimización de la función de coste y ley de control

Consideremos el problema de minimización definido en los siguientes términos: en cada instante de muestreo  $k$ , hallar la secuencia de control  $\hat{u}(k|k), \hat{u}(k+1|k), \dots, \hat{u}(k+\lambda-1|k)$  tal que la función de coste  $J_k$  en (4.4) tenga un valor mínimo con las condiciones siguientes:

1. Se conocen las salidas del proceso  $y(k), \dots, y(k+1-\hat{n})$  en el instante  $k$  y en instantes previos y los controles  $u(k-1), \dots, u(k+1-\hat{m})$  en  $k-1$  y en instantes previos.
2. La secuencia de salidas predichas  $\hat{y}(k+1|k), \dots, \hat{y}(k+\lambda|k)$  se relaciona con la secuencia de control  $\hat{u}(k|k), \hat{u}(k+1|k), \dots, \hat{u}(k+\lambda-1|k)$  mediante el modelo dado en (4.2)-(4.3).
3. Los valores de la trayectoria de referencia  $y_r(k+1|k), \dots, y_r(k+\lambda|k)$  se calculan independientemente teniendo en cuenta los valores de consigna en el intervalo de predicción.

Usando el modelo predictivo (4.2) de forma recursiva a partir de la condición inicial (4.3), podemos escribir

$$\hat{y}(k+j|k) = \sum_{i=1}^{\hat{n}} \hat{e}_i^{(j)} y(k+1-i) + \sum_{i=2}^{\hat{m}} \hat{g}_i^{(j)} u(k+1-i) + \sum_{i=0}^{j-1} \hat{g}_1^{(j-i)} \hat{u}(k+i|k); \quad j = 1, 2, \dots, \lambda, \quad (4.7)$$

donde  $\hat{e}_i^{(j)}$  y  $\hat{g}_i^{(j)}$  son coeficientes que pueden obtenerse de los parámetros  $\hat{a}_i$  y  $\hat{b}_i$  del modelo predictivo mediante el siguiente algoritmo recursivo:

$$\begin{aligned} \hat{e}_i^{(j)} &= \hat{e}_1^{(j-1)} \hat{a}_i + \hat{e}_{i+1}^{(j-1)}; & i = 1, \dots, \hat{n}; & \quad j = 2, \dots, \lambda; \\ \hat{g}_i^{(j)} &= \hat{e}_1^{(j-1)} \hat{b}_i + \hat{g}_{i+1}^{(j-1)}; & i = 1, \dots, \hat{m}; & \quad j = 2, \dots, \lambda; \end{aligned} \quad (4.8)$$

con

$$\begin{aligned} \hat{e}_i^{(1)} &= \hat{a}_i; & i = 1, \dots, \hat{n}; \\ \hat{g}_i^{(1)} &= \hat{b}_i; & i = 1, \dots, \hat{m}; \\ \hat{e}_{\hat{n}+1}^{(j-1)} &= 0; & j = 2, \dots, \lambda; \\ \hat{g}_{\hat{m}+1}^{(j-1)} &= 0; & j = 2, \dots, \lambda. \end{aligned} \quad (4.9)$$

La ecuación (4.7) proporciona la salida predicha para cada instante  $k+j$  en función de la información de las entradas y salidas del proceso en el instante  $k$ , así como de los controles desconocidos  $\hat{u}(k|k), \dots, \hat{u}(k+j-1|k)$ . El conjunto de  $\lambda$  ecuaciones (4.7) puede escribirse en la siguiente forma matricial:

$$\hat{Y} = E Y_k + G U_k + G_0 \hat{U}, \quad (4.10)$$

donde  $\hat{Y}$  y  $\hat{U}$  son los vectores de dimensión  $\lambda$

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= [\hat{y}(k+1|k), \hat{y}(k+2|k), \dots, \hat{y}(k+\lambda|k)]^T, \\ \hat{U} &= [\hat{u}(k|k), \hat{u}(k+1|k), \dots, \hat{u}(k+\lambda-1|k)]^T, \end{aligned}$$

donde  $Y_k$  y  $U_k$  son los vectores de dimensión  $\hat{n}$  y  $(\hat{m}-1)$  respectivamente

$$\begin{aligned} Y_k &= [y(k), y(k-1), \dots, y(k-\hat{n}+1)]^T, \\ U_k &= [u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-\hat{m}+1)]^T, \end{aligned}$$

$E$ ,  $G$  y  $G_0$  son matrices, con dimensiones  $\lambda \times \hat{n}$ ,  $\lambda \times (\hat{m}-1)$  y  $\lambda \times \lambda$  respectivamente, definidas en la forma

$$E = \begin{pmatrix} \hat{e}_1^{(1)} & \hat{e}_2^{(1)} & \dots & \hat{e}_{\hat{n}}^{(1)} \\ \hat{e}_1^{(2)} & \hat{e}_2^{(2)} & \dots & \hat{e}_{\hat{n}}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{e}_1^{(\lambda)} & \hat{e}_2^{(\lambda)} & \dots & \hat{e}_{\hat{n}}^{(\lambda)} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \hat{g}_2^{(1)} & \hat{g}_3^{(1)} & \dots & \hat{g}_{\hat{m}}^{(1)} \\ \hat{g}_2^{(2)} & \hat{g}_3^{(2)} & \dots & \hat{g}_{\hat{m}}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{g}_2^{(\lambda)} & \hat{g}_3^{(\lambda)} & \dots & \hat{g}_{\hat{m}}^{(\lambda)} \end{pmatrix},$$

$$G_0 = \begin{pmatrix} \hat{g}_1^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{g}_1^{(2)} & \hat{g}_1^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{g}_1^{(\lambda)} & \hat{g}_1^{(\lambda-1)} & \hat{g}_1^{(\lambda-2)} & \dots & \hat{g}_1^{(1)} \end{pmatrix}.$$

De la misma forma, incluimos los valores de la trayectoria de referencia en el vector de dimensión  $\lambda \times 1$

$$Y_r = [y_r(k+1|k), y_r(k+2|k), \dots, y_r(k+\lambda|k)]^T.$$

Usando la anterior notación matricial, la función de coste (4.4) puede escribirse en la forma

$$J_k = \frac{1}{2} [\hat{Y} - Y_r]^T Q [\hat{Y} - Y_r] + \frac{1}{2} \hat{U}^T R \hat{U}, \quad (4.11)$$

donde  $Q$  y  $R$  son las matrices de peso de dimensión  $\lambda \times \lambda$

$$Q = \text{diag}[Q_1, Q_2, \dots, Q_\lambda] \quad \text{y} \quad R = \text{diag}[R_0, R_1, \dots, R_{\lambda-1}].$$

Sustituyendo (4.10) en (4.11), escribimos

$$J_k = \frac{1}{2} [E Y_k + G U_k + G_0 \hat{U} - Y_r]^T Q [E Y_k + G U_k + G_0 \hat{U} - Y_r] + \frac{1}{2} \hat{U}^T R \hat{U}. \quad (4.12)$$

Observando ahora que el vector  $\hat{U}$  es la única incógnita en (4.12) y que su valor no está restringido, podemos imponer la siguiente condición necesaria para que  $J_k$  tenga un valor extremo:

$$\frac{\partial J_k}{\partial \hat{U}} = 0.$$

Imponiendo esta condición en (4.12), obtenemos

$$G_0^T Q [E Y_k + G U_k + G_0 \hat{U} - Y_r] + R \hat{U} = 0,$$

lo que da

$$\hat{U} = -[G_0^T Q G_0 + R]^{-1} G_0^T Q [E Y_k + G U_k - Y_r]. \quad (4.13)$$

Condiciones suficientes para que  $\hat{U}$  produzca el mínimo valor de  $J_k$  imponen que las matrices  $Q$  y  $R$  han de elegirse definidas no negativas.

Como se ha explicado anteriormente, aunque (4.13) proporciona la secuencia de control completa que minimiza  $J_k$  en todo el intervalo  $[k, k+\lambda]$ , únicamente se aplica al proceso como señal de control  $u(k)$  el primer valor de dicha secuencia. Así pues la ley de control tiene finalmente la siguiente forma:

$$u(k) = \hat{u}(k|k) = -g_0^T [E Y_k + G U_k - Y_r], \quad (4.14)$$

siendo  $g_0^T$  la primera fila de la matriz  $[G_0^T Q G_0 + R]^{-1} G_0^T Q$ .

Los parámetros implicados en la implementación de esta ley de control son la longitud del intervalo de predicción  $\lambda$ , los factores de peso en  $Q$ ,  $R$  y los parámetros  $\alpha_i, \beta_i$  que definen la trayectoria de referencia. Estos parámetros están asociados al criterio de rendimiento. Los otros parámetros definen el modelo predictivo: el orden del modelo dado por  $\hat{n}, \hat{m}$  y los coeficientes  $\hat{a}_i, \hat{b}_i$ . Las matrices  $E, G, G_0$  se calculan usando estos coeficientes. Cuando los parámetros del modelo  $\hat{a}_i, \hat{b}_i$  son fijos, este cálculo se realiza una única vez previamente a la implementación del control en tiempo real. En cambio, si los parámetros se ajustan en tiempo real usando el mecanismo de adaptación, el cálculo de las matrices  $E, G, G_0$  debe hacerse en cada instante de muestreo.

Otra forma de resolver la minimización de la función de coste (4.4) en el problema de control predictivo que acabamos de ver sería mediante el uso de la ecuación de Riccati [Rod82, RBM87], tan extensamente usada en el problema clásico de control óptimo lineal cuadrático [KS72, SW77]. De esta forma, el control predictivo se aproxima al control óptimo en cuanto que usa sus procedimientos para evaluar la evolución del proceso en el intervalo de predicción y obtener una respuesta óptima. Sin embargo, es importante señalar que esta forma particular de aplicar el control predictivo difiere esencialmente del control óptimo clásico en el sentido de que, en el marco del control predictivo, el horizonte de predicción y el procedimiento de minimización se redefinen en cada instante de muestreo  $k$ . La idea de redefinir el objetivo de control en tiempo real, que es inherente al concepto básico del control predictivo, fue también considerada en el contexto

del control óptimo con el denominado esquema "receding horizon" [Tho75, KP77, KP78, CS82, KG88, MM90, MM91]. Algunos autores han estudiado analogías entre dicho esquema y el control predictivo [Pet90, BGW90, Mos94]. Está claro que se trata de dos esquemas conceptuales diferentes y con distintos puntos de partida. De hecho, la motivación para la introducción de la redefinición de un horizonte temporal en el control óptimo lineal cuadrático estuvo en la necesidad de obtener una aproximación en un intervalo de tiempo finito del problema estándar de control óptimo en tiempo infinito con el objetivo de simplificar la solución de la ecuación asociada de Riccati. Por su lado, el control predictivo tuvo su motivación en explotar la posibilidad de hacer predicciones en tiempo real dada por los computadores digitales, permitiendo la selección de diferentes objetivos de control en el horizonte de predicción y el uso de conceptos adicionales que se han demostrado como esenciales en las aplicaciones prácticas y que se ilustran en éste y en otros capítulos de este libro. El control óptimo lineal cuadrático, cuando se redefine en cada instante de muestro, da soluciones similares a determinadas soluciones particulares de la estrategia extendida de control predictivo que se obtienen usando la ecuación de Riccati [Rod82, RBM87]. Dentro de la metodología de control predictivo, el papel de la ecuación de Riccati es simplemente el de una herramienta que se utiliza en una forma particular de aplicación. Esta forma no es la única, de hecho puede ser costosa desde el punto de vista del cálculo, lo que ha motivado desarrollar otras formas de aplicación práctica más sencillas, como se verá en el siguiente apartado.

#### 4.4 Una solución particular

La complejidad introducida por la función de coste (4.4) se debe esencialmente al número de incógnitas  $\lambda$ , que son los valores de la secuencia de control  $\hat{u}(k+j|k)$ . Una forma de reducir este número es determinar la forma de la secuencia de control en el horizonte de predicción. La experiencia ha demostrado que es útil imponer una secuencia de control constante junto con la función de coste (4.4), lo que reduce el número de incógnitas a una sola. Esta forma de solución fue propuesta inicialmente en [Mar80] y analizada en [Rod82]. Otros autores también consideraron el mismo tipo de secuencia de control constante junto con un criterio de rendimiento cuadrático [Yds84, DV85, CMT87, RBM87].

En este apartado, a modo de ejemplo sencillo, consideramos la siguiente elección de factores de peso en la función de coste (4.4):

$$Q_j = 0 \quad (j = 1, \dots, \lambda - 1), \quad Q_\lambda = 1, \quad R_j = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, \lambda - 1).$$

Con esta elección, la función de coste se reduce a

$$J_k = \frac{1}{2} [\hat{y}(k + \lambda|k) - y_r(k + \lambda|k)]^2 \quad (4.15)$$

con la condición de que la secuencia de control se mantenga constante en el intervalo de predicción, es decir

$$\hat{u}(k|k) = \hat{u}(k+1|k) = \dots = \hat{u}(k + \lambda - 1|k). \quad (4.16)$$

De acuerdo con el criterio que acabamos de definir, la trayectoria deseada proyectada (*TDP*) será la trayectoria predicha por el modelo predictivo en respuesta a un escalón tal que el valor de la trayectoria de referencia y el valor de la trayectoria predicha coincidan al final del intervalo de predicción  $k + \lambda$ . Imponer una señal de control constante en el intervalo de predicción puede verse como equivalente a explorar cuál sería la evolución de la salida del proceso si no se hiciera cambio posterior alguno en la acción de control. Esto tiene un sentido intuitivo claro ya que puede interpretarse como la acción de forzar la evolución del proceso sobre el horizonte de predicción de forma natural según su propia dinámica. En consecuencia, cuanto más largo es el horizonte de predicción  $\lambda$ , menos exigente es la condición (4.15).

El cálculo de la acción de control se reduce ahora a obtener una única incógnita  $u(k) = \hat{u}(k|k)$  y esto puede hacerse fácilmente. Usando la ecuación de predicción (4.7) para el instante  $k + \lambda$  e imponiendo la condición (4.16), se obtiene el siguiente resultado:

$$\hat{y}(k + \lambda|k) = \sum_{i=1}^{\hat{n}} \hat{e}_i^{(\lambda)} y(k + 1 - i) + \sum_{i=2}^{\hat{m}} \hat{g}_i^{(\lambda)} u(k + 1 - i) + \hat{h}^{(\lambda)} \hat{u}(k|k), \quad (4.17)$$

donde

$$\hat{h}^{(\lambda)} = \hat{g}_1^{(\lambda)} + \hat{g}_1^{(\lambda-1)} + \dots + \hat{g}_1^{(1)}. \quad (4.18)$$

La ecuación (4.17) expresa la salida predicha para el instante  $k + \lambda$  en función de la información conocida de las entradas y salidas en el instante  $k$  y de la entrada  $\hat{u}(k|k)$  que ha de ser calculada.

Para obtener el valor de la acción de control predictivo  $u(k)$ , simplemente se sustituye (4.17) en (4.15), se impone  $J_k = 0$  y se obtiene

$$u(k) = \hat{u}(k|k) = \frac{y_r(k + \lambda|k) - \sum_{i=1}^{\hat{n}} \hat{e}_i^{(\lambda)} y(k + 1 - i) - \sum_{i=2}^{\hat{m}} \hat{g}_i^{(\lambda)} u(k + 1 - i)}{\hat{h}(\lambda)} \quad (4.19)$$

Las operaciones para implementar esta ley de control son en verdad muy sencillas, incluso cuando el cálculo de los parámetros se hace en un esquema adaptativo. Esto la hace de particular interés práctico. De hecho, la mayor parte de las aplicaciones descritas en posteriores capítulos de este libro utilizan esta ley de control. Por ello, en el apartado siguiente puede ser interesante discutir e ilustrar algunas propiedades de estabilidad y robustez asociadas al uso del control (4.19).

## 4.5 Ejemplo ilustrativo y análisis de robustez

En este apartado analizaremos la estabilidad y la robustez de la ley de control predictivo obtenida en el apartado anterior usando las herramientas elementales del Apéndice A. Este análisis incluye dos pasos: (1) la formulación de funciones de transferencia que relacionan la secuencia de consignas con las secuencias de salidas y de entradas respectivamente; y (2) el seguimiento de cómo varían las raíces de los polinomios característicos de dichas funciones de transferencia cuando el horizonte de predicción se aumenta hacia el límite infinito. Se usarán dos ejemplos sencillos para ilustrar los análisis de estabilidad y de robustez respectivamente.

### 4.5.1 Análisis teórico: funciones de transferencia

Supongamos que la dinámica del proceso se describe por la siguiente función de transferencia discreta:

$$y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(z), \quad (4.20)$$

donde  $B(z^{-1})$  y  $A(z^{-1})$  son los polinomios

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}, \quad (4.21)$$

$$A(z^{-1}) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_n z^{-n}.$$

La ley de control (4.19) puede escribirse en la forma

$$y_r(k + \lambda|k) = \sum_{i=1}^{\hat{n}} \hat{e}_i^{(\lambda)} y(k + 1 - i) + \sum_{i=2}^{\hat{m}} \hat{g}_i^{(\lambda)} u(k + 1 - i) + \hat{h}^{(\lambda)} u(k) \quad (4.22)$$

y, aplicando la transformada  $z$  a esta expresión, podemos escribir

$$y_r(z) = \hat{E}_\lambda(z^{-1}) y(z) + \hat{G}_\lambda(z^{-1}) u(z) \quad (4.23)$$

con los polinomios

$$\begin{aligned} \hat{E}_\lambda(z^{-1}) &= \hat{e}_1^{(\lambda)} + \hat{e}_2^{(\lambda)} z^{-1} + \dots + \hat{e}_{\hat{n}}^{(\lambda)} z^{-\hat{n}+1}, \\ \hat{G}_\lambda(z^{-1}) &= \hat{h}^{(\lambda)} + \hat{g}_2^{(\lambda)} z^{-1} + \dots + \hat{g}_{\hat{m}}^{(\lambda)} z^{-\hat{m}+1}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Usando recursivamente la ecuación (4.5), que genera la trayectoria de referencia, obtenemos el valor de  $y_r(k + j|k)$  en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y_r(k + j|k) &= \sum_{i=1}^p \varphi_i^{(j)} y(k + 1 - i) + \sum_{i=2}^q \delta_i^{(j)} y_{sp}(k + 1 - i) \\ &+ \sum_{i=0}^{j-1} \delta_1^{(j-i)} \hat{y}_{sp}(k + i|k); \quad j = 1, 2, \dots, \lambda. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Podemos ver que este resultado es similar al obtenido en (4.7) y que los parámetros  $\varphi_i$  y  $\delta_i$  pueden calcularse a partir de los parámetros  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  mediante expresiones recursivas similares a las dadas en (4.8)–(4.9). Además  $\hat{y}_{sp}(k + i|k)$  representa los valores de la consigna en el horizonte de predicción. Suponiendo que estos valores son iguales a  $y_{sp}(k)$ , lo que es el caso más usual, obtenemos el valor  $y_r(k + \lambda|k)$  en la forma

$$y_r(k + \lambda|k) = \sum_{i=1}^p \varphi_i^{(\lambda)} y(k + 1 - i) + \sum_{i=2}^q \delta_i^{(\lambda)} y_{sp}(k + 1 - i) + \mu^{(\lambda)} y_{sp}(k), \quad (4.26)$$

donde

$$\mu^{(\lambda)} = \delta_1^{(\lambda)} + \delta_1^{(\lambda-1)} + \dots + \delta_1^{(1)}. \quad (4.27)$$

Aplicando la transformada  $z$  a (4.26), se obtiene

$$y_r(z) = \Phi_\lambda(z^{-1})y(z) + \Delta_\lambda(z^{-1})y_{sp}(z), \quad (4.28)$$

con los polinomios

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(z^{-1}) &= \varphi_1^{(\lambda)} + \varphi_2^{(\lambda)}z^{-1} + \dots + \varphi_p^{(\lambda)}z^{-p+1}, \\ \Delta_\lambda(z^{-1}) &= \mu^{(\lambda)} + \delta_2^{(\lambda)}z^{-1} + \dots + \delta_q^{(\lambda)}z^{-q+1}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Despejando  $u(z)$  de (4.23) y sustituyendo en (4.20), se obtiene

$$y(z) = \frac{B(z^{-1})}{\hat{\theta}'_\lambda(z^{-1})} y_r(z), \quad (4.30)$$

donde  $\hat{\theta}'_\lambda(z^{-1})$  es un polinomio característico de la forma

$$\hat{\theta}'_\lambda(z^{-1}) = \hat{E}_\lambda(z^{-1})B(z^{-1}) + \hat{G}_\lambda(z^{-1})A(z^{-1}). \quad (4.31)$$

De la sustitución directa de (4.20) en (4.30) se obtiene

$$u(z) = \frac{A(z^{-1})}{\hat{\theta}'_\lambda(z^{-1})} y_r(z). \quad (4.32)$$

La ecuación (4.30) define una función de transferencia entre la secuencia formada por los valores de la trayectoria de referencia  $y_r(k + \lambda|k)$  en los sucesivos instantes de tiempo real  $k$  y la secuencia de valores  $y(k)$  de la salida del proceso producidos por la aplicación sucesiva de la ley de control. Puede interpretarse también como siendo la relación entre los valores de la trayectoria deseada proyectada ( $TDP_k$ ) al final del horizonte de predicción  $k + \lambda$  y los valores medidos de la salida del proceso, la cual, en el supuesto ideal de que no existieran errores de predicción, serían también los valores de la trayectoria deseada conductora ( $TDC$ ).

La relación (4.32) es una función de transferencia entre los valores de la  $TDP_k$  en  $k + \lambda$  y la acción de control predictivo generada por la ley de control.

Sustituyendo (4.28) en (4.30) obtenemos

$$y(z) = \frac{B(z^{-1})\Delta_\lambda(z^{-1})}{\hat{\theta}'_\lambda(z^{-1})} y_{sp}(z), \quad (4.33)$$

donde  $\hat{\theta}_\lambda(z^{-1})$  es el polinomio característico del lazo cerrado

$$\hat{\theta}_\lambda(z^{-1}) = [\hat{E}_\lambda(z^{-1}) - \Phi_\lambda(z^{-1})]B(z^{-1}) + \hat{G}_\lambda(z^{-1})A(z^{-1}). \quad (4.34)$$

Por otro lado, sustituyendo (4.20) en (4.33) obtenemos

$$u(z) = \frac{A(z^{-1})\Delta_\lambda(z^{-1})}{\hat{\theta}_\lambda(z^{-1})} y_{sp}(z). \quad (4.35)$$

La expresión (4.33) define la relación dinámica entre la consigna y la salida del proceso, es decir, la función de transferencia del lazo cerrado. Puesto que se supone que no hay error de predicción, (4.33) define también la relación entre la consigna y la  $TDC$ . La ecuación (4.35) define la función de transferencia entre la consigna y la acción de control. El denominador de ambas funciones de transferencia (4.33) y (4.35) es el mismo polinomio característico  $\hat{\theta}_\lambda(z^{-1})$ , el cual determina la estabilidad. La estabilidad de la relación (4.33) significa que, dada una secuencia de consignas acotada, la salida controlada será también acotada. La estabilidad de la función de transferencia (4.35) implica que la acción de control generada para obtener una secuencia acotada de valores de consigna es también acotada. En ambos casos la condición de estabilidad es que el polinomio  $\hat{\theta}_\lambda(z^{-1})$  tenga sus raíces con módulo  $|z| < 1$ .

Una consideración similar puede hacerse para las funciones de transferencia (4.30) y (4.32) en relación a la secuencia de valores de la trayectoria de referencia en  $k + \lambda$ . El polinomio característico que determina la estabilidad en este caso es  $\hat{\theta}'_\lambda(z^{-1})$ . Comparando (4.31) y (4.34), podemos ver que la diferencia entre  $\hat{\theta}_\lambda(z^{-1})$  y  $\hat{\theta}'_\lambda(z^{-1})$  está determinada por el término dinámico  $\Phi_\lambda(z^{-1})$ , el cual es elegido por el diseñador para definir la trayectoria de referencia. Esto ilustra claramente el efecto de esta elección en la dinámica del lazo cerrado.

Para el caso con  $\lambda = 1$ , la ley de control (4.19) se reduce a la ley básica de control predictivo vista en el Capítulo 3 y que recordamos aquí:

$$u(k) = \frac{y_d(k+1|k) - \sum_{i=1}^{\hat{n}} \hat{a}_i y(k+1-i) - \sum_{i=2}^{\hat{m}} \hat{b}_i u(k+1-i)}{\hat{b}_1}.$$

En este caso, si el inverso del proceso es inestable, la secuencia de control capaz de asegurar que el proceso sigue una serie dada de valores de

referencia no será acotada, como se ha discutido en el capítulo anterior.

En el siguiente subapartado veremos que, para procesos estables y suponiendo sólo que el modelo predictivo es también estable, la extensión del horizonte de predicción a valores de  $\lambda > 1$  supera el anterior problema de inestabilidad. Además, el siguiente análisis se centra también en la robustez, ya que conviene considerar que puede haber discrepancias entre la dinámica del modelo predictivo y la del proceso.

#### 4.5.2 Análisis teórico: estabilidad y robustez

Para estudiar el efecto que sobre la estabilidad tiene la extensión del horizonte de predicción, llevaremos el valor de  $\lambda$  hasta el límite infinito. En este caso, ya que el modelo predictivo es estable y dado que  $\hat{u}(k|k)$  es constante durante el intervalo de predicción de acuerdo con (4.16), la salida predicha alcanzará un estado estacionario final cuyo valor será

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{y}(k + \lambda|k) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{y}(k + \infty|k) = \hat{G}_s \hat{u}(k|k), \quad (4.36)$$

donde  $\hat{G}_s$  es la ganancia estática del modelo predictivo que satisface la conocida expresión (Apéndice A)

$$\hat{G}_s = \frac{\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \dots + \hat{b}_{\hat{m}}}{1 - \hat{a}_1 - \hat{a}_2 - \dots - \hat{a}_{\hat{n}}}. \quad (4.37)$$

Por otro lado, considerando el límite para  $\lambda \rightarrow \infty$  en (4.17), podemos escribir

$$\hat{y}(k + \infty|k) = \sum_{i=1}^{\hat{n}} \hat{e}_i^{(\infty)} y(k + 1 - i) + \sum_{i=2}^{\hat{m}} \hat{g}_i^{(\infty)} u(k + 1 - i) + \hat{h}^{(\infty)} \hat{u}(k|k), \quad (4.38)$$

donde el superíndice  $(\infty)$  indica el límite en el algoritmo (4.8)–(4.9) cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Comparando las dos formas de expresar la predicción  $\hat{y}(k + \infty|k)$  de las ecuaciones (4.36) y (4.38), se deducen directamente las siguientes propie-

dades límite para los coeficientes de la ley de control:

$$\begin{aligned} \hat{e}_i^{(\infty)} &= 0; & i &= 1, 2, \dots, \hat{n} \\ \hat{g}_i^{(\infty)} &= 0; & i &= 2, 3, \dots, \hat{m} \\ \hat{h}^{(\infty)} &= \hat{G}_s. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Consecuentemente, los polinomios definidos en (4.23)–(4.24) satisfacen las siguientes propiedades límite:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{E}_\lambda(z^{-1}) = 0; \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{G}_\lambda(z^{-1}) = \hat{G}_s. \quad (4.40)$$

Repetiendo el análisis anterior para las ecuaciones de la trayectoria de referencia (4.5) y (4.26), teniendo en cuenta que la ganancia estática en (4.5) habitualmente vale uno y que la consigna suele ser constante en el intervalo de predicción, pueden obtenerse los siguientes resultados similares a los obtenidos en (4.39) y (4.40):

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(\infty)} &= 0; & i &= 1, 2, \dots, p; \\ \delta_i^{(\infty)} &= 0; & i &= 2, 3, \dots, q; \\ \mu^{(\infty)} &= 1, \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi_\lambda(z^{-1}) = 0; \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Delta_\lambda(z^{-1}) = 1. \quad (4.42)$$

Por tanto, los polinomios característicos  $\hat{\theta}'_\lambda(z^{-1})$  y  $\hat{\theta}_\lambda(z^{-1})$ , definidos en (4.31) y (4.34) respectivamente, convergerán en el límite a la expresión

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{\theta}'_\lambda(z^{-1}) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{\theta}_\lambda(z^{-1}) = \hat{G}_s A(z^{-1}). \quad (4.43)$$

De (4.43) puede deducirse que las raíces de los polinomios característicos tienden hacia las del polinomio  $A(z^{-1})$ , que es el denominador de la función de transferencia del proceso. Como el proceso es estable, estas raíces tienen módulo  $|z| < 1$ . Ya que las raíces de  $\hat{\theta}'_\lambda(z^{-1})$  y  $\hat{\theta}_\lambda(z^{-1})$  tienden hacia las de  $A(z^{-1})$  a medida que  $\lambda$  aumenta, existirán valores de  $\lambda$  para los que ambos polinomios tendrán raíces con módulo  $|z| < 1$  y, en particular, un valor  $\lambda_0$  tal que el lazo de control será estable para todo  $\lambda > \lambda_0$ . Con estos valores

de  $\lambda$  y cualquiera que sea la consigna, se obtendrá un control  $u(k)$  y una salida  $y(k)$  ambos acotados independientemente de si el inverso del proceso es estable o no.

Completaremos este análisis ilustrativo describiendo cómo la salida del proceso alcanzará la consigna bajo la ley de control predictivo (4.19). Suponiendo que la consigna tiene un valor constante  $\bar{y}_{sp}$ , podemos aplicar el teorema del valor final (Apéndice A) a la relación (4.33) para demostrar que la salida tiene un valor estacionario  $\bar{y}$  dado por la expresión

$$\bar{y} = \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{B(z^{-1})\Delta_\lambda(z^{-1})}{\hat{\theta}_\lambda(z^{-1})} \bar{y}_{sp}. \quad (4.44)$$

Observemos ahora que los polinomios  $\hat{G}_\lambda(z^{-1})$  y  $\hat{E}_\lambda(z^{-1})$  de la ecuación (4.24) verifican

$$\frac{\hat{G}_\lambda(1)}{1 - \hat{E}_\lambda(1)} = \hat{G}_s, \quad (4.45)$$

donde  $\hat{G}_s$  es la ganancia estática del modelo predictivo definida en (4.37). De forma similar, la ganancia estática del proceso, definido en (4.20)–(4.21), está dada por

$$G_s = \frac{B(1)}{A(1)} = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_m}{1 - a_1 - a_2 - \dots - a_n}. \quad (4.46)$$

Puesto que la trayectoria de referencia de la ecuación (4.5) tiene ganancia estática unidad, podemos escribir

$$1 = \frac{\Delta_\lambda(1)}{1 - \Phi_\lambda(1)}. \quad (4.47)$$

Usando (4.45)–(4.47) en (4.44) obtenemos

$$\bar{y} = \frac{G_s[1 - \Phi_\lambda(1)]}{[G_s - \hat{G}_s]\hat{E}_\lambda(1) + \hat{G}_s - \Phi_\lambda(1)G_s} \bar{y}_{sp}. \quad (4.48)$$

Por tanto, podemos ver que, si las ganancias del modelo predictivo y del proceso son iguales ( $G_s = \hat{G}_s$ ), la ecuación (4.48) se reduce a  $\bar{y} = \bar{y}_{sp}$ , lo que garantiza que la salida del proceso tiende hacia la consigna constante.

Es importante señalar el aspecto de robustez de este resultado. En efecto, aunque suponemos un conocimiento de la ganancia del proceso, no hacemos hipótesis alguna sobre errores de modelización. Como se estudia en el Apéndice B, no es necesario conocer el valor de la ganancia del proceso para garantizar que la salida del proceso alcanza la consigna constante cuando se usa una formulación incremental de la estrategia extendida de control predictivo. El Apéndice B muestra también que la formulación incremental es capaz de compensar potenciales desviaciones permanentes de la consigna debidas a perturbaciones desconocidas constantes que se suman a la acción de control. Aunque el análisis realizado en este apartado, cuyo objetivo ha sido ilustrar los conceptos principales de la estrategia extendida de control predictivo, no ha considerado el rendimiento en la fase transitoria de la evolución de la salida del proceso, debemos esperar que este rendimiento se deteriore cuando la magnitud de los errores de modelización entre el modelo predictivo y el proceso sean suficientemente significativos. Esto será considerado en el análisis de estabilidad presentado en el Capítulo 7.

Los dos siguientes subapartados presentan ejemplos numéricos que ilustran, respectivamente, los aspectos de estabilidad y de robustez que acabamos de ver.

### 4.5.3 Ejemplo ilustrativo 1

Consideremos el mismo proceso estable con inverso inestable usado en el Capítulo 3, cuya respuesta a un escalón se ha mostrado en la Figura 3.8 y cuya función de transferencia recordamos aquí:

$$G(s) = \frac{1 - 4s}{(1 + s)(1 + 4s)}.$$

Con un período de muestreo de 1 segundo, la discretización de esta función de transferencia nos da

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \quad (4.49)$$

con

$$\begin{aligned} a_1 &= 1.1467, & a_2 &= -0.2865, \\ b_1 &= -0.4637, & b_2 &= 0.6035. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Tomemos el modelo del proceso como modelo predictivo, suponiendo que no hay errores de modelización. En tal caso, el orden del modelo es 2 y los coeficientes de la ley de control (4.19) son

$$\hat{e}_1^{(\lambda)}, \hat{e}_2^{(\lambda)}, \hat{g}_2^{(\lambda)}, \hat{h}^{(\lambda)},$$

los cuales se obtienen usando el algoritmo (4.8)–(4.9) y la ecuación (4.18) a partir de los coeficientes del modelo del proceso dados en (4.50). En este caso el valor de la trayectoria de referencia al final del intervalo de predicción se toma igual a la consigna. Por tanto la ecuación (4.26) es simplemente

$$y_r(k + \lambda|k) = y_{sp}(k) \quad (4.51)$$

y los polinomios en (4.29) se reducen a

$$\Phi_\lambda(z^{-1}) = 0; \quad \Delta_\lambda(z^{-1}) = 1. \quad (4.52)$$

En consecuencia, los polinomios característicos en (4.31) y (4.34) son

$$\begin{aligned} \hat{\theta}'_\lambda(z^{-1}) = \hat{\theta}_\lambda(z^{-1}) &= [\hat{e}_1^{(\lambda)} + \hat{e}_2^{(\lambda)}z^{-1}][b_1z^{-1} + b_2z^{-2}] \\ &+ [\hat{h}^{(\lambda)} + \hat{g}_2^{(\lambda)}z^{-1}][1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2}]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Para el análisis de estabilidad, usaremos la variable  $z$  en lugar de  $z^{-1}$  con el polinomio  $\bar{\theta}(z)$ :

$$\bar{\theta}(z) = z^3\hat{\theta}(z^{-1}). \quad (4.54)$$

La condición de estabilidad es ahora que todas las raíces de  $\bar{\theta}(z)$  tengan módulo menor que la unidad. La Figura 4.2 muestra el valor de las dos raíces principales para diferentes valores de  $\lambda$ . Puede observarse que es necesario aumentar el horizonte de predicción hasta un valor  $\lambda \geq 5$  para que las raíces cumplan la condición de estabilidad.

La Figura 4.3 muestra la salida del proceso y la acción de control aplicada dentro del rango de estabilidad para distintos valores de  $\lambda$  cuando se piden dos cambios consecutivos de consigna.

Es interesante observar que la consigna se alcanza cualquiera que sea el valor de  $\lambda$ , pero la forma de llegar a ella es diferente. A medida que se aumenta el valor de  $\lambda$ , la respuesta negativa típica del proceso con inverso inestable es menos pronunciada y la evolución hacia la consigna es

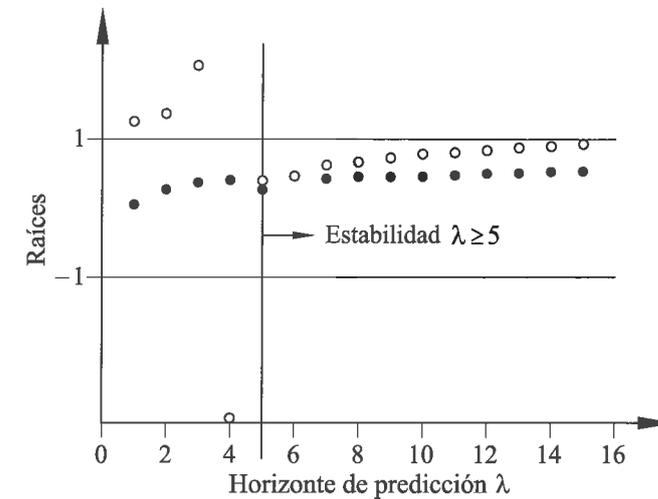


Figura 4.2: Raíces del polinomio característico de la ley de control predictivo en función de la extensión del horizonte de predicción.

más lenta y más suave. Esto tiene una interpretación intuitiva clara a partir de la condición (4.15) que define el criterio de rendimiento propuesto para obtener la trayectoria deseada proyectada (*TDP*). En efecto, (4.15) impone que la salida del proceso predicha ha de ser igual al valor de referencia (en este ejemplo éste es el valor de consigna) al final del intervalo de predicción. Por tanto, un intervalo pequeño implica una condición más exigente y requiere por tanto una acción de control más drástica, que se reduce a medida que se aumenta el horizonte de predicción.

La conducta de la ley de control predictivo para diferentes valores de  $\lambda$  descrita previamente puede explicarse también por las propiedades límite de los coeficientes de la ley de control en (4.39) y los polinomios característicos (4.43). Para un valor de  $\lambda$  tendiendo hacia infinito, podemos sustituir (4.43) en la función de transferencia (4.35) y escribir

$$u(z) = \frac{y_{sp}(z)}{\hat{G}_s}. \quad (4.55)$$

Puesto que en este ejemplo se tiene  $\hat{G}_s = G_s = 1$ , la relación (4.55) indica que el control  $u(k)$ , cuando  $\lambda$  es infinito, es simplemente el valor de consigna. En este caso, cuando se pide un cambio de consigna en forma de escalón, la acción de control será también un escalón de igual magnitud. Por tanto, la

respuesta del proceso a la acción de control será la respuesta natural a un escalón y, consecuentemente, será la respuesta más suave y lenta que puede obtenerse aplicando la ley de control predictivo para distintos valores de  $\lambda$ .

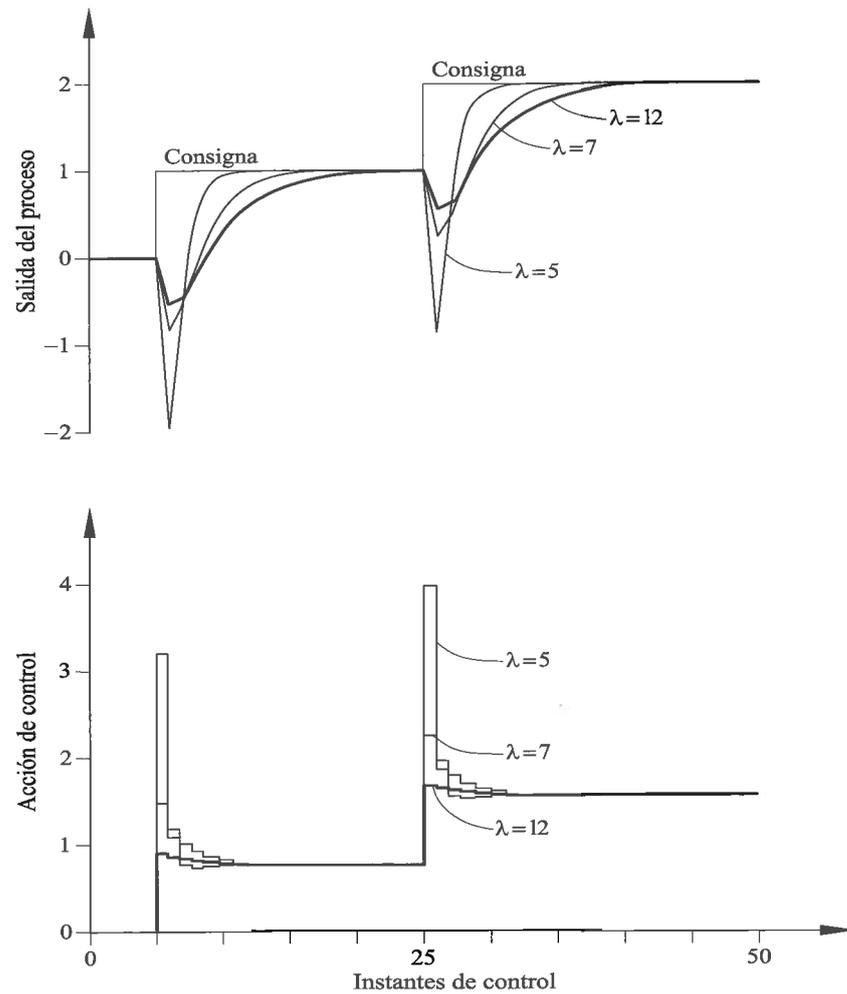


Figura 4.3: Salida del proceso y acción de control para diferentes valores de  $\lambda$ .

Puede observarse en la Figura 4.3 que un valor de  $\lambda = 12$  ya produce una señal de control que está muy próxima al límite de una acción de control en escalón. Como puede verse, existe un amplio margen para elegir un valor de  $\lambda$  que garantice estabilidad y que asegure una evolución a la consigna rápida con una acción de control no excesiva.

Para analizar con más detalle por qué la ley de control (4.19) genera una acción de control estable, puede ser interesante considerar la Figura 4.4 y comparar las trayectorias deseadas generadas en este caso con las obtenidas usando la ley de control básica en el Capítulo 3 (véase el ejemplo presentado en el Apartado 3.8 y especialmente la Figura 3.8). Los resultados mostrados en la Figura 4.4 se han obtenido aplicando la ley de control predictivo (4.19) con  $\lambda = 7$ .

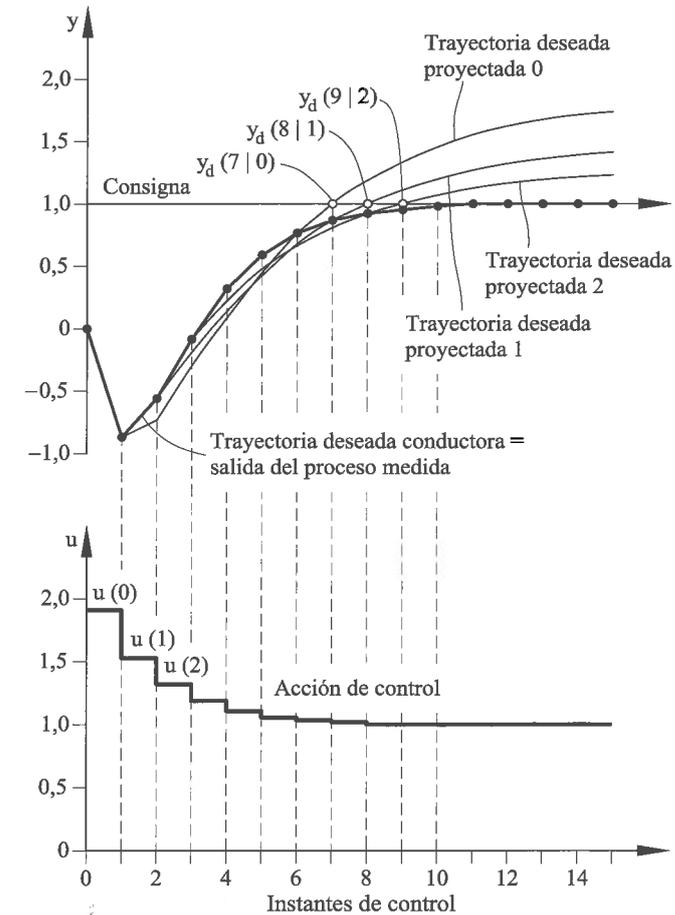


Figura 4.4: Trayectorias deseadas y acción de control estable.

En el instante  $k = 0$ , se genera una trayectoria deseada proyectada  $TDP_0$  que satisface el criterio de rendimiento definido en (4.15)–(4.16); en este caso el valor de referencia en  $k + \lambda$  es la consigna. En consecuencia, como puede verse en la Figura 4.4, la  $TDP_0$  alcanza la consigna en el ins-

tante 7, esto es,  $y_d(7|0) = 1$ . Como sabemos, esta trayectoria corresponde a la respuesta del modelo predictivo a un escalón de valor  $u(0)$  y, por tanto, se desvía de la consigna alcanzando un estado estacionario igual a  $u(0)$  ya que la ganancia del proceso y del modelo predictivo son ambas iguales a 1. Esta desviación de la consigna no importa ya que únicamente se usa el primer valor de la  $TDP_0$  para definir el valor de la trayectoria deseada conductora  $y_d(1|0)$ . De igual forma, sólo el valor  $u(0)$  de la secuencia de control constante se aplica como acción de control en el instante 0.

El procedimiento descrito se redefine en el instante siguiente 1, generando una trayectoria deseada proyectada  $TDP_1$  que, en respuesta a un escalón, pasa por el valor de consigna en el instante 8. Esta trayectoria define una salida deseada conductora  $y_d(2|1)$  y un control  $u(1)$ . Puede verse que, aunque la  $TDP_1$  tampoco alcanza la consigna en su estado estacionario, éste está más próximo a la consigna que el estado estacionario de la  $TDP_0$  precedente. Lo mismo ocurre con la trayectoria definida en el instante 2. En general, si representáramos las  $TDP_s$  para los instantes  $k = 3, 4, \dots$ , observaríamos que sus estados estacionarios tenderían hacia la consigna.

Esta tendencia de las trayectorias deseadas proyectadas es la opuesta a la observada en el ejemplo del Apartado 3.8, donde las sucesivas trayectorias predichas producidas por la ley de control predictivo básica se separaban cada vez más de la consigna generando una secuencia de controles no acotados (ver Figura 3.8). En cambio, en este caso la secuencia de control está acotada y tiende a un valor constante.

La trayectoria deseada conductora es, por construcción, la formada por las sucesivas salidas deseadas  $y_d(1|0), y_d(2|1), y_d(3|2), \dots$ . Estos valores coinciden con las salidas medidas  $y(1), y(2), y(3), \dots$  en la Figura 4.4, ya que no hay errores de predicción en este ejemplo. En general, la existencia de errores de predicción es esperable debido a los límites de control o, más en general, a errores de modelización, con el resultado de que la salida medida y la salida deseada conductora pueden no ser iguales. En tal caso, de igual forma que se ha ilustrado en el ejemplo de la Figura 3.6, las sucesivas trayectorias deseadas proyectadas se definen empezando en los sucesivos valores de la salida medidos  $y(1), y(2), y(3), \dots$ . Un caso práctico que ilustra este punto con claridad puede verse en [RGM89].

#### 4.5.4 Ejemplo ilustrativo 2

Este ejemplo considera el modelo mecánico con un grado de libertad representado en la Figura 4.5 usado muy frecuentemente como prototipo de sistemas mecánicos o estructuras flexibles sometidos a excitaciones dinámicas [CP75, Mei90].

Si consideramos el movimiento en la dirección horizontal, el desplazamiento  $y(t)$  con respecto a la posición de equilibrio se describe por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\nu\omega \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \frac{u(t - \tau)}{m} + \frac{v(t)}{m}, \quad (4.56)$$

donde  $m$  es la masa,  $\nu$  es el amortiguamiento y  $\omega$  es la frecuencia natural,  $v(t)$  es una fuerza excitadora que produce una vibración indeseada, mientras que  $u(t - \tau)$  es la fuerza de control activa producida por un actuador. Se supone que el actuador tiene una inercia significativa, lo que se representa en forma de un tiempo de retardo  $\tau$ . Los valores de los parámetros son  $m = 2922.7$  Kg,  $\nu = 0.0124$  y  $\omega = 21.79$  rad/s.

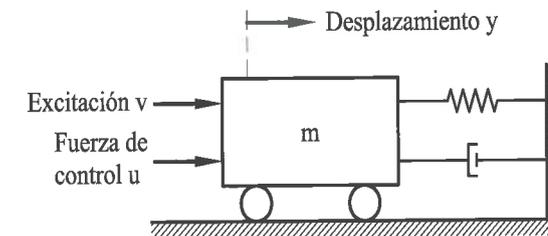


Figura 4.5: Sistema mecánico con 1 grado de libertad.

El problema del control activo consiste básicamente en generar la fuerza de control  $u$  automáticamente realimentando la posición medida  $y$  para reducir la vibración inducida por la excitación  $v$ , que se considera una perturbación. Ejemplos prácticos de control activo en estructuras de ingeniería civil, y específicamente la aplicación del control predictivo a la reducción de la respuesta de estructuras sometidas a cargas sísmicas se presentan más adelante en el Capítulo 10.

El propósito de considerar este caso aquí es ilustrar la robustez de la

ley de control predictivo (4.19) cuando se aplica en presencia de discrepancias entre el modelo predictivo y el modelo que describe el proceso. En este ejemplo usamos el siguiente modelo en tiempo discreto para describir la relación entre el control  $u$  y el desplazamiento  $y$  en cada instante de muestreo  $k$ :

$$y(k) = \sum_{i=1}^2 a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^2 b_i u(k-i-r), \quad (4.57)$$

donde, para un período de muestreo  $T$ ,

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{m}{\omega^2} - \frac{m}{\omega^2} e^{-\nu\omega T} \left[ \cos \omega \sqrt{1-\nu^2} T + \frac{\nu \sin \omega \sqrt{1-\nu^2} T}{\sqrt{1-\nu^2}} \right], \\ b_2 &= \frac{m}{\omega^2} e^{-2\nu\omega T} + \frac{m}{\omega^2} e^{-\nu\omega T} \left[ \frac{\nu \sin \omega \sqrt{1-\nu^2} T}{\sqrt{1-\nu^2}} - \cos \omega \sqrt{1-\nu^2} T \right], \\ a_1 &= 2e^{-\nu\omega T} \cos \omega \sqrt{1-\nu^2} T, \\ a_2 &= -e^{-2\nu\omega T}, \\ r &= \frac{\tau}{T} \quad \text{expresado como un entero.} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Estas expresiones se han obtenido discretizando la ecuación del movimiento (4.56) usando el procedimiento descrito en el Apéndice A.

Para la aplicación de la ley de control predictivo (4.19), se fija un período de muestreo  $T = 1$  segundo y el siguiente modelo predictivo de segundo orden:

$$\hat{y}(k+j|k) = \sum_{i=1}^2 \hat{a}_i \hat{y}(k+j-i|k) + \sum_{i=1}^2 \hat{b}_i \hat{u}(k+j-i|k). \quad (4.59)$$

Los parámetros del modelo predictivo (4.59) se han obtenido usando las expresiones (4.58) pero con valores erróneos para la masa, la frecuencia y el tiempo de retardo. Estos valores erróneos se expresan como  $m + \Delta m$  y  $\omega + \Delta \omega$  para la masa y la frecuencia respectivamente. El tiempo de retardo se considera siempre cero en el modelo predictivo, mientras que en la ecuación del proceso se representa por el número entero  $r$ . Como en el ejemplo anterior, el valor de la trayectoria de referencia al final del horizonte de predicción se elige igual a la consigna, que en este caso es cero, ya que el objetivo de control es mantener la posición del sistema lo más cerca posible del equilibrio.

Tabla 4.1: Módulo de la raíz principal del polinomio característico

$r$	$\Delta\omega$	$\Delta m$	$\lambda : 1$	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	<b>0.99</b>	0.50	0.67	0.76	0.81	0.85	0.88	0.90
1	0	0	1.86	1.21	<b>0.96</b>	0.82	0.76	0.79	0.84	0.87
2	0	0	1.60	1.34	1.15	1.04	<b>0.96</b>	0.90	0.86	0.84
3	0	0	1.65	1.34	1.20	1.11	1.05	<b>0.99</b>	0.95	0.92
0	-20 %	20 %	1.71	<b>0.32</b>	0.58	0.70	0.77	0.81	0.84	0.87
1	-20 %	20 %	2.01	1.31	1.03	<b>0.88</b>	0.79	0.74	0.77	0.82
3	-20 %	20 %	1.71	1.39	1.24	1.15	1.09	1.04	1.00	<b>0.97</b>

Para analizar la robustez de la ley de control predictivo (4.19) cuando se usan estos parámetros erróneos, se calculan las raíces del polinomio característico (4.34) para diferentes valores de  $\lambda$ . La Tabla 4.1 muestra el módulo de la raíz principal para distintos valores de  $\Delta m, \Delta \omega$  (en porcentaje sobre los valores verdaderos  $m, \omega$ ) y del tiempo de retardo  $r$ .

En la primera fila de la Tabla 4.1 puede verse que un valor de  $\lambda = 1$  es suficiente para garantizar la estabilidad cuando no hay discrepancias entre el modelo predictivo y el proceso. Los restantes casos corresponden a la existencia de errores, y puede observarse que el horizonte de predicción ha de extenderse para conseguir un control estable. El valor de  $\lambda$  que se requiere en cada caso depende de la magnitud del error. El valor de  $\lambda$  debe ser mayor en el caso de discrepancias en el tiempo de retardo que en el caso de errores en la masa y la frecuencia.

Consideremos ahora la aplicación de la ley de control (4.19) al caso número 4 de la Tabla 4.1, en el que el tiempo de retardo del proceso es  $r = 3$ , mientras que el modelo predictivo supone que este retardo es cero. Como fuerza excitadora se considera un impulso inicial que desplaza la masa fuera de su posición de equilibrio. El objetivo del control es amortiguar la vibración y devolver la masa a la posición de equilibrio lo antes posible.

La Figura 4.6 muestra el desplazamiento inestable para los distintos valores de  $\lambda \leq 5$ . La Figura 4.7 muestra la respuesta para  $\lambda = 6$  que, como se ve en la Tabla 4.1, es estable. La efectividad del control para amortiguar la respuesta tras el impulso inicial es notable en comparación

con la respuesta sin control que se muestra en la Figura 4.8. Observemos que, con control predictivo, la vibración desaparece antes de un segundo, mientras que persiste durante más de cinco segundos en el caso sin control.

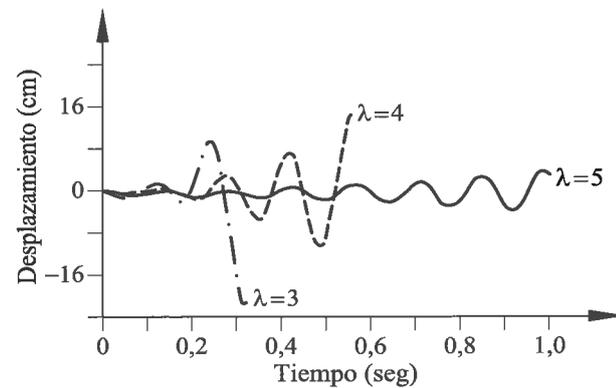


Figura 4.6: Respuestas inestables para  $\lambda \leq 5$ .

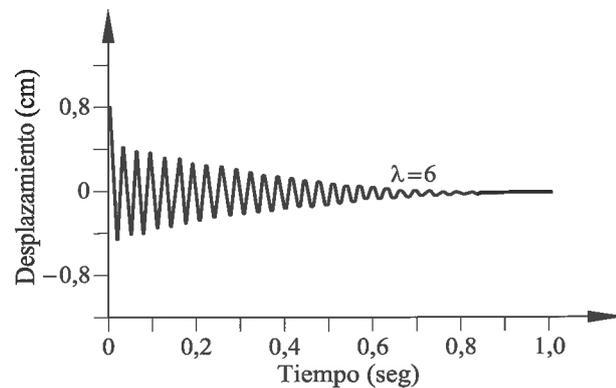


Figura 4.7: Respuesta estable para  $\lambda = 6$ .

## 4.6 Conclusiones

La necesidad de resolver el problema de inestabilidad relacionado con la aplicación del control predictivo a procesos con inverso inestable ha llevado al desarrollo de la estrategia extendida presentada en este capítulo. La

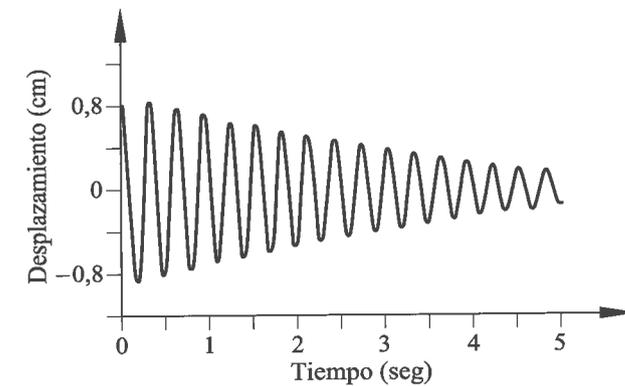


Figura 4.8: Respuesta sin control.

nueva estrategia se basa esencialmente en la evaluación de las secuencias de entradas y salidas del proceso predichas en un horizonte de predicción. Para llevar a cabo esta evaluación, se redefine un criterio de rendimiento en cada instante de muestreo a lo largo de este horizonte. La longitud  $\lambda$  del horizonte de predicción es un parámetro de diseño importante en esta estrategia. Tiene un significado físico e intuitivo que hace que su elección sea sencilla. Mediante una selección adecuada de  $\lambda$ , el diseñador puede asegurar un control predictivo estable y robusto en presencia de una dinámica inversa inestable, tiempo de retardo y errores de modelización. Otros parámetros relevantes en el diseño del esquema de control predictivo son los que definen la trayectoria de referencia y también los factores de peso de la función de coste. Usando este conjunto de herramientas, el diseñador puede acomodar el sistema de control para suministrar una acción de control más o menos enérgica. En otras palabras, el diseñador puede generar la trayectoria deseada conductora (*TDC*) que requeriría un control más abrupto o más suave. De hecho, la realizabilidad física de la *TDC* es un concepto esencial en el marco de la estabilidad de los sistemas de control adaptativo predictivo como se verá en detalle en el Capítulo 7.

Este capítulo ha presentado un análisis teórico con el propósito de mostrar el significado de los conceptos que conforman la estrategia extendida. Este análisis se ha completado con ejemplos numéricos ilustrativos. Posteriores capítulos presentarán diversas aplicaciones industriales de estos conceptos. No obstante, la garantía última para un rendimiento eficiente del control predictivo se basa en la hipótesis de una buena predicción. En la

práctica, en un entorno real, esto puede conseguirse sólo combinando el control predictivo con un mecanismo adaptativo como se ha adelantado en los Capítulos 1 y 2. Los siguientes tres capítulos se centran en el diseño de sistemas adaptativos en el contexto del control predictivo y en la correspondiente teoría de estabilidad.

## E II

---

# Ejercicios de la Unidad Didáctica II

## E2.1 Introducción

Los ejercicios que se proponen en esta Unidad Didáctica tienen como objeto que el alumno experimente la aplicación de control predictivo a distintos tipos de procesos, utilizando tanto la estrategia básica como la extendida y en un entorno mono o multivariable. La aplicación de la estrategia extendida de control predictivo se llevará a cabo utilizando la solución particular de diseño presentada en el Apartado 4.4 del segundo capítulo de esta Unidad Didáctica. A menos que se indique lo contrario, consideraremos que los parámetros de las ecuaciones del proceso y del modelo predictivo son iguales.

Para realizar los ejercicios en cuestión, el alumno debe disponer de un entorno de programación similar al ya considerado para la realización de los ejercicios de la Unidad Didáctica I y preparar un programa de simulación tipo basado en un bucle "for" cuyo índice  $k$  representará el tiempo de simulación medido en períodos de control. Cada ejecución de dicho bucle deberá contemplar las siguientes operaciones:

1. Ejecutar, a partir de las condiciones previas o las iniciales, la ecuación del proceso para obtener el correspondiente valor de la variable de salida.

2. Bajo control manual, determinar la señal de control a aplicar en el siguiente instante de control.
3. Bajo control predictivo: a) Calcular la salida deseada del proceso en el instante  $k + \lambda$  empleando para ello la ecuación (4.26) de esta Unidad Didáctica; y b) Calcular la acción de control predictivo mediante la ecuación (4.19) de esta misma Unidad Didáctica.

Previamente a la ejecución de este bucle deberá elegirse en cada caso el valor del horizonte de predicción  $\lambda$ . A partir de él, según se indica en el Apartado 4.5.1 de esta Unidad Didáctica, se calcularán los parámetros  $\varphi_i^{(\lambda)}$ ,  $\delta_i^{(\lambda)}$  y  $\mu_i^{(\lambda)}$  que se utilizan en la ecuación (4.26) para el cálculo de la salida deseada en  $k + \lambda$ . Asimismo, a partir de  $\lambda$  se calcularán, de acuerdo con las ecuaciones (4.8), (4.9) y (4.18), los parámetros  $e_i^{(\lambda)}$ ,  $g_i^{(\lambda)}$  y  $h^{(\lambda)}$  que se utilizan en la ecuación (4.19) para el cálculo de la acción de control predictivo.

La aplicación de la estrategia básica de control predictivo corresponde al caso particular donde  $\lambda = 1$ , en el que la ecuación (4.26) equivale a la ecuación (3.9) y la ecuación (4.19) equivale a la (3.10).

En todos los ejercicios deberán mostrarse las gráficas de las variables E/S del proceso y de la salida deseada conductora.

## E2.2 Ejercicios utilizando la estrategia básica

Los objetivos didácticos de los ejercicios que se proponen en esta sección son:

- a) Ilustrar la utilización de distintas dinámicas deseadas en lazo cerrado.
- b) Ilustrar la limitación de la estrategia básica cuando se aplica a procesos con inverso inestable.
- c) Ilustrar la aplicación de control predictivo en un contexto multivariable.

### E2.2.1 Control monovariante

Para los ejercicios de esta sección se considerará un escenario de simulación estándar definido en los siguientes puntos:

- Partiendo de condiciones de equilibrio nulas, se aplicará bajo control manual un escalón unitario en la entrada del proceso en el instante 30.
- En el instante 70, se devolverá, bajo control manual, la acción de control al valor 0.
- En el instante 100, se pasará de control manual a control predictivo, haciendo la consigna inicial igual a 0.
- En el instante 130, se cambiará la consigna del valor 0 al valor 1.
- En el instante 170, se devolverá la consigna al valor 0.
- En el instante 200 se terminará el experimento en simulación.

Los ejercicios que se proponen a continuación pretenden ilustrar la utilización de distintas dinámicas deseadas en la aplicación de control predictivo, utilizando la estrategia básica.

**Ejercicio 2.1.-** Aplicar control predictivo de acuerdo con el escenario de simulación estándar a un proceso de segundo orden descrito por la ecuación

$$y(k) = y(k-1) - 0.25y(k-2) + 0.333u(k-1) + 0.1666u(k-2),$$

donde la trayectoria deseada se particulariza según una dinámica de primer orden, asignando valores a los parámetros no nulos de la ecuación (3.9), en los siguientes casos:

- 1)  $\alpha_1 = 0.95$ ;  $\beta_1 = 0.05$
- 2)  $\alpha_1 = 0.9$ ;  $\beta_1 = 0.1$
- 3)  $\alpha_1 = 0.8$ ;  $\beta_1 = 0.1$ .

□

**Ejercicio 2.2.-** Aplicar control predictivo en el escenario de simulación estándar a un proceso de ecuación

$$y(k) = 1.2y(k-1) - 0.45y(k-2) + 0.25u(k-1) + 0.25u(k-2),$$

donde la trayectoria deseada se particulariza de la forma indicada en los siguientes casos:

- 1) Al hacer un cambio en escalón de la consigna, la salida deseada alcanza un 7% de la respuesta en régimen permanente al cabo de 1 período de control.
- 2) Al hacer un cambio en escalón de la consigna, la salida deseada alcanza un 7.84% de la respuesta en régimen permanente al cabo de 2 períodos de control.
- 3) La dinámica deseada es de primer orden con un polo igual a 0.8.

□

**Ejercicio 2.3.-** Aplicar control predictivo de acuerdo con el escenario de simulación estándar a un proceso cuya ecuación es

$$y(k) = y(k-1) - 0.21y(k-2) + 0.105u(k-1) + 0.105u(k-2),$$

donde la trayectoria deseada se particulariza según una dinámica de segundo orden caracterizada de la forma indicada en los siguientes casos:

- 1) Dos polos de valores 0.2 y 0.6; y un cero igual a -1.
- 2) Dos polos de valores 0.2 y 0.7; y un cero igual a -1.
- 3) Dos polos de valores 0.3 y 0.7; y un cero igual a -1.
- 4) Dos polos de valores 0.4 y 0.7; y un cero igual a -1.
- 5) Dos polos de valores 0.4 y 0.8; y un cero igual a -1.

□

**Ejercicio 2.4.-** Aplicar control predictivo de acuerdo con el escenario de simulación estándar, donde la dinámica deseada es de segundo orden y está definida por un polo doble de valor 0.6, y el proceso responde a la ecuación

$$y(k) = a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2),$$

cuya ganancia es igual a 1 y sus polos y ceros se particularizan en los siguientes casos:

- 1) Un par de polos complejos conjugados de valor  $0.8 \pm 0.2i$  y un cero igual a  $-0.5$ .

- 2) Un par de polos complejos conjugados de valor  $0.8 \pm 0.5i$  y un cero igual a  $-0.5$ .
- 3) Un par de polos complejos conjugados de valor  $0.6 \pm 0.5i$  y un cero igual a  $-0.5$ .
- 4) Un par de polos complejos conjugados de valor  $0.4 \pm 0.2i$  y un cero igual a  $-0.5$ .
- 5) Un par de polos complejos conjugados de valor  $0.4 \pm 0.5i$  y un cero igual a  $-0.5$ .

□

El ejercicio que se propone a continuación pretende ilustrar la limitación de la estrategia básica cuando se aplica a procesos con inverso inestable.

**Ejercicio 2.5.-** Aplicar control predictivo de acuerdo con el escenario de simulación estándar, donde la dinámica deseada viene determinada por un polo doble de valor 0,6 y la dinámica del proceso está descrita por la ecuación

$$y(k) = a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2),$$

que se particulariza en los dos casos siguientes:

- 1) Una ganancia igual a la unidad, un polo doble de valor 0,7 y un cero al que se le asignarán los valores 0.9, 1.1 y 1.5, respectivamente.
- 2) Una ganancia igual a la unidad, un polo doble de valor 0.5 y un cero al que se le asignarán los valores  $-0.9$ ,  $-1.0$  y  $-1.1$ , respectivamente.

□

## E2.2.2 Control multivariable y presencia de ruido

Cuando la ecuación del proceso incluye una perturbación medible, la ecuación del modelo predictivo (3.8) debería incrementarse en un sumatorio que tuviera en cuenta dicha perturbación medible, pasando a tener un modelo predictivo de la forma

$$\hat{y}(k+1|k) = \sum_{i=1}^{\hat{n}} \hat{a}_i y(k+1-i) + \sum_{i=1}^{\hat{m}} \hat{b}_i u(k+1-i) + \sum_{i=1}^{\hat{p}} \hat{c}_i w(k+1-i). \quad (\text{E2.1})$$

A partir de esta ecuación podrá realizarse el cálculo del control predictivo de acuerdo con la estrategia básica.

Los ejercicios de esta sección pretenden ilustrar la aplicación de control predictivo en un contexto multivariable. Consideraremos que en este contexto el proceso está descrito por la ecuación

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + c_1 w(k-1) + c_2 w(k-2). \quad (\text{E2.2})$$

Es decir, este proceso tiene una salida  $y(k)$  y dos entradas, que son la acción de control  $u(k)$  y la perturbación medible  $w(k)$ . En el dominio de la transformada en  $z$  la relación entre la salida del proceso y las entradas puede escribirse de la siguiente manera:

$$Y(z) = T_u(z)U(z) + T_w(z)W(z),$$

donde

$$T_u(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}; \quad T_w(z) = \frac{c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}.$$

En este contexto multivariable,  $T_u(z)$  es la función de transferencia relativa a la acción de control y  $T_w(z)$  es la función de transferencia relativa a la perturbación medible.

Para los ejercicios de esta sección se considerará un escenario de simulación estándar definido por los siguientes puntos:

- Partiendo de las condiciones de equilibrio y operando bajo control manual, considerar un cambio en escalón unitario en la perturbación medible del proceso en el instante 30.
- En el instante 70, pasar de control manual a control automático, con el valor de consigna para la salida del proceso igual a 0.
- En el instante 100, devolver el valor de la perturbación medible al valor 0.
- En el instante 130, hacer un cambio de consigna de 0 a 1 y asignar a la perturbación medible del proceso un valor igual a  $-1$ .
- En el instante 170, devolver a 0 los valores tanto de consigna como de la perturbación medible del proceso.

**Ejercicio 2.6.-** Aplicar control predictivo de acuerdo con el escenario de simulación estándar, bajo las siguientes condiciones:

- La dinámica deseada vendrá determinada por un polo doble en 0.6.
- La función de transferencia relativa a la acción de control vendrá determinada por un polo doble igual a 0.7, un cero igual a 0.5 y una ganancia igual a 1.
- La función de transferencia relativa a la perturbación medible vendrá determinada por un polo doble igual a 0.7, un cero igual a  $-0.5$  y una ganancia igual a  $1/2$ . □

**Ejercicio 2.7.-** Realizar un experimento equivalente al del ejercicio anterior en el que las funciones de transferencia relativas a la acción de control y a la perturbación medible se intercambian. Es decir:

- La función de transferencia relativa a la acción de control vendrá determinada por un polo doble igual a 0.7, un cero igual a  $-0.5$  y una ganancia igual a  $1/2$ .
- La función de transferencia relativa a la perturbación medible vendrá determinada por un polo doble igual a 0.7, un cero igual a 0.5 y una ganancia igual a 1. □

**Ejercicio 2.8.-** Resolver un ejercicio equivalente al 2.6 en el que la ecuación del proceso (E2.2) se modifica, incluyendo un ruido de medida, de la siguiente forma:

$$y_a(k) = a_1 y_a(k-1) + a_2 y_a(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + c_1 w(k-1) + c_2 w(k-2),$$

$$y(k) = y_a(k) + n_y(k),$$

donde  $n_y(k)$  será un ruido gaussiano de media cero y desviación tipo 0.025. □

**Ejercicio 2.9.-** Resolver un ejercicio equivalente al anterior en el que a la salida del proceso se le aplica un filtro de primer orden según la ecuación

$$y_f(k) = F y(k) + (1 - F) y_f(k-1),$$

donde  $y_f$  es la variable a controlar y el valor de la constante del filtro es  $F = 0.5$ . □

**Ejercicio 2.10.-** Realizar un experimento como el del Ejercicio 2.9 donde la dinámica deseada quedará determinada por un polo doble igual a 0.75. □

## E2.3 Ejercicios utilizando la estrategia extendida

En este apartado, los ejercicios de aplicación de la estrategia extendida considerarán, a menos que se indique lo contrario, el programa de simulación tipo descrito en el Apartado 4.6 y los mismos escenarios de simulación estándar que se han considerado para la estrategia básica, en los ejercicios de control monovariante y en los de multivariante respectivamente.

Los objetivos didácticos de los ejercicios que se proponen en este apartado son:

- a) Ilustrar la respuesta del proceso en lazo cerrado dependiendo de la elección del horizonte de predicción  $\lambda$ .
- b) Ilustrar cómo la estrategia extendida supera las limitaciones de la estrategia básica.
- c) Ilustrar la aplicación de control predictivo en un contexto multivariante en presencia de perturbaciones.

### E2.3.1 Control monovariante

El ejercicio siguiente pretende ilustrar cómo la respuesta en lazo cerrado depende de la elección del horizonte de predicción  $\lambda$ .

**Ejercicio 2.11.-** Sea un proceso genérico definido por la ecuación

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2).$$

En el escenario de simulación estándar, aplicar control predictivo utilizando la estrategia extendida. La dinámica de referencia estará definida por un

polo doble de valor 0.6. Para el horizonte de predicción  $\lambda$  se considerarán los valores 1 (coincide con la estrategia básica), 3, 5 y 20. La ecuación del proceso se particularizará para los dos casos siguientes:

1. El proceso tiene un par de polos complejos conjugados de valor  $0.8 + 0.2i$ , un cero igual a  $-0.5$  y ganancia igual a 1. Este proceso coincide con el del caso 1 del Ejercicio 2.4.
2. El proceso tiene un par de polos complejos conjugados de valor  $0.4 + 0.5i$ , un cero igual a  $-0.5$  y ganancia igual a 1. Este proceso coincide con el del caso 5 del Ejercicio 2.4. □

Los dos ejercicios siguientes pretenden ilustrar cómo la aplicación de la estrategia extendida de control predictivo supera las limitaciones de la estrategia básica. El Ejercicio 2.12 es equivalente al Ejercicio 2.5 (caso 1) pero sustituyendo la aplicación de la estrategia básica por la extendida. El Ejercicio 2.13 es equivalente al Ejercicio 2.5 (caso 2) también ahora con la estrategia extendida.

**Ejercicio 2.12.-** Consideremos un primer proceso de segundo orden cuya dinámica se caracteriza por un polo doble de valor 0.7, una ganancia igual a la unidad y un cero igual a 0.9; y un segundo proceso igual al anterior pero en el que el valor del cero es de 1.1. En el escenario de simulación estándar, aplicar control predictivo para cada uno de estos dos procesos, utilizando la estrategia extendida con una dinámica de referencia definida por un polo doble de valor 0.6, y para valores del horizonte de predicción  $\lambda$  iguales a 1, 10 y 20 respectivamente. □

**Ejercicio 2.13.-** Consideremos un primer proceso de segundo orden cuya dinámica se caracteriza por un polo doble de valor 0.5, una ganancia igual a la unidad y un cero igual a  $-0.9$ ; un segundo proceso igual al anterior pero en el que el valor del cero es  $-1$ ; y un tercer proceso igual al anterior pero en el que el valor del cero es  $-1.1$ . Aplicar, en el escenario de simulación estándar, control predictivo para cada uno de estos procesos, utilizando la estrategia extendida con una dinámica de referencia definida por un polo doble en 0.6, y para valores del horizonte de predicción  $\lambda$  iguales a 1, 2 y 5 respectivamente. □

### E2.3.2 Control multivariable y presencia de ruido

Cuando la ecuación del proceso incluye una perturbación medible, partiendo de la definición del modelo predictivo según la ecuación (E2.1), el cálculo de la acción de control utilizando la estrategia extendida definido por la ecuación (4.19), debe ser también ampliado con dos términos relacionados con la perturbación medible. Puede comprobarse que la ley de control resultante es la siguiente:

$$u(k) = \hat{u}(k|k) = \frac{y_r(k + \lambda|k) - \sum_{i=1}^{\hat{n}} \hat{e}_i^{(\lambda)} y(k + 1 - i) - \sum_{i=2}^{\hat{m}} \hat{g}_i^{(\lambda)} u(k + 1 - i)}{\hat{h}^{(\lambda)}} - \frac{\sum_{i=2}^{\hat{p}} \hat{f}_i^{(\lambda)} w(k + 1 - i) + \left[ \sum_{i=1}^{\lambda} \hat{f}_1^{(i)} \right] w(k)}{\hat{h}^{(\lambda)}}, \quad (\text{E2.3})$$

donde se supone que la perturbación medible  $w(k)$  se mantiene, al igual que la acción de control, constante a lo largo del horizonte de predicción, y los parámetros  $\hat{f}_i^{(\lambda)}$  y  $\hat{f}_1^{(i)}$  pueden calcularse a partir de los parámetros  $\hat{a}_i$  y  $\hat{c}_i$  de la ecuación del modelo predictivo mediante expresiones recursivas similares a las dadas en (4.8) y (4.9) para el cálculo de los parámetros  $\hat{g}_i^{(\lambda)}$  y  $\hat{g}_1^{(i)}$  a partir de los parámetros  $\hat{a}_i$  y  $\hat{b}_i$ . Se sugiere que el alumno compruebe la veracidad de la expresión (E2.3) para el cálculo de la acción de control predictivo cuando se utiliza la solución particular de la estrategia extendida de control predictivo presentada en el Apartado 4.4 de esta Unidad Didáctica y se considera, en el modelo predictivo, la existencia de una perturbación medible.

Por lo tanto, la secuencia de operaciones requerida en el entorno multivariable que vamos a considerar en los ejercicios que se proponen a continuación será similar a la ya considerada inicialmente en el programa de simulación tipo, pero ampliando adecuadamente los cálculos para tener en cuenta la existencia de una perturbación medible.

Los Ejercicios 2.14 y 2.15 siguientes pretenden ilustrar la aplicación de la estrategia extendida de control predictivo en un contexto multivariable y con presencia de ruido de medida. De hecho, el Ejercicio 2.14 es equivalente al 2.7 y el Ejercicio 2.15 es equivalente al 2.8, utilizando en ambos casos la mencionada estrategia extendida.

**Ejercicio 2.14.-** Realizar un experimento equivalente al del Ejercicio 2.7, pero utilizando la estrategia extendida de control predictivo, donde la dinámica de referencia es igual a la dinámica deseada en dicho ejercicio, y al horizonte de predicción  $\lambda$  se le asignan valores 3, 5 y 10. □

**Ejercicio 2.15.-** Realizar un experimento equivalente al del Ejercicio 2.8, pero utilizando la estrategia extendida de control predictivo, donde la dinámica de referencia es igual a la dinámica deseada en dicho ejercicio, y el horizonte de predicción se toma  $\lambda_3$ . □

### E2.4 Comentarios a los ejercicios

**Ejercicio 2.1:** Puede observarse que la trayectoria de salida del proceso sigue la dinámica deseada, que en los tres casos considerados es de primer orden. La evolución de la variable de salida hacia la consigna es más rápida en el segundo caso que en el primero. Ello es debido a que la dinámica deseada presenta, en el primer caso, un polo igual a 0.95, mientras que en el segundo es 0.9. Por otra parte, de la observación que el parámetro  $\beta_1$  en el primer caso es menor que en el segundo se deriva inmediatamente que la dinámica deseada en este segundo es más rápida. Por último, puede constatarse que, en el caso 3, la salida del proceso nunca alcanzará el valor 1 de consigna, sino que se estabilizará en 0.5. Ello es debido a que la ganancia de la dinámica deseada es distinta de 1. De hecho esta ganancia es igual a 0.5, que es el valor que alcanza la trayectoria deseada, y en consecuencia la salida del proceso en este caso. Este hecho ilustra la necesidad de que la ganancia de la dinámica deseada debe ser igual a 1 para que la salida del proceso siempre alcance el valor de consigna.

La estrategia básica exige en los casos considerados que la salida del proceso, que tiene una dinámica de segundo orden, siga punto a punto una trayectoria que responde a una dinámica deseada de primer orden. El carácter abrupto de la acción de control requerida tiene su origen en esta exigencia y se intensifica más en el segundo caso, donde la dinámica deseada es más rápida.

**Ejercicio 2.2:** En los casos 1 y 2 es fácil calcular la ecuación del bloque conductor si la dinámica es de primer orden. El cálculo se realizará teniendo en cuenta el porcentaje de respuesta permanente, en el primero o segundo período de control, en función de los parámetros  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  del bloque conductor y teniendo en cuenta que la suma de ambos parámetros es siempre igual a 1, que es la ganancia de la dinámica del bloque conductor. En el tercer caso el cálculo es igualmente sencillo puesto que el valor del parámetro  $\alpha_1$  es igual al del polo de la dinámica deseada.

**Ejercicio 2.3:** En el contexto de este ejercicio, puede observarse que cuanto más rápida sea la dinámica deseada con respecto a la dinámica del proceso, la acción de control que realiza un cambio en escalón en la consigna, inicialmente alcanzará un valor más alto, sobrepasando su valor final. Cuando la dinámica deseada y la dinámica del proceso son iguales, la acción de control resulta ser simplemente un escalón. Inversamente, cuanto más lenta sea la dinámica deseada con respecto a la dinámica del proceso, la acción de control que realiza un cambio en escalón en la consigna, inicialmente alcanzará un valor más moderado, por debajo de su valor final.

**Ejercicio 2.4:** En las respuestas naturales del proceso a un escalón unitario en cada uno de los casos puede observarse que, cuanto mayor sea la parte imaginaria del polo, mayor es la sobreoscilación y más rápida es inicialmente la respuesta del proceso. En todos los casos, la salida del proceso sigue la trayectoria deseada, pero cuanto más rápida es inicialmente la respuesta del proceso con respecto a la dinámica deseada, más moderada es la magnitud inicial de la señal de control. En consecuencia, dado que en el caso 1 la respuesta inicial es más lenta que en el caso 2, se puede constatar, en términos generales, que en el primero la magnitud inicial de la señal de control es mayor que en el segundo. Esta misma relación entre la moderación de la señal de control inicial y la respuesta del proceso puede observarse en los casos 3, 4 y 5. Por otra parte, las oscilaciones en la señal de control tienen el sentido de compensar las oscilaciones propias de la respuesta natural del proceso para conducir la salida del mismo a través de la trayectoria deseada.

**Ejercicio 2.5:** En el primer caso, el valor positivo del cero igual a 0.9 provoca una respuesta natural del proceso a un escalón unitario muy rápida y con una gran sobreoscilación. En consecuencia, cuando se aplica control

predictivo con una dinámica deseada de respuesta mucho más lenta, la señal de control generada es moderada y estable. Cuando en este mismo caso el cero positivo es igual a 1.1, la respuesta natural del proceso a un escalón primero desciende considerablemente y luego sube, de forma estable, hacia la respuesta permanente. Al aplicarse control predictivo se observa cómo la salida del proceso sigue la trayectoria deseada en el cambio de consigna de 0 a 1, pero la señal de control tiende a  $-\infty$ . Cuando el cero aumenta a 1.5, el descenso inicial de la respuesta natural es menor, pero la señal de control predictivo, al cambiar la consigna de 0 a 1, tiende a  $-\infty$  mucho más rápidamente.

Para que la ecuación del proceso tuviera, en este caso, un cero igual a 1, los dos parámetros  $b$ 's de dicha ecuación deberían tener el mismo valor absoluto y distinto signo. Dada la relación entre la ganancia y los parámetros  $a$ 's y  $b$ 's de la ecuación del proceso, para aproximar en este caso una ganancia del proceso igual a 1, los valores absolutos de los parámetros  $b$ 's deberán tender a infinito. Por esta razón, la respuesta natural a un escalón unitario presenta un descenso, el cual es tanto más acusado cuanto más se acerca a 1 el valor del cero que estamos considerando.

En el segundo caso, aunque el polo del proceso es representativo de una dinámica más rápida que la deseada, el cero negativo ralentiza la dinámica del proceso, como puede observarse en su respuesta natural al escalón unitario. Es por ello que, cuando se aplica control predictivo y la salida del proceso sigue a la trayectoria deseada entre 0 y 1, la señal de control, cuando el cero negativo tiene un valor absoluto inferior a uno, es abrupta y oscilatoria, aunque esta oscilación se amortigua hasta alcanzar un valor permanente de equilibrio. Cuando el cero negativo adquiere un valor absoluto igual a 1, el rendimiento del control predictivo es análogo al considerado previamente, pero en este caso la oscilación no se amortigua. Finalmente, cuando el cero tiene un valor absoluto mayor que 1, la oscilación en la señal de control predictivo es divergente, manteniéndose como anteriormente la salida del proceso en la trayectoria deseada.

En los dos casos, la inestabilidad observada responde a la naturaleza del cero. En efecto, en el primer caso, la tendencia exponencial de la señal de control hacia infinito, sin oscilaciones y manteniendo un mismo signo negativo, es debida al hecho de que el cero inestable es positivo. En el segundo caso, la divergencia exponencial de las oscilaciones en la señal de control es debida al hecho de que el cero inestable es negativo.

**Ejercicios 2.6 y 2.7:** Los resultados en estos dos ejercicios muestran que los cambios en el valor permanente de la acción de control son coherentes con las ganancias de las funciones de transferencia relativas a la acción de control y a la perturbación medible. En ambos ejercicios la dinámica deseada es más rápida que la dinámica de la función de transferencia relativa a la acción de control. Por ello, en ambos casos puede observarse que, en las transiciones del punto de consigna, existen sobrepasamientos de la acción de control sobre su valor permanente. Sin embargo, en el primer caso, el cero positivo en la función de transferencia relativa a la acción de control hace más rápida la respuesta natural de ésta. Por ello, los mencionados sobrepasamientos de la acción de control son moderados. Por el contrario, en el segundo caso, el cero negativo en la función de transferencia relativa a la acción de control ralentiza la respuesta natural de ésta. Por ello, los mencionados sobrepasamientos de dicha acción de control son más agresivos. Asimismo, para lograr los objetivos de control en el segundo caso pueden observarse oscilaciones en la señal de control debidas al cero negativo en la ecuación del controlador.

**Ejercicios 2.8, 2.9 y 2.10:** El ruido de medida  $n_y(k)$  aplicado en los tres ejercicios tiene una desviación tipo igual a 0.025. Esto quiere decir que su valor instantáneo puede variar entre  $\pm 0.075$ , y por lo tanto tener una amplitud entre dos instantes de control de hasta 0.15. Esto representa un nivel considerable de las perturbaciones actuando sobre el proceso, teniendo en cuenta que los cambios de consigna considerados en estos ejercicios son del orden de la unidad.

Este nivel de ruido afecta al rendimiento del control predictivo en el sentido de que, aunque la salida medida no se desvía notoriamente del valor deseado, la señal de control generada resulta abrupta y oscilatoria, como se puede observar en los resultados del Ejercicio 2.8.

Para intentar disminuir el efecto del ruido de medida observado en el Ejercicio 2.8, el Ejercicio 2.9 introduce un filtro de primer orden que se aplica a la salida del proceso. De esta forma, la salida filtrada, que pasa a ser la señal bajo control, contendrá un nivel de ruido inferior. De hecho, en los resultados obtenidos en el Ejercicio 2.9 se puede observar que, para mantener la salida del proceso alrededor de su valor deseado, la acción de control resulta menos abrupta y con oscilaciones más moderadas y de menor frecuencia.

Sin embargo, para interpretar mejor los resultados del Ejercicio 2.9, debe tenerse en cuenta que la salida filtrada responde a una dinámica distinta y más lenta que la dinámica que corresponde a la salida medida del proceso. Este cambio dinámico tiene dos consecuencias que analizamos a continuación. La primera consiste en que el modelo que utiliza el controlador predictivo, que corresponde a la dinámica de la salida del proceso sin filtrar, será ahora distinto del modelo que corresponde a la salida del proceso bajo control, que es la salida filtrada. Esta diferencia entre ambos modelos sin duda afecta al rendimiento de control. La segunda consecuencia consiste en que la señal de control debe realizar un esfuerzo mayor para que la salida filtrada del proceso (más lenta) siga la trayectoria deseada previamente establecida para la salida del proceso. De hecho puede observarse que las trayectorias de aproximación de la salida medida del proceso a la consigna son más rápidas en el Ejercicio 2.9 que en el Ejercicio 2.8.

En resumen, aunque la acción del filtro puede disminuir el efecto de las perturbaciones, el cambio de dinámica introducida en la variable bajo control puede afectar el rendimiento del mismo al demandar una acción de control más enérgica con un modelo predictivo inexacto.

Para paliar el efecto de demandar una dinámica más rápida en la salida medida del proceso o, lo que es lo mismo, pedir a la salida filtrada que siga la misma dinámica deseada que previamente pedíamos a la salida medida del proceso, el Ejercicio 2.10 introduce una dinámica deseada más lenta. En los resultados obtenidos, las trayectorias de aproximación de la salida medida del proceso a su consigna son más lentas que las observadas en el Ejercicio 2.9, aproximándose a las obtenidas en el Ejercicio 2.8. La acción de control es asimismo más amortiguada y con oscilaciones menos acusadas que las observadas en el Ejercicio 2.9.

Además de la introducción de un filtro y de la elección apropiada de la dinámica deseada para la variable bajo control, existe una corrección más eficaz del efecto del ruido. Esta se basará, en general, en la utilización de un período de muestreo que sea un submúltiplo del período de control, utilizando los instantes intermedios de muestreo para filtrar eficazmente la salida medida del proceso y, asimismo, la aplicación de un mecanismo que tenga en cuenta el nivel de ruido, tal y como se describe más adelante en el Apartado 11.4.4. del Capítulo 11 de la Unidad Didáctica VI.

**Ejercicio 2.11:** En el primer caso, cuando se aplica control predictivo con  $\lambda = 1$  (estrategia básica), puede observarse que se necesita, en los cambios de consigna, una acción de control abrupta y sobreoscilante para forzar que la salida del proceso, cuya dinámica es más lenta que la dinámica de referencia, siga la trayectoria de esta última. A medida que el horizonte de predicción aumenta puede observarse cómo la sobreoscilación de la acción de control se modera, y la respuesta del proceso a cambios de consigna va paulatinamente aproximándose desde la trayectoria de referencia hacia la respuesta natural del proceso a un escalón. Cuando el horizonte de predicción es mayor que el período de respuesta transitoria del proceso a un escalón, es decir en el caso con  $\lambda = 20$ , puede observarse que la señal de control que produce el cambio de consigna se convierte en el escalón que llevará la salida del proceso a su valor permanente deseado (consigna), siguiendo la propia dinámica del proceso.

Por el contrario, en el segundo caso, cuando se aplica control predictivo con  $\lambda = 1$ , puede observarse que se necesita, en los cambios de consigna, una acción de control moderada y sobreamortiguada para hacer que la salida del proceso, cuya dinámica es más rápida que la dinámica de referencia, se ralentice para seguir la trayectoria de esta última. A medida que el horizonte de predicción aumenta, puede observarse cómo la amortiguación de la acción de control va disminuyendo, y la respuesta del proceso a cambios de consigna va aproximándose paulatinamente desde la trayectoria de referencia hacia la respuesta natural del proceso a un escalón. Cuando el horizonte de predicción es mayor que el período de respuesta transitoria del proceso a un escalón, es decir, en el caso  $\lambda = 20$ , puede observarse que la señal de control que produce el cambio de consigna se convierte en el escalón que llevará la salida del proceso a su valor permanente deseado (consigna), siguiendo la propia dinámica del proceso.

En resumen, la aplicación de control predictivo con  $\lambda = 1$  fuerza a la salida del proceso a seguir la trayectoria de referencia. La misma aplicación con  $\lambda$  igual a un valor que supera el período transitorio de la respuesta del proceso a un escalón, permite que la salida del proceso se comporte de acuerdo con la dinámica propia del mismo. Cualquier elección intermedia del valor del horizonte de predicción conllevará una respuesta de la salida del proceso de carácter intermedio entre la dinámica de referencia y la dinámica natural del mismo.

**Ejercicio 2.12:** La aplicación de control predictivo al primer proceso muestra que la salida del mismo, en presencia de cambios de consigna, sigue la trayectoria de referencia cuando el horizonte de predicción es  $\lambda = 1$ , con una señal de control muy amortiguada que frena la respuesta natural del proceso. Por el contrario, cuando el horizonte de predicción es  $\lambda = 20$ , la señal de control resulta ser el escalón que llevará la salida del proceso a su valor permanente deseado siguiendo la propia dinámica del proceso. El valor  $\lambda = 10$  provoca una trayectoria de salida del proceso intermedia entre la trayectoria de referencia y la respuesta natural del proceso, aunque más aproximada a esta última, evidenciando el papel que juega el horizonte de predicción  $\lambda$  en la determinación de la dinámica del sistema en lazo cerrado.

Por su parte, la aplicación de control predictivo al segundo proceso muestra que la salida del mismo, en presencia de cambios de consigna, sigue la trayectoria de referencia cuando el horizonte de predicción es  $\lambda = 1$ . Pero, para obtener este resultado, la señal de control generada tiende a  $-\infty$ . Por el contrario, cuando el horizonte de predicción es  $\lambda = 20$ , la señal de control pasa a ser el escalón. El valor  $\lambda = 10$  provoca una respuesta intermedia entre ambos extremos, que se logra ya con una señal de control estable. Se invita al alumno a explorar el valor de  $\lambda$  para el que la señal de control deja de tender a  $-\infty$ .

**Ejercicio 2.13:** La aplicación de control predictivo al primer y segundo procesos considerados muestra que las salidas de los mismos, en presencia de cambios de consigna, siguen la trayectoria de referencia cuando el horizonte de predicción es  $\lambda = 1$ , con una señal de control fuertemente oscilatoria, aunque amortiguada en el caso primero; y permanente oscilatoria en el caso segundo. Por el contrario, cuando el horizonte de predicción es  $\lambda = 5$ , la señal de control resulta ser, en ambos casos, el escalón que lleva la salida del proceso a su valor permanente deseado, siguiendo la propia dinámica del proceso. Basta cambiar el valor de  $\lambda$  de 1 a 2, para obtener, tanto en el primer proceso como en el segundo, una trayectoria de salida intermedia entre la trayectoria de referencia y la respuesta natural del proceso, que prácticamente elimina las oscilaciones en la señal de control en ambos casos.

La aplicación de control predictivo al tercer proceso muestra que la salida del mismo sigue la trayectoria de referencia cuando el horizonte de predicción es igual a 1, pero la señal de control generada resulta en una oscilación divergente. Cuando el horizonte de predicción es igual a 5, la señal de control pasa a ser el escalón que lleva la salida del proceso a su

valor permanente deseado. El valor  $\lambda = 2$  es capaz de generar una señal de control estable, eliminando prácticamente las oscilaciones observadas para el caso con  $\lambda = 1$ .

**Ejercicio 2.14:** Los resultados obtenidos muestran que los sobrepasamientos de la acción de control observados en el Ejercicio 2.7, donde el horizonte de predicción era  $\lambda = 1$ , se moderan progresivamente al aumentar el valor de  $\lambda$  a 3, 5 y 10. Cuando el valor de  $\lambda$  es 10, la acción de control que realiza un cambio de consigna en la salida del proceso se aproxima en gran medida a un escalón y la trayectoria de salida del proceso a la respuesta natural al mencionado escalón. De nuevo se constata el papel de  $\lambda$ , cuya elección puede obligar a la salida del proceso a seguir fielmente a la trayectoria de referencia ( $\lambda = 1$ ), o permitir que la salida del proceso alcance sus consignas de acuerdo con su propia dinámica ( $\lambda$  elevado).

**Ejercicio 2.15:** Este ejercicio pretende comprobar si el pasar de la estrategia básica a la estrategia extendida puede tener, por sí mismo, una influencia positiva en los resultados obtenidos en el Ejercicio 2.8 en el sentido de moderar las oscilaciones de la acción de control provocadas por el ruido de medida. Los resultados obtenidos no muestran una mejora significativa, e indican que la minimización de los efectos del ruido, como ya se ha indicado previamente, deberá estar basada principalmente en la aplicación de un filtrado eficaz de la salida del proceso, utilizando si es posible instantes de muestreo intermedios a los instantes de control, así como mecanismos basados en el nivel de ruido, tal y como el que se describe más adelante en el Apartado 11.4.4 del Capítulo 11 de la Unidad Didáctica VI.

Los resultados obtenidos en este ejercicio son lógicos en el sentido de que podríamos decir que la estrategia extendida de control predictivo proyecta, en un horizonte de predicción, las tendencias observadas en la trayectoria del proceso, las cuales se ven lógicamente afectadas por el ruido de medida.

## Unidad Didáctica III

---

# Diseño del Mecanismo de Adaptación: Síntesis del Sistema Adaptativo

## Resumen de la Unidad Didáctica III

---

En esta Unidad Didáctica se lleva a cabo la materialización de los conceptos de sistema adaptativo y mecanismo de adaptación en el contexto del control predictivo y en el estadio de definición de la metodología de aplicación. Esta materialización se realiza a partir de las condiciones de rendimiento deseado, definidas previamente en la Unidad Didáctica I, y se describe en dos capítulos.

El capítulo primero de esta Unidad Didáctica, Capítulo 5 del libro, presenta el análisis y la síntesis de sistemas adaptativos en el escenario denominado Caso Ideal. En este caso, entre otras simplificaciones que facilitan la resolución del problema, no se consideran ruidos y perturbaciones actuando sobre el proceso. A partir de una estrategia de síntesis, asociada a conceptos de estabilidad, se deduce una expresión general del mecanismo de adaptación. El análisis de la convergencia de los parámetros del modelo adaptativo lleva al concepto de "identificación con vistas al control". Este concepto es de gran trascendencia en la aplicación práctica del control adaptativo predictivo.

El segundo capítulo, Capítulo 6 del libro, extiende los conceptos básicos desarrollados en el capítulo anterior para permitir la síntesis del mecanismo de adaptación en diferentes escenarios, incluidos en el denominado Caso Real. El primero de los escenarios es denominado "caso real sin diferencia de estructuras". En este escenario se considera todo tipo de ruidos y perturbaciones actuado sobre el proceso y el mecanismo de adaptación incorpora un criterio que evalúa previamente, en cada instante de adaptación, la bondad de la nueva información disponible de las variables de entrada y salida del proceso, para decidir si se procede o no al correspondiente ajuste paramétrico. El segundo escenario se denomina "caso real con diferencia de estructuras" porque las ecuaciones del proceso y del modelo adaptativo pueden ser de orden diferente. En él debe recurrirse a una formulación normalizada del sistema adaptativo para garantizar las condiciones de estabilidad y convergencia paramétrica deseadas. Finalmente, este capítulo analiza asimismo las propiedades de convergencia de los sistemas adaptativos en el denominado "caso real con parámetros variables con el tiempo". Debe señalarse que los resultados obtenidos en la síntesis del sistema adaptativo

en esta Unidad Didáctica verifican los criterios de rendimiento deseados, establecidos en la Unidad Didáctica I, cuando las entradas y salidas del proceso permanecen acotadas. Sin embargo, esta condición de acotación no la puede garantizar lógicamente el sistema adaptativo por sí mismo, sino que debe de ser garantizada por el control adaptativo predictivo en su conjunto, como fundamento esencial de su estabilidad. Esta cuestión constituye el objeto de la siguiente Unidad Didáctica.

Esta Unidad Didáctica se completa con ejercicios de programación que ilustran la aplicación práctica de los conceptos de diseño objeto de la misma, poniendo de relieve la operación de los sistemas adaptativos que de ellos se deducen en distintos escenarios.

## Capítulo 5

# Análisis y Síntesis del Sistema Adaptativo en el Caso Ideal

### 5.1 Introducción

#### 5.1.1 Necesidad de control adaptativo y primeros desarrollos

Los procesos industriales son típicamente no lineales y variables con el tiempo. Por lo tanto, su modelización suele ser difícil en la mayor parte de los casos, especialmente cuando las condiciones de operación varían con frecuencia. Esta es la razón fundamental por la que los métodos de la moderna teoría de control que requieren un conocimiento exacto del modelo del proceso no pueden ser aplicados satisfactoriamente en el contexto industrial. En la mayor parte de los casos, estas estrategias de control con parámetros constantes no pueden adaptarse a los cambios en las condiciones de operación. La no linealidad y la naturaleza variable con el tiempo de los procesos industriales, como ya se ha analizado en el Capítulo 1 y particularmente en el Apartado 1.9, han sido los principales factores que han motivado el desarrollo de las denominadas técnicas de *control adaptativo*.

Durante las últimas tres décadas, el área de control adaptativo ha sido objeto de una intensa investigación. Un conocido artículo [Lan74] consideró los desarrollos de una primera generación de sistemas adaptativos, denominados *sistemas adaptativos con modelo de referencia* (SAMR). De por sí, la introducción de control adaptativo no implicó un cambio en la estrategia de

control, sino únicamente la adaptación de los parámetros del controlador para evitar el deterioro del rendimiento del sistema de control en presencia de cambios en la dinámica del proceso. De esta forma los sistemas adaptativos con modelo de referencia utilizaron la metodología de realimentación negativa como estrategia básica de control y adaptaron los parámetros del controlador utilizando diferentes algoritmos.

Más tarde, en un intento de superar los problemas inherentes a la aplicación de la estrategia de realimentación negativa, la investigación en sistemas de control adaptativo consideró la estrategia de control del llamado *control óptimo lineal cuadrático* [PA73]. Sin embargo, la complejidad requerida por el cálculo de la acción de control, de acuerdo con la formulación de esta estrategia, hizo de esta alternativa una opción poco práctica en el contexto adaptativo.

Sin embargo, como un caso particular de la formulación previa, se combinó un mecanismo de adaptación basado en la identificación por mínimos cuadrados con la forma más simple de una ley de control óptimo cuadrático, que es la de *varianza mínima* [Ast70], originando los denominados *reguladores autoajustables* (RAA) [AW73]. Una extensión de la ley de mínima *varianza* condujo a la formulación de los denominados controladores autoajustables (CAA) [CG75]. Sin embargo, la simplificación conseguida en la aplicación de RAAs y CAAs, con respecto a la aplicación general de control óptimo cuadrático, no compensó las limitaciones en el rendimiento de estas soluciones en su aplicación industrial.

De lo anterior puede entenderse que los problemas inherentes a los primeros desarrollos en control adaptativo tenían su origen, no solo en el mecanismo de adaptación, sino fundamentalmente en la estrategia de control adoptada.

### 5.1.2 El control predictivo y la perspectiva de estabilidad

El control predictivo fue introducido [Mar74, Mar76a, Mar76b, Mar80] para tratar de resolver los problemas teóricos y prácticos a los que se enfrentaban los sistemas de control adaptativo. Utilizando control predictivo, si la predicción hecha por el modelo es buena, entonces por definición las variables del proceso pueden ser controladas "perfectamente". En consecuencia, los objetivos del mecanismo de adaptación, bajo control predictivo, estaban claramente definidos y consistían en conseguir que el error

de predicción del modelo tendiera hacia cero de la forma más eficiente, en el caso ideal, o al menos, en un caso real, conseguir que la acotación del error de predicción alrededor de cero fuera lo más estrecha posible. Estos objetivos son los ya expresados en términos de estabilidad en el Capítulo 2, Apartado 2.6.

Desde los primeros trabajos en control adaptativo predictivo, la solución para la síntesis del mecanismo de adaptación estuvo basada en la perspectiva de la estabilidad [Mar74, Mar76b] y no en la perspectiva de la optimización, que es la que se utilizó en los reguladores y controladores autoajustables. La perspectiva de la estabilidad había sido asimismo utilizada previamente en el diseño de sistemas adaptativos con modelo de referencia [Lan74, NK74].

Mientras que la perspectiva de estabilidad implica una tendencia o una acotación, la perspectiva de la optimización implica generalmente, como es bien conocido, la minimización de un índice de rendimiento. En el área de la modelización, donde el propósito es la identificación de los parámetros del modelo, la perspectiva de la optimización estaba perfectamente definida, en un contexto académico, para procesos lineales con parámetros constantes con el tiempo, por el método de los mínimos cuadrados. Sin embargo, cuando los parámetros del proceso varían de forma impredecible, como ocurre en el contexto industrial, la elección del índice de rendimiento para la optimización, en el mejor de los casos, no es evidente. Así pues, al producirse un cambio en la dinámica del proceso, la información de entradas y salidas disponible previamente deja, por así decirlo, de ser "buena" para la identificación de los nuevos valores de los parámetros del proceso, pero sin embargo sigue teniendo un peso importante en la minimización del índice. Puede disminuirse este peso para la información a medida que ésta se aleja del presente, introduciendo un factor de olvido [Lju99]. Sin embargo, de esta forma podemos dejar de tener en cuenta información muy valiosa y centrar la minimización del índice de rendimiento en nueva información con poco significado o incluso "desorientadora".

En el contexto del control predictivo, el papel que debe jugar el sistema adaptativo es el de resolver el problema de predecir la evolución de las variables del proceso, y no necesariamente el de llevar a cabo la identificación de los parámetros de las ecuaciones que definen la dinámica completa del proceso. Es decir, más que identificar el proceso, lo importante es predecir bien o hacer una identificación "con vistas al control" como se consideró en [Mar76b]. La expresión formal de este objetivo, y sus consecuencias, ha

sido presentada en la Conjetura del Apartado 2.7, donde se han definido y analizado las condiciones que debe satisfacer el diseño del mecanismo de adaptación para garantizar la estabilidad del conjunto del sistema de control adaptativo predictivo.

Los resultados presentados en este capítulo y en los dos siguientes, como los resultados de estabilidad presentados en [MR96], están basados y extienden resultados publicados previamente en relación al análisis y la síntesis de sistemas de control adaptativo predictivo desde la perspectiva de estabilidad [Mar76a, Mar84, MSF84, Mar86, CMSF88].

### 5.1.3 Contenidos de este capítulo

Este capítulo resuelve el problema de síntesis para un mecanismo de adaptación en el caso ideal. Asimismo, analiza las propiedades del mecanismo obtenido, que verifican las enunciadas en la Conjetura cuando el vector de entradas y salidas está acotado. Posteriormente, en el Capítulo 7, estas propiedades serán utilizadas para demostrar que, cuando se cumplen las condiciones de la Conjetura para la trayectoria deseada conductora y el control predictivo se combina con el sistema adaptativo, se garantiza la acotación del vector de entradas y salidas. De esta forma, este Capítulo y el Capítulo 7 garantizan, en el caso ideal, la estabilidad asintótica y global del conjunto del sistema de control adaptativo predictivo, es decir, el objetivo de rendimiento deseado, tal y como se definió previamente en los Apartados 2.5 y 2.6.

La teoría presentada en este capítulo considera procesos monovariantes por simplicidad en la notación. Su extensión al caso multivariable, que ha sido considerada en [Mar84, MSF84, Mar86], es directa y sencilla.

## 5.2 Una estrategia para la solución del problema de síntesis

Este apartado presenta una estrategia para el diseño de un sistema adaptativo asintóticamente estable en el caso ideal definido en el Apartado 2.2. Posteriormente analizaremos cómo este sistema adaptativo cumple con las condiciones a) y b) de la Conjetura. El resultado de estabilidad deseado se

define de la siguiente forma:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k|k) = 0. \quad (5.1)$$

La siguiente proposición define la estrategia de diseño.

**Proposición 5.1:** Se cumplirá la propiedad (5.1) si se satisface la siguiente condición:

$$s(k_t) = \sum_{k=1}^{k_t} e(k|k)^2 \leq \delta^2 < +\infty, \quad \forall k_t > 0. \quad (5.2)$$

□

**Demostración:** Dado que es una suma de errores al cuadrado,  $s(k_t)$  es una sucesión no decreciente, que puede empezar a crecer a partir del instante en que el mecanismo de adaptación empieza su operación, tal y como se ilustra en la Figura 5.1. Si se cumple la condición (5.2), esta sucesión está acotada por  $\delta^2$  y, en consecuencia, sus incrementos deben tender a cero, es decir,  $e(k|k) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . ■

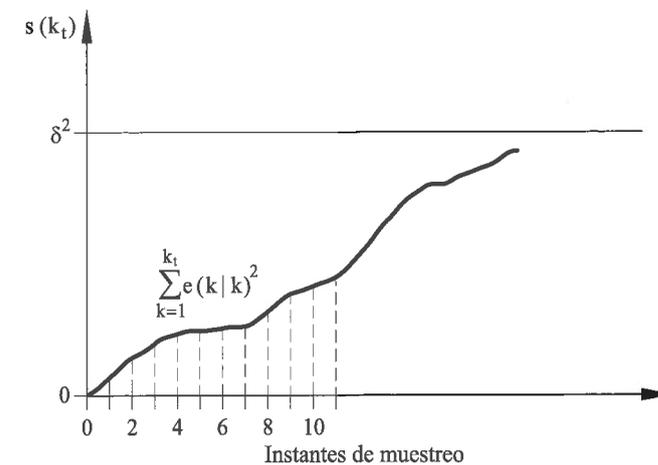


Figura 5.1: Ilustración gráfica de la condición (5.2).

Por lo tanto, un sistema adaptativo que satisfaga (5.2) será asintóticamente estable.

### 5.3 Ejemplo de síntesis del sistema adaptativo

En el caso ideal el proceso puede describirse mediante la ecuación

$$y(k) = \theta^T \phi(k-d). \quad (5.3)$$

Esta ecuación es un caso particular de la ecuación (2.28) en la que la señal de perturbación  $\Delta(k)$  es nula y el vector de parámetros  $\theta$  es constante.

El modelo AP se describe en este caso en la forma

$$\hat{y}(k|k) = \hat{\theta}(k)^T \phi(k-d), \quad (5.4)$$

donde las dimensiones de  $\hat{\theta}(k)$  y  $\theta$  son iguales.

Una medida frecuentemente utilizada para la diferencia entre los parámetros del proceso y los del modelo viene dada por el denominado *vector de error de identificación paramétrica*, definido en la forma

$$\tilde{\theta}(k) = \theta - \hat{\theta}(k). \quad (5.5)$$

Sin embargo, nuestra estrategia de síntesis, definida en el apartado anterior, está basada en el error de estimación a posteriori  $e(k|k)$ . A partir de la definición de dicho error y de (5.3) y (5.4), podemos escribir

$$e(k|k) = [\theta - \hat{\theta}(k)]^T \phi(k-d). \quad (5.6)$$

Utilizando (5.6), la suma en (5.2) puede escribirse en la forma

$$-s(k_t) = \sum_{k=1}^{k_t} e(k|k) [\hat{\theta}(k) - \theta]^T \phi(k-d). \quad (5.7)$$

La siguiente proposición define el mecanismo de adaptación.

**Proposición 5.2:** Se cumplirá la condición (5.2) si el vector de parámetros del modelo AP se genera, en cada instante  $k$ , por medio del siguiente algoritmo:

$$\hat{\theta}(k) = \sum_{h=1}^k e(h|h) B \phi(h-d) + \hat{\theta}(0), \quad (5.8)$$

donde  $B$  es una matriz definida positiva.  $\square$

**Demostración:** Consideremos la siguiente expresión:

$$\sum_{k=1}^{k_t} \left[ \sum_{h=1}^k z(h) - c \right]^T B^{-1} z(k) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^{k_t} z(k) - c \right]^T B^{-1} \left[ \sum_{k=1}^{k_t} z(k) - c \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_t} z(k)^T B^{-1} z(k) - \frac{1}{2} c^T B^{-1} c \geq -\frac{1}{2} c^T B^{-1} c, \quad (5.9)$$

que es válida para cualquier vector  $z$  variable con el tiempo y para cualquier vector  $c$  constante.

Sustituyendo (5.8) en (5.7), podemos escribir

$$-s(k_t) = \sum_{k=1}^{k_t} \left[ \sum_{h=1}^k e(h|h) B \phi(h-d) + \hat{\theta}(0) - \theta \right]^T e(k|k) \phi(k-d). \quad (5.10)$$

Definiendo los vectores  $z(k)$  y  $c$  de la forma

$$\begin{aligned} z(k) &= e(k|k) B \phi(k-d), \\ c &= \theta - \hat{\theta}(0), \end{aligned} \quad (5.11)$$

resulta que el miembro derecho de la igualdad (5.10) pasa a ser un caso particular del primer miembro de (5.9), y por lo tanto se verifica la desigualdad

$$-s(k_t) \geq -\delta^2, \quad (5.12)$$

donde

$$\delta^2 = \frac{1}{2} [\theta - \hat{\theta}(0)]^T B^{-1} [\theta - \hat{\theta}(0)] = \frac{1}{2} \tilde{\theta}(0)^T B^{-1} \tilde{\theta}(0). \quad (5.13)$$

Esto demuestra la condición (5.2).  $\blacksquare$

Si  $B$  es igual a la matriz identidad  $I$ , la cota  $\delta^2$  pasa a ser

$$\delta^2 = \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}(0)\|^2.$$

Este resultado muestra que la cota  $\delta^2$  depende de la magnitud del error de identificación paramétrica en el instante inicial. Si este error es cero, el

error de estimación  $e(k|k)$  será asimismo cero para todo  $k$ . Sin embargo, si el error de identificación paramétrica no es cero, la sucesión  $s(k_t)$  crece aproximándose al valor de la cota y por lo tanto la distancia entre  $s(k_t)$  y  $\delta^2$  disminuirá, tal como se ilustra en la Figura 5.1. Es importante observar que en este análisis podemos considerar cualquier otro instante  $k$  diferente de cero como instante inicial en (5.2).

En consecuencia, podemos intuitivamente asociar la distancia desde  $s(k_t)$  a la cota  $\delta^2$  con el cuadrado de la norma euclídea del error de identificación paramétrica. Al decrecer esta distancia, la norma del error de identificación paramétrica también decrecerá. Como dicha norma es positiva, y por lo tanto está acotada inferiormente por cero, sus incrementos tenderán a cero, lo que implica que los parámetros del modelo AP también tenderán a cero. Analizaremos y demostraremos rigurosamente estos resultados intuitivos en el Apartado 5.6.

#### 5.4 Errores de estimación a priori y a posteriori

El algoritmo (5.8) puede describirse, de manera más apropiada para su aplicación práctica, en la siguiente forma recursiva:

$$\hat{\theta}(k) = e(k|k)B\phi(k-d) + \hat{\theta}(k-1). \quad (5.14)$$

Sin embargo, aunque sabemos que si se verifica (5.14) el mecanismo de adaptación satisfará los criterios deseados de estabilidad, este mecanismo de adaptación está todavía incompleto en su definición, como consideramos a continuación.

Puede observarse que el algoritmo (5.14) ajusta los parámetros del modelo en el instante  $k$  a partir del error de estimación a posteriori  $e(k|k)$ . Sin embargo, este error depende de la estimación a posteriori de la salida del proceso  $\hat{y}(k|k)$ , que se calcula por medio de la ecuación del modelo AP (5.4) a partir del valor de los parámetros ya ajustados en el instante  $k$ . Este aparentemente círculo cerrado puede romperse gracias a la relación que existe entre el error de estimación a posteriori y el error de estimación a priori, que deduciremos a continuación. Los errores de estimación a posteriori y a priori, en el caso ideal que estamos considerando, pueden escribirse respectivamente en la forma

$$e(k|k) = y(k) - \hat{y}(k|k) = y(k) - \hat{\theta}(k)^T \phi(k-d), \quad (5.15)$$

$$e(k|k-1) = y(k) - \hat{y}(k|k-1) = y(k) - \hat{\theta}(k-1)^T \phi(k-d). \quad (5.16)$$

Sustrayendo (5.16) de (5.15), obtenemos

$$e(k|k) - e(k|k-1) = [\hat{\theta}(k-1) - \hat{\theta}(k)]^T \phi(k-d). \quad (5.17)$$

A partir de (5.14) y (5.17) podemos escribir

$$e(k|k) - e(k|k-1) = -e(k|k)\phi(k-d)^T B\phi(k-d), \quad (5.18)$$

$$e(k|k) = \frac{e(k|k-1)}{1 + \phi(k-d)^T B\phi(k-d)}. \quad (5.19)$$

La relación (5.19) entre los errores de estimación a posteriori y a priori permite escribir (5.14) en la forma

$$\hat{\theta}(k) = \frac{e(k|k-1)B\phi(k-d)}{1 + \phi(k-d)^T B\phi(k-d)} + \hat{\theta}(k-1), \quad (5.20)$$

lo que completa la definición del mecanismo de adaptación que satisface las propiedades de estabilidad deseadas.

#### 5.5 Una expresión general para el mecanismo de adaptación

El mecanismo de adaptación (5.20) puede también escribirse en la forma

$$\hat{\theta}(k) = G(k)[y(k) - \hat{\theta}(k-1)^T \phi(k-d)] + \hat{\theta}(k-1), \quad (5.21)$$

donde

$$G(k) = \frac{B\phi(k-d)}{1 + \phi(k-d)^T B\phi(k-d)}. \quad (5.22)$$

La formulación (5.21) del mecanismo de adaptación tiene la forma de un filtro lineal recursivo con ganancia variable. Es decir, el nuevo vector de los parámetros estimados se obtiene añadiendo al vector previo de los parámetros estimados un incremento igual al error de estimación, obtenido a partir de dicho vector previo, multiplicado por un vector de ganancia variable  $G(k)$ .

Otras técnicas de estimación paramétrica, tales como las denominadas del gradiente [Men73], porque minimizan una función del cuadrado del error de estimación en la dirección del gradiente, o aquellas basadas en criterios de optimización [Lju99], convergen hacia la expresión general (5.21) que hemos obtenido en este caso desde la perspectiva de la estabilidad. Mientras que las técnicas basadas en criterios de optimización tienen sus propias definiciones del vector de ganancia  $G(k)$  que, aunque con grandes similitudes, difieren de (5.22), las técnicas del gradiente llegan a un planteamiento prácticamente equivalente.

## 5.6 Convergencia de los parámetros del modelo AP

Para el caso en que  $B = I$ , el algoritmo de adaptación (5.14) es

$$\hat{\theta}(k) = e(k|k)\phi(k-d) + \hat{\theta}(k-1), \quad (5.23)$$

donde el incremento paramétrico en cada instante  $k$  viene dado por

$$\Delta\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1) = e(k|k)\phi(k-d). \quad (5.24)$$

A partir de (5.5) y (5.23) podemos escribir

$$\tilde{\theta}(k) + e(k|k)\phi(k-d) = \tilde{\theta}(k-1), \quad (5.25)$$

$$\|\tilde{\theta}(k)\|^2 + 2e(k|k)\tilde{\theta}(k)^T\phi(k-d) + e(k|k)^2\|\phi(k-d)\|^2 = \|\tilde{\theta}(k-1)\|^2. \quad (5.26)$$

A partir de (5.6) y (5.26) se deduce

$$\|\tilde{\theta}(k)\|^2 - \|\tilde{\theta}(k-1)\|^2 = -2e(k|k)^2 - e(k|k)^2\|\phi(k-d)\|^2. \quad (5.27)$$

Dado que  $\{\|\tilde{\theta}(k)\|^2\}$  es una sucesión no negativa y sus incrementos, que son iguales al segundo miembro de (5.27), solo pueden ser negativos o nulos, dichos incrementos tienden a cero, es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [-2e(k|k)^2 - e(k|k)^2\|\phi(k-d)\|^2] = 0. \quad (5.28)$$

En el apartado anterior se ha demostrado que  $e(k|k) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . A partir de este resultado, con (5.24) y (5.28) podemos escribir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [-e(k|k)^2\|\phi(k-d)\|^2] = -\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta\hat{\theta}(k)\|^2 = 0, \quad (5.29)$$

lo que implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta\hat{\theta}(k) = 0. \quad (5.30)$$

Así pues, hemos demostrado la convergencia asintótica hacia cero de los incrementos de los parámetros del modelo AP. Es importante observar que este resultado es independiente del hecho de que la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  puede no estar acotada. La extensión de este resultado al caso en que  $B \neq I$  es sencilla y se deja como ejercicio para el lector.

## 5.7 Análisis de los resultados

### 5.7.1 Análisis de estabilidad

En los apartados previos hemos ilustrado la síntesis de un mecanismo de adaptación en el caso ideal que garantiza las siguientes propiedades asintóticas para el sistema adaptativo:

- a)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta\hat{\theta}(k) = 0,$
- b)  $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k|k) = 0.$

Estas propiedades son independientes del hecho de que la sucesión del vector de entrada/salida  $\{\|\phi(k)\|\}$  pueda ser acotada o no. Sin embargo, es importante hacer notar que la primera de estas propiedades no coincide exactamente con la propiedad a) de la Conjetura. En consecuencia, la verificación de los objetivos de control asociados a la Conjetura merece un análisis cuidadoso. En lo que queda de este apartado, analizaremos la influencia de la acotación de la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  en el logro de los objetivos mencionados.

Reescribamos aquí las ecuaciones (2.30) y (2.34) del Apartado 2.4.2, que describen las dos funciones del modelo AP en el caso real, para el caso ideal que ahora estamos considerando en la siguiente forma:

$$\hat{y}(k|k) = \hat{\theta}(k)^T\phi(k-d), \quad (5.31)$$

$$y_d(k) = \hat{\theta}(k-d)^T\phi(k-d). \quad (5.32)$$

Si la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  está acotada, utilizando la propiedad a) del sistema adaptativo en (5.31) y (5.32), se deduce de inmediato que  $y_d(k) \rightarrow \hat{y}(k|k)$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . A partir de este resultado, (5.15) y de la propiedad b) del sistema adaptativo, obtenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [y(k) - y_d(k)] = 0,$$

que evidentemente es un resultado de estabilidad asintótica más fuerte, ya que se obtiene en el caso ideal, que el resultado I) de la Conjetura.

Sin embargo, si la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  no está acotada, no puede garantizarse que  $y_d(k) \rightarrow \hat{y}(k|k)$  cuando  $k \rightarrow \infty$ ; ni siquiera que la diferencia  $y_d(k) - y(k|k)$  esté acotada.

En el Capítulo 7 se presenta el análisis de estabilidad que demuestra que las propiedades a) y b) del sistema adaptativo, que son independientes de cualquier ley de control, combinadas con la ley de control predictivo garantizan la acotación de la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$ , y por lo tanto los objetivos de control deseados, siempre que la salida deseada conductora sea físicamente realizable y acotada.

### 5.7.2 Identificación con vistas al control

De acuerdo con el diseño del mecanismo de adaptación, la función  $s(k_t)$ , suma de los cuadrados de los errores de estimación, tiene un límite superior y, en consecuencia, el cuadrado de dicho error de estimación tiende a cero cuando  $k \rightarrow \infty$ . Es importante observar que dicho error puede tender a cero, e incluso llegar a ser cero, sin que la función  $s(k_t)$  alcance su límite superior, e incluso estando significativamente alejado de él. Es decir, la función  $s(k_t)$  es no decreciente, pero al menos en intervalos puede ser no creciente y el error de estimación ser nulo. Esta circunstancia implicaría, en caso de que el vector de entradas/salidas sea acotado, que el error de predicción y, en consecuencia, el error de control fueran asimismo nulos y que la salida del proceso fuera, por lo tanto, igual a la salida deseada. Así pues, hemos deducido que alcanzar el objetivo de control deseado no requiere necesariamente que los parámetros del modelo AP coincidan con los del proceso. Es decir, para controlar bien, no hace falta que el error de identificación paramétrica sea cero. Esto rompe uno de los principios tradicionales explícita o implícitamente presentes en el diseño de sistemas

de control: *para realizar un control satisfactorio del proceso no es preciso resolver el problema de su identificación paramétrica.*

El mecanismo de adaptación que hemos deducido garantiza la estabilidad del sistema adaptativo y podemos afirmar, por su convergencia algorítmica con las técnicas de estimación del gradiente [Men73], que lo hace reduciendo el cuadrado del error de estimación en la dirección del gradiente, es decir con un criterio de máxima eficiencia. El objetivo es pues reducir el error de estimación y no el de identificar los parámetros de las ecuaciones del proceso. Sin embargo, para alcanzar su objetivo, el mecanismo de adaptación puede y tiene que realizar el ajuste de los parámetros del modelo AP. El Apartado 5.3 ha demostrado que, cada vez que el mecanismo de adaptación realiza un ajuste de los parámetros, la norma del vector de error de identificación paramétrica se reduce y que dicha norma representa la distancia entre el valor de la función no decreciente  $s(k_t)$  y su límite superior.

De todo ello podemos interpretar que el mecanismo de adaptación llevará a cabo en cada momento el ajuste paramétrico preciso para conducir el error de estimación hacia cero, obteniendo así el objetivo de control perseguido, sin (por decirlo así) "preocuparle" el problema de identificación. No obstante y como es lógico, el ajuste realizado por el mecanismo de adaptación conllevará una mejora del conocimiento de los parámetros del proceso, que se materializará en el nuevo valor de los parámetros del modelo AP. Sin embargo, ese mejor conocimiento no será suficiente para impedir que, en otras circunstancias de control, puedan producirse nuevos errores de estimación y, en consecuencia, de control. La posibilidad de que no se produzcan más errores de estimación y de control únicamente sucedería cuando la función  $s(k_t)$  hubiera alcanzado su límite superior y el problema de identificación hubiera quedado resuelto.

Así pues, el nuevo planteamiento que estamos considerando libera en principio el diseño de los sistemas de control del inconveniente de la resolución del problema de identificación y, por ende, del problema de ajustes paramétricos del controlador. El problema de identificación es siempre complicado de resolver y, en muchos casos, es prácticamente imposible, dada la naturaleza dinámica variable con el tiempo de los procesos industriales. Por ello, la posibilidad de llegar a una resolución satisfactoria del problema de control, sin necesidad de depender de la resolución del problema de identificación, abre nuevas posibilidades en la teoría y la práctica del control automático. De hecho, se hace posible controlar satisfactoria-

mente un proceso, prácticamente desde el principio, sin necesidad de ajuste experimental de los parámetros del controlador y sin un estudio de identificación previo. Bastará únicamente con una configuración metodológica de los parámetros del controlador de acuerdo con el conocimiento del proceso del que ya dispone el diseñador del mismo o el operador de planta y de los objetivos de control prescritos.

No obstante, es importante preguntarse acerca de la practicidad de este nuevo enfoque, porque el mismo considera que el mecanismo de adaptación necesitará de errores de estimación, y por lo tanto de predicción y control, para ajustar los parámetros del modelo AP lo suficiente (para aprender de la dinámica del proceso lo suficiente) para conducir dichos errores hacia cero, de manera que la salida del proceso alcance su consigna. Cabe señalar en este sentido que, dado el esquema de control predictivo en el que opera el mecanismo de adaptación, el error de predicción es equivalente al de control y que éste se define como la diferencia entre la trayectoria deseada y la salida del proceso. En consecuencia, los errores de predicción y control, que permiten el aprendizaje del mecanismo de adaptación, se producen alrededor de una trayectoria deseada diseñada para conducir la salida del proceso hacia la consigna y, por lo tanto, el aprendizaje necesario se produce en el proceso de conducción de la salida del proceso hacia su consigna o alrededor de esta misma. La reducción del error de estimación y de predicción hacia cero implicará pues la convergencia de la salida del proceso hacia la salida deseada y su estabilización en la consigna. La eficacia de este planteamiento deberá quedar corroborada finalmente por sus resultados experimentales.

El análisis realizado corresponde a los resultados teóricos obtenidos en la síntesis del mecanismo de adaptación en el caso ideal aquí tratado. El lector podrá constatar la validez práctica de este análisis, y elaborar su propia crítica, en los escenarios de simulación que uno mismo puede crear o en los correspondientes a los ejercicios para el caso ideal de esta Unidad Didáctica.

El capítulo siguiente presenta la síntesis del mecanismo de adaptación en el caso real, extendiendo el planteamiento realizado en este capítulo para el caso ideal, con el fin de verificar las condiciones de estabilidad de la Conjetura y, en definitiva, mantener la ventaja fundamental que conlleva la identificación con vistas al control previamente considerada en las aplicaciones prácticas.

## Capítulo 6

# Análisis y Síntesis del Sistema Adaptativo en el Caso Real

### 6.1 Introducción

Este capítulo presenta para el caso real una extensión de la metodología de síntesis del mecanismo de adaptación utilizada para el caso ideal, que fue originalmente introducida en [Mar84, MSF84]. Esta metodología introduce una valoración para determinar si la información de entradas y salidas del proceso que recibe el sistema adaptativo predictivo en cada instante de control es “buena” para la adaptación o, por el contrario, puede ser “perjudicial”.

En el caso ideal, analizado en el capítulo anterior, obviamente toda la información recibida es buena. Para dicho caso, la ganancia variable  $G(k)$  de la expresión general de adaptación (5.21) nunca tiende a cero, es decir, el mecanismo de adaptación nunca pierde capacidad de adaptación y los incrementos de los parámetros del modelo AP tenderán a cero únicamente porque el error de estimación tenderá a cero. De esta forma, si cambiaran los parámetros del proceso, el mecanismo de adaptación volvería a utilizar su capacidad de adaptación para obtener la convergencia en términos de error de estimación e incremento paramétrico.

Como ya hemos analizado previamente en la introducción del capítulo anterior, los métodos de identificación paramétrica basados en la perspec-

tiva de la optimización, cuyo ejemplo clásico es el de los mínimos cuadrados, dan el mismo peso a toda la información de entradas y salidas en la minimización de su índice de rendimiento.

En consecuencia, la ganancia variable  $G(k)$  de la expresión general de adaptación (5.21) tiende hacia cero cuando  $k \rightarrow \infty$ , es decir, a medida que aumenta la información recibida. Por ello estos métodos pierden con el tiempo la capacidad de adaptación y no podemos esperar de ellos un rendimiento satisfactorio si los parámetros del proceso varían con el tiempo.

La introducción del denominado factor de olvido intenta superar la problemática previamente descrita dando menos peso a la información pasada e impidiendo la tendencia hacia cero de la ganancia variable  $G(k)$  [Lju99]. Sin embargo, de esta forma, como ya hemos indicado en el Apartado 5.1.2, podemos dar menos peso o dejar de tener en cuenta información "valiosa" para la identificación paramétrica y dar más peso o llegar a resolver la minimización del índice de rendimiento con información poco significativa o incluso "desorientadora".

La metodología que consideramos en este capítulo, a partir de la valoración de la información de entradas y salidas antes mencionada, determinará si la adaptación paramétrica debe o no ejecutarse. La valoración se realizará de forma que, cuando se ejecute la adaptación, se garantizará la mejora de un criterio de rendimiento preestablecido. El correspondiente criterio, en continuidad con la metodología de síntesis establecida para el caso ideal, determina la reducción de la norma del vector de error de identificación paramétrica en cada ejecución del mecanismo de adaptación. Al igual que en el caso ideal, la ganancia variable  $G(k)$  de la expresión general de adaptación (5.21) nunca tenderá hacia cero y, en consecuencia, el mecanismo de adaptación nunca perderá su capacidad de adaptación.

## 6.2 Caso real sin diferencia de estructuras

### 6.2.1 Estrategia para la solución

En el capítulo anterior hemos realizado la síntesis de un sistema adaptativo asintóticamente estable para el caso ideal, ilustrando de esta forma la aplicación de conceptos de estabilidad para la solución de este tipo de problema.

En el caso real sin diferencia de estructuras debemos considerar perturbaciones y ruidos actuando sobre el proceso. Por lo tanto, como ya hemos analizado en el Apartado 2.6, el propósito de este apartado será diseñar para este caso un sistema adaptativo estable y analizar cómo cumple las condiciones a) y b) de la Conjetura enunciada en el Apartado 2.7.

Las propiedades de estabilidad y convergencia del sistema adaptativo en el caso ideal están basadas en los dos resultados siguientes: 1) la acotación de la función no decreciente  $s(k_t)$  en (5.2) por una constante  $\delta^2$  que depende del error de identificación paramétrica en el instante inicial  $\|\tilde{\theta}(0)\|$ , y 2) el comportamiento no creciente de  $\|\tilde{\theta}(k)\|$  mostrado en (5.27). De la acotación (5.2) se deduce que  $e(k|k) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , mientras que de (5.27) se deduce que  $\Delta\hat{\theta}(k) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Una característica importante a observar en el mecanismo de adaptación (5.23) es que se ejecuta continuamente en cada instante  $k$ , es decir ajusta los parámetros del modelo en cada instante  $k$ . En el caso ideal, el único origen que produce error de estimación es el error de identificación paramétrica. Por ello es lógico adaptar los parámetros de forma continua para lograr una convergencia lo más rápida posible. La situación es diferente en presencia de ruidos y perturbaciones, dado que ellos también contribuyen al error de estimación. El problema nace justamente del hecho de que su contribución es imprevisible, dado que los ruidos y perturbaciones aquí considerados no son medibles.

En [Mar86] se presentó una metodología general para el diseño de sistemas adaptativos estables, que puede ser aplicada en el caso real sin diferencia de estructuras y con variaciones en los parámetros del proceso. Esta metodología puede ser interpretada como una extensión del planteamiento realizado en el capítulo anterior y asimismo considera una adaptación continua de los parámetros del modelo AP. La esencia de esta metodología consiste en el diseño de mecanismos de adaptación tales que, de manera similar a la descrita para el caso ideal, la función no decreciente del error  $s(k_t)$  está siempre acotada por una función asimismo no decreciente  $\mu(k_t)$ , cuyo crecimiento depende de los ruidos y perturbaciones que actúan sobre el proceso y de las variaciones de sus parámetros. De esta forma se garantiza que el error de estimación a posteriori  $e(k|k)$  está acotado, con una acotación que depende del error inicial de identificación, de la magnitud de los ruidos y perturbaciones no medibles y de las variaciones de los parámetros del proceso

Si las condiciones del caso real desaparecen, es decir si los ruidos, perturbaciones y variaciones paramétricas dejan de producirse, el error  $e(k|k) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$  y el sistema adaptativo será asintóticamente estable.

El principal problema con este tipo de resultado es que la función no decreciente del error de estimación  $s(k_t)$  y la función de acotación  $\mu(k_t)$  pueden separarse o aproximarse la una a la otra. Ello depende de si el error de estimación se debe principalmente al efecto de ruidos y perturbaciones o al del error de identificación paramétrica.

Cuando el error de estimación se debe principalmente a ruidos y perturbaciones, la información en la que se basa la adaptación paramétrica será "engañosa" y, en consecuencia, la adaptación correspondiente será negativa en el sentido de que la norma del error de identificación paramétrica aumentará y la función de acotación  $\mu$  crecerá más que la función  $s$  del error de estimación. Por otra parte, si el error de estimación se debe principalmente al error de identificación paramétrica, la adaptación será positiva en el sentido de que la norma del error de identificación paramétrica decrecerá y ambas funciones  $\mu$  y  $s$  se aproximarán. Este hecho sugiere la conveniencia de ejecutar únicamente la adaptación en el segundo caso, en lugar de hacerlo de forma continua.

Esta idea, presentada primero en el caso real sin diferencia de estructuras en [Mar84, MSF84] es la esencia del planteamiento que vamos a considerar en este capítulo, que está basado fundamentalmente en introducir un criterio que permite la adaptación de los parámetros del modelo solo en el caso en el que se puede garantizar que la adaptación implicará una reducción en la norma del error de identificación paramétrica. Este criterio está basado en un cierto conocimiento de la magnitud del ruido y las perturbaciones que pueden afectar de forma impredecible a la salida del proceso y puede ser descrito en los términos siguientes:

1. Si el error de estimación a priori es del mismo orden, o inferior, que una función del máximo nivel que puede alcanzar la señal de perturbación, es posible que dicho error sea debido más a la señal de perturbación que al error de identificación paramétrica. En este caso, la adaptación deberá pararse.
2. Si el error de estimación a priori es mayor que dicha función, puede asegurarse que dicho error de estimación es debido principalmente al error de identificación paramétrica y, en consecuencia, la adaptación debe de ejecutarse.

Desde este planteamiento, el problema de síntesis consistirá en determinar la previamente mencionada función del máximo nivel de la señal de perturbación capaz de garantizar que la norma del error de identificación paramétrica se reducirá cuando la adaptación se ejecute, y asimismo que permitirá el mayor número posible de adaptaciones.

Dicho lo anterior, es oportuno e importante señalar que el efecto de las perturbaciones no medibles en la salida del proceso es totalmente imprevisible únicamente en su inicio. Dado que las perturbaciones no medibles contribuyen a la evolución de la salida del proceso, su efecto puede ser subsecuentemente predicho en parte por el modelo AP en su misma operación. En consecuencia, la contribución de las perturbaciones no medibles al máximo nivel alcanzable por la señal de perturbación no es generalmente tan considerable como podría parecer a priori, lo que evidentemente facilita la aplicación práctica de esta metodología.

### 6.2.2 Ejemplo de solución al problema de síntesis

Dada la presencia de ruidos y perturbaciones no medibles, que son representados por la señal de perturbación  $\Delta(k)$ , la ecuación del proceso es en este caso

$$y(k) = \theta^T \phi(k-d) + \Delta(k). \quad (6.1)$$

Por su parte, el modelo AP se describe mediante una ecuación igual a la (5.4) del caso ideal:

$$\hat{y}(k|k) = \hat{\theta}(k)^T \phi(k-d), \quad (6.2)$$

ya que no consideramos diferencia de estructuras entre el proceso y el modelo AP.

Como en el Apartado 5.6, en lo que sigue utilizaremos el mecanismo de adaptación obtenido en el caso ideal en su forma más simple (5.23) cuando  $B = I$ , que reescribimos a continuación:

$$\hat{\theta}(k) = e(k|k)\phi(k-d) + \hat{\theta}(k-1) \quad (6.3)$$

y deduciremos un criterio para decidir si ha de ejecutarse o no el algoritmo de adaptación, garantizando siempre, en caso de ejecución, una reducción de  $\|\hat{\theta}(k)\|$ .

Restando (6.2) de (6.1) y recordando la definición del error de identificación paramétrica  $\tilde{\theta}(k) = \theta - \hat{\theta}(k)$ , podemos escribir

$$e(k|k) - \Delta(k) = \tilde{\theta}(k)^T \phi(k-d). \quad (6.4)$$

A partir de (6.3), al igual que en el Apartado 5.6 del capítulo anterior, se deduce

$$\|\tilde{\theta}(k)\|^2 + 2e(k|k)\tilde{\theta}(k)^T \phi(k-d) + e(k|k)^2 \|\phi(k-d)\|^2 = \|\tilde{\theta}(k-1)\|^2. \quad (6.5)$$

Asimismo, de (6.5) y (6.4) podemos deducir las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}(k)\|^2 - \|\tilde{\theta}(k-1)\|^2 &= -2e(k|k)[e(k|k) - \Delta(k)] \\ &\quad - e(k|k)^2 \phi(k-d)^T \phi(k-d), \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\|\tilde{\theta}(k)\|^2 - \|\tilde{\theta}(k-1)\|^2 = -e(k|k)^2 [2 + \phi(k-d)^T \phi(k-d)] + 2e(k|k)\Delta(k). \quad (6.7)$$

De (6.7) podemos deducir que  $\|\tilde{\theta}(k)\|^2 - \|\tilde{\theta}(k-1)\|^2$  será negativo si se cumple la siguiente condición:

$$|e(k|k)| > \frac{2|\Delta(k)|}{2 + \phi(k-d)^T \phi(k-d)}. \quad (6.8)$$

La relación entre los errores de estimación a priori y a posteriori (5.19), cuando  $B = I$ , puede escribirse en la forma

$$e(k|k) = \frac{e(k|k-1)}{1 + \phi(k-d)^T \phi(k-d)}. \quad (6.9)$$

A partir de (6.9), la condición (6.8) puede escribirse en la forma

$$|e(k|k-1)| > \frac{2[1 + \phi(k-d)^T \phi(k-d)]}{2 + \phi(k-d)^T \phi(k-d)} |\Delta(k)|. \quad (6.10)$$

Utilizando (6.9), el mecanismo de adaptación (6.3) puede escribirse en función del error de estimación a priori de la siguiente forma:

$$\hat{\theta}(k) = \frac{e(k|k-1)\phi(k-d)}{1 + \phi(k-d)^T \phi(k-d)} + \hat{\theta}(k-1). \quad (6.11)$$

En consecuencia, si la condición (6.10) se verifica en el instante  $k$ , entonces es conveniente ejecutar la adaptación (6.11) ya que está asegurado que

la diferencia  $\|\tilde{\theta}(k)\|^2 - \|\tilde{\theta}(k-1)\|^2$  será negativa. Así pues, esta condición puede darnos un criterio para ejecutar la adaptación. Puede observarse que todas las variables incluidas en (6.10) son conocidas o pueden calcularse en el instante  $k$ , excepto la señal de perturbación  $|\Delta(k)|$ . Para superar esta incertidumbre y poder hacer un uso práctico de la condición (6.10), utilizaremos una estimación del límite superior del valor absoluto de la señal de perturbación, que definiremos de la siguiente manera:

$$\Delta_b \geq \max_{0 < k < \infty} |\Delta(k)| + \rho, \quad \text{siendo } \rho > 0. \quad (6.12)$$

Una vez definido el límite  $\Delta_b$ , proponemos ahora la modificación de (6.11) pasando al siguiente mecanismo de adaptación:

$$\hat{\theta}(k) = \frac{\psi(k)e(k|k-1)\phi(k-d)}{1 + \psi(k)\phi(k-d)^T \phi(k-d)} + \hat{\theta}(k-1), \quad (6.13)$$

donde el valor de la variable  $\psi(k)$  se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \psi(k) &= 0, \quad \text{si } |e(k|k-1)| < \frac{2[1 + \phi(k-d)^T \phi(k-d)]}{2 + \phi(k-d)^T \phi(k-d)} \Delta_b < 2\Delta_b, \\ \psi(k) &= 1, \quad \text{si } |e(k|k-1)| \geq \frac{2[1 + \phi(k-d)^T \phi(k-d)]}{2 + \phi(k-d)^T \phi(k-d)} \Delta_b \geq \Delta_b. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Las condiciones (6.14) definen un criterio para parar o ejecutar el mecanismo de adaptación (6.13) que garantiza que, si los parámetros del modelo AP varían, se verificará la condición (6.10) y, por tanto, la norma del error de identificación paramétrica decrecerá de acuerdo con el criterio deseado.

Este resultado puede resumirse en el siguiente lema, que ha quedado demostrado ya al deducir el mecanismo de adaptación.

**Lema 6.1:** *A lo largo de la operación del sistema adaptativo descrito por la ecuación del proceso (6.1), la ecuación del modelo (6.2) y el mecanismo de adaptación definido en (6.12)–(6.14), el error de identificación paramétrica satisface la siguiente propiedad:*

$$\|\tilde{\theta}(k-1)\|^2 \geq \|\tilde{\theta}(k)\|^2, \quad \forall k > 0. \quad (6.15)$$

□

Vale la pena señalar que cuanto menor sea el valor de  $\rho$  en (6.12), es decir, cuanto más precisa sea la estimación del límite superior  $\Delta_b$ , mayor

será el número de adaptaciones permitidas y, lógicamente, mejores serán los resultados de la adaptación, que se analizan en el apartado siguiente.

### 6.2.3 Propiedades del sistema adaptativo

El mecanismo de adaptación que hemos deducido en el apartado anterior garantiza las propiedades de estabilidad y convergencia que se enuncian en los siguientes lemas.

**Lema 6.2:** *A lo largo de la operación del sistema adaptativo considerado en el Lema 6.1, si la norma del vector de entradas/salidas permanece acotada, es decir,  $\|\phi(k-d)\| < \Omega < +\infty$ ,  $\forall k > 0$ , existe un instante de tiempo  $k_f < +\infty$  tal que*

$$(a) \quad \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1), \quad \forall k \geq k_f > 0$$

$$(b) \quad |e(k|k)| < 2\Delta_b, \quad \forall k \geq k_f > 0.$$

□

**Demostración:** Consideremos un instante  $h$  en el que la adaptación se ejecuta y por tanto se satisface la segunda condición (6.14). Así pues,

$$|e(h|h-1)| \geq \Delta_b. \quad (6.16)$$

A partir de (6.16), (6.9) y el hecho de que  $\|\phi(k-d)\|$  está acotado, como se ha expresado en el enunciado del lema, podemos fácilmente deducir

$$|e(h|h)| > \omega > 0, \quad \text{con } \omega = \frac{\Delta_b}{1 + \Omega^2}. \quad (6.17)$$

De (6.9) y (6.14), puede asimismo deducirse que

$$|e(h|h)|[2 + \phi(h-d)^T \phi(h-d)] \geq 2\Delta_b. \quad (6.18)$$

A partir de (6.18) y (6.7):

$$\|\tilde{\theta}(h)\|^2 - \|\tilde{\theta}(h-1)\|^2 \leq -|e(h|h)| 2\Delta_b + 2e(h|h)\Delta(h). \quad (6.19)$$

Por lo tanto,

$$\|\tilde{\theta}(h)\|^2 - \|\tilde{\theta}(h-1)\|^2 \leq -2|e(h|h)|[\Delta_b - |\Delta(h)|]. \quad (6.20)$$

Finalmente, de (6.20), (6.12) y (6.17) obtenemos

$$\|\tilde{\theta}(h)\|^2 - \|\tilde{\theta}(h-1)\|^2 \leq -\gamma^2 < 0, \quad \text{con } \gamma^2 = 2\omega\rho. \quad (6.21)$$

De (6.21) se deduce que, en cada instante  $h$  en el que se ejecuta la adaptación,  $\|\tilde{\theta}(h)\|^2$  se reduce al menos en  $\gamma^2$ . Dado que  $\{\|\tilde{\theta}(h)\|^2\}$  es una sucesión no negativa y su valor inicial  $\|\tilde{\theta}(0)\|^2$  está acotado, el número de instantes de adaptación tiene que ser finito. Así pues, puede concluirse que existe un instante  $k_f$  a partir del cual no habrá más adaptación de parámetros, lo que prueba la propiedad (a) de este lema y también, a partir de la primera ecuación (6.14), la propiedad (b). ■

**Lema 6.3:** *A lo largo de la operación del sistema adaptativo considerado en el Lema 6.1, si la norma del vector de entradas/salidas no es acotada y existe una subsucesión  $\{h\}$  caracterizada por  $\psi(h) = 1$ , entonces*

$$(a) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} e(h|h) = 0$$

$$(b) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} [\hat{\theta}(h) - \hat{\theta}(h-1)] = 0.$$

□

**Demostración:** La sucesión  $\{\|\tilde{\theta}(h)\|\}$  es no creciente y tiene un límite inferior; en consecuencia, converge. Por lo tanto,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} [\|\tilde{\theta}(h)\|^2 - \|\tilde{\theta}(h-1)\|^2] = 0. \quad (6.22)$$

De (6.7) y (6.22) deducimos que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} [-e(h|h)^2[2 + \phi(h-d)^T \phi(h-d)] + 2e(h|h)\Delta(h)] = 0, \quad (6.23)$$

y en consecuencia

$$e(h|h)^2[2 + \phi(h-d)^T \phi(h-d)] \rightarrow 2e(h|h)\Delta(h), \quad \text{cuando } h \rightarrow \infty. \quad (6.24)$$

Por otra parte, de (6.12) y (6.18) obtenemos

$$|e(h|h)|[2 + \phi(h-d)^T \phi(h-d)] \geq 2\rho + 2|\Delta(h)|, \quad \forall h. \quad (6.25)$$

De (6.25) se deduce que la propiedad (6.24) será únicamente posible si  $e(h|h) \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow \infty$ , lo que prueba la propiedad (a) de este lema.

A partir de (6.6) y (6.22) podemos escribir

$$\lim_{h \rightarrow \infty} [2e(h|h)[e(h|h) - \Delta(h)] + e(h|h)^2 \phi(h-d)^T \phi(h-d)] = 0. \quad (6.26)$$

Asimismo, del algoritmo de adaptación (6.3) podemos deducir que

$$\|\hat{\theta}(h) - \hat{\theta}(h-1)\|^2 = e(h|h)^2 \phi(h-d)^T \phi(h-d), \quad (6.27)$$

y a partir de (6.26) y (6.27) concluimos que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \{2e(h|h)[e(h|h) - \Delta(h)] + \|\hat{\theta}(h) - \hat{\theta}(h-1)\|^2\} = 0. \quad (6.28)$$

Considerando la propiedad (a) de este lema, ya demostrada, y el hecho de que  $|\Delta(k)|$  es acotada, (6.28) implica que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}(h) - \hat{\theta}(h-1)\| = 0,$$

lo que prueba la propiedad (b) y concluye la demostración de este lema. ■

Del Lema 6.3 y de la definición del mecanismo de adaptación, se deduce directamente el siguiente corolario, que se enuncia sin demostración.

**Corolario 6.3.1:** *A lo largo de la operación del sistema adaptativo considerado en el Lema 6.1, se satisfacen las propiedades siguientes:*

- (a)  $\exists k_f$  tal que  $|e(k|k)| < 2\Delta_b, \quad \forall k \geq k_f > 0$
- (b)  $\lim_{k \rightarrow \infty} [\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)] = 0.$

□

### 6.2.4 Análisis de los resultados

El sistema adaptativo diseñado en este caso verifica las condiciones de la Conjetura solo cuando la norma del vector de entradas/salidas permanece acotada. Sin embargo, hemos derivado propiedades de convergencia para el error de estimación a posteriori y los parámetros del modelo AP que serán consideradas posteriormente en el Capítulo 7 y que, en combinación con la

ley de control predictivo, permitirán demostrar la acotación de  $\{\|\phi(k)\|\}$  y, en consecuencia, alcanzar el resultado de estabilidad global deseado.

Podemos observar que el caso ideal puede considerarse como un caso particular del caso real previamente tratado, simplemente considerando el límite  $\Delta_b$  arbitrariamente pequeño.

Debemos asimismo poner énfasis en que, siguiendo el objetivo didáctico de este libro, hemos elegido para llevar a cabo la síntesis del mecanismo de adaptación el algoritmo más simple. En [Mar84] puede encontrarse una extensión de este algoritmo que permite, por ejemplo, garantizar en todo momento la no singularidad del parámetro  $\hat{\theta}_1(k)$  y minimizar la función de acotación que determina el criterio de ejecución del mecanismo de adaptación.

## 6.3 Caso real con diferencia de estructuras

### 6.3.1 Estrategia para la solución

Hasta ahora, en este libro hemos realizado la síntesis de sistemas adaptativos asintóticamente estables y estables para el caso ideal y el caso real sin diferencias de estructuras, respectivamente. En el último caso, se ha considerado la existencia de ruidos y perturbaciones actuando sobre el proceso, pero se ha supuesto que el orden de las ecuaciones que gobiernan su comportamiento dinámico es igual al orden elegido para el modelo adaptativo. Sin embargo, las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del proceso son generalmente de orden elevado y, en consecuencia, en la práctica el orden elegido para el modelo adaptativo será inferior. Ello nos lleva a considerar el análisis y la síntesis de sistemas adaptativos capaces de tratar, no solo el problema de ruidos y perturbaciones no medibles, sino también el problema de la diferencia de estructuras.

Cuando se publicó la solución para el caso real sin diferencia de estructuras [Mar84, MSF84], se sugirió ya que algunos términos acotados de la dinámica del proceso podían incluirse en la señal de perturbación, reduciendo de esta forma el orden del modelo AP y preservando todavía la validez del método. Claramente, una solución general al problema de la diferencia de estructuras no puede basarse en este tipo de restricción ya que, por ejemplo, la acotación de términos en la dinámica del proceso rela-

cionados con la salida del mismo no puede suponerse a priori. Por lo tanto, los resultados de estabilidad obtenidos en el diseño de sistemas adaptativos deben ser, en el caso real con diferencia de estructuras, como en los casos considerados anteriormente, es decir independientes de la acotación o no acotación de todos los términos del vector de entradas/salidas del proceso.

Como en los casos anteriores, un objetivo de diseño deseable para el sistema adaptativo sería que, bajo la hipótesis de acotación del vector de entradas/salidas del proceso, las condiciones de la Conjetura fueran satisfechas y que, en la ausencia de dicha hipótesis, se dedujeran condiciones capaces de permitir a la teoría de estabilidad, presentada en el capítulo siguiente, demostrar la acotación del vector de entradas/salidas cuando se aplica control predictivo y el bloque conductor satisface las condiciones de la Conjetura que le conciernen.

Diversos autores han considerado este problema en el área de control adaptativo [Pra83, Pra84, KJ84, OPL85, KF85, KA86], tendiendo, en algunos casos a soluciones de estabilidad únicamente locales y suponiendo a priori, en todos los casos, la existencia de un conjunto de parámetros de control capaz de asegurar la estabilidad. Esta hipótesis no es necesaria en la solución propuesta en el marco de la teoría de estabilidad del control adaptativo predictivo, que fue originalmente presentada en [CMS88].

En el mismo contexto de [CMS88], este apartado realizará la síntesis de un sistema adaptativo capaz de garantizar los resultados de estabilidad del control adaptativo predictivo de acuerdo con la estrategia descrita en los siguientes puntos:

1. Definición de un sistema adaptativo normalizado, de forma que todas las señales de entrada/salida del proceso normalizado pasen a ser acotadas, permitiendo que términos dinámicos de la ecuación del proceso normalizado sean incluidos en una señal de perturbación extendida. Esto permitirá en consecuencia un contexto de operación "sin diferencia de estructuras" dentro del marco del sistema normalizado a pesar del orden reducido del modelo AP.
2. De manera similar al caso sin diferencia de estructuras, se define un mecanismo de adaptación que garantiza que la norma del vector de identificación paramétrica reducido es una función no creciente.
3. A partir del resultado obtenido en el punto anterior, las propiedades de convergencia del error de estimación a posteriori y de los parámetros

del modelo AP se derivan para el sistema adaptativo normalizado.

4. Finalmente, a través de un proceso inverso al de normalización, las correspondientes propiedades de convergencia se obtienen para el sistema adaptativo sin normalización.

### 6.3.2 Definición del sistema normalizado

Dado que las hipótesis acerca del proceso son las mismas que en el caso sin diferencia de estructuras, utilizaremos aquí la misma ecuación (6.1) para describirlo:

$$y(k) = \theta^T \phi(k-d) + \Delta(k).$$

El modelo AP vendrá definido en este caso por la ecuación (2.30) del Apartado 2.4.2 del Capítulo 2:

$$\hat{y}(k|k) = \hat{\theta}_r(k)^T \phi_r(k-d). \quad (6.29)$$

En este modelo, el vector de entradas/salidas  $\phi_r(k-d)$  y el vector de parámetros  $\hat{\theta}_r(k)$  tienen dimensión  $n_r$  que es inferior a la dimensión  $n_p$  del vector de entradas/salidas  $\phi(k-d)$  y del vector de parámetros  $\theta$  del proceso.

Introduciremos ahora un factor de normalización definido por

$$n(k) = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n_p} |\phi_i(k-d)|, c \right\}, \quad (6.30)$$

donde  $\phi_i$  es la componente  $i$  de  $\phi$  y  $c$  es una constante positiva que puede elegirse libremente.

Las variables de entrada/salida en el sistema normalizado se definen de la siguiente forma:

$$y^n(k) = \frac{y(k)}{n(k)}, \quad (6.31)$$

$$x(k-d) = \frac{1}{n(k)} \phi(k-d), \quad (6.32)$$

$$x_r(k-d) = \frac{1}{n(k)} \phi_r(k-d). \quad (6.33)$$

Utilizando estas variables en (6.1), la ecuación del proceso normalizado puede expresarse en la forma

$$y^n(k) = \theta^T x(k-d) + \frac{\Delta(k)}{n(k)}. \quad (6.34)$$

Teniendo en cuenta la dimensión reducida del modelo AP, (6.34) puede escribirse en la forma

$$y^n(k) = \theta_r^T x_r(k-d) + \theta_u^T x_u(k-d) + \frac{\Delta(k)}{n(k)}, \quad (6.35)$$

donde

$$\begin{aligned} \theta^T &= [\theta_r^T, \theta_u^T] \\ x(k-d)^T &= [x_r(k-d)^T, x_u(k-d)^T], \end{aligned} \quad (6.36)$$

siendo la dimensión de  $x_r$  y de  $\theta_r$  iguales a  $n_r$ . El vector  $x_u(k-d)$  contiene los términos de  $x(k-d)$  no contenidos en  $x_r(k-d)$  y en consecuencia su dimensión es  $n_p - n_r$ . De acuerdo con la estrategia para la solución previamente descrita, los dos últimos términos del segundo miembro de (6.35) pueden interpretarse de forma conjunta como una señal de perturbación normalizada actuando sobre la salida del proceso normalizada  $y^n(k)$ . Así pues, podemos escribir

$$y^n(k) = \theta_r^T x_r(k-d) + \Delta^n(k), \quad (6.37)$$

donde

$$\Delta^n(k) = \theta_u^T x_u(k-d) + \frac{\Delta(k)}{n(k)}. \quad (6.38)$$

El siguiente lema demuestra la acotación de la sucesión  $\{\Delta^n(k)\}$  definida en (6.38).

**Lema 6.4:** *La sucesión de señales de perturbación normalizadas  $\{\Delta^n(k)\}$ , definidas por la ecuación (6.38), será acotada si la sucesión de señales de perturbación  $\{\Delta(k)\}$  es acotada.  $\square$*

**Demostración:** A partir de la definición de  $n(k)$  en (6.30) y de  $x(k-d)$  en (6.32) podemos comprobar que  $|x_i(k-d)| \leq 1$  para todas las componentes

$i = 1, \dots, n_p$  del vector  $x(k-d)$ . Dado que, tal como se ha definido en (6.35),  $x_u(k-d)$  tiene  $n_p - n_r$  de dichas componentes, podemos escribir

$$\|x_u(k-d)\| \leq (n_p - n_r)^{1/2}. \quad (6.39)$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y teniendo en cuenta (6.39):

$$|\theta_u^T x_u(k-d)| \leq (n_p - n_r)^{1/2} \|\theta_u\|. \quad (6.40)$$

A partir de la acotación de  $\|\theta_u\|$  y  $\{\Delta(k)\}$ , y dado que  $n(k) \geq c > 0$ , la acotación de  $\{\Delta^n(k)\}$  se deduce de inmediato de su definición en (6.38).  $\blacksquare$

Es interesante observar que la acotación de  $\{\Delta^n(k)\}$  sólo requiere la acotación de las señales de ruidos y perturbaciones no medibles incluidas en  $\Delta(k)$ , lo cual no es una suposición restrictiva y hace el resultado del Lema 6.4 práctico y general.

Comparando la salida del proceso normalizada con las estimaciones hechas por el modelo AP, podemos definir los errores de estimación a priori y a posteriori normalizados de la siguiente forma:

$$e^n(k|k-1) = y^n(k) - \hat{\theta}_r(k-1)^T x_r(k-d), \quad (6.41)$$

$$e^n(k|k) = y^n(k) - \hat{\theta}_r(k)^T x_r(k-d). \quad (6.42)$$

A continuación consideraremos el problema de síntesis del mecanismo de adaptación para el sistema normalizado.

### 6.3.3 Síntesis del mecanismo de adaptación

Dada la acotación de la señal  $\Delta^n(k)$  demostrada por el Lema 6.4, el problema de síntesis del mecanismo de adaptación del sistema normalizado puede abordarse en términos completamente equivalentes a los considerados en el Apartado 6.2 para el problema de síntesis del caso real sin diferencia de estructuras. Así pues, vamos a proponer un mecanismo de adaptación con un criterio de ejecución o paro similar al definido en (6.13)–(6.14). Este mecanismo se define ahora por la ecuación

$$\hat{\theta}_r(k) = \frac{\psi(k)e^n(k|k-1)x_r(k-d)}{1 + \psi(k)x_r(k-d)^T x_r(k-d)} + \hat{\theta}_r(k-1), \quad (6.43)$$

donde el valor de la variable  $\psi(k)$  se define en este caso de la siguiente forma:

$$\psi(k) = 0, \quad \text{si } |e^n(k|k-1)| < \frac{2[1 + x_r(k-d)^T x_r(k-d)]}{2 + x_r(k-d)^T x_r(k-d)} \Delta_b^n < 2\Delta_b^n, \quad (6.44)$$

$$\psi(k) = 1, \quad \text{si } |e^n(k|k-1)| \geq \frac{2[1 + x_r(k-d)^T x_r(k-d)]}{2 + x_r(k-d)^T x_r(k-d)} \Delta_b^n \geq \Delta_b^n, \quad (6.45)$$

siendo  $\Delta_b^n$  en este caso un límite superior de la sucesión  $\{\Delta^n(k)\}$ , que definimos en la forma

$$\Delta_b^n \geq \max_{0 < k < \infty} |\Delta^n(k)| + \delta, \quad \delta > 0. \quad (6.46)$$

La estimación de una cota superior para la norma del vector de los parámetros no modelados  $\|\theta_u\|$  y otra para el valor absoluto de la señal de perturbación  $|\Delta(k)|$  permitirá la estimación de la cota  $\Delta_b^n$ . Puede observarse que la influencia de la señal de perturbación  $\Delta(k)$  en la estimación de esta cota puede reducirse tanto como se desee eligiendo una constante positiva  $c$  en (6.30) suficientemente grande. Cuando la norma del vector de entradas/salidas es mayor que  $c$ , el primer miembro del segundo término de la ecuación (6.38), que tiene en cuenta la dinámica no modelada, no se verá afectado por el valor de  $c$ , pero permanecerá acotado de acuerdo con la expresión (6.40).

Las condiciones (6.44) a (6.46) definen un criterio para parar o ejecutar el algoritmo de adaptación (6.43) que se caracteriza por el resultado enunciado en el siguiente lema.

**Lema 6.5:** *A lo largo de la operación del sistema normalizado descrito por las ecuaciones (6.37), (6.38) y (6.41)–(6.46), el error de identificación paramétrica  $\tilde{\theta}_r(k) = \theta_r - \hat{\theta}_r(k)$  satisface la siguiente propiedad:*

$$\|\tilde{\theta}_r(k-1)\|^2 \geq \|\tilde{\theta}_r(k)\|^2, \quad \forall k > 0. \quad \square$$

**Demostración:** Restando (6.42) de (6.41) obtenemos

$$e^n(k|k-1) = [\hat{\theta}_r(k) - \hat{\theta}_r(k-1)]^T x_r(k-d) + e^n(k|k). \quad (6.47)$$

Sustituyendo en (6.47) el valor de  $[\hat{\theta}_r(k) - \hat{\theta}_r(k-1)]$  por el que se deduce a partir de (6.43), podemos deducir la relación entre los errores de estimación a priori y a posteriori normalizados:

$$e^n(k|k) = \frac{e^n(k|k-1)}{1 + \psi(k)x_r(k-d)^T x_r(k-d)}. \quad (6.48)$$

A partir de (6.48), el mecanismo de adaptación (6.43) puede escribirse en la forma

$$\hat{\theta}_r(k) = \hat{\theta}_r(k-1) + \psi(k)e^n(k|k)x_r(k-d). \quad (6.49)$$

Restando  $\theta_r$  de ambos miembros de (6.49), se obtiene

$$\tilde{\theta}_r(k) + \psi(k)e^n(k|k)x_r(k-d) = \tilde{\theta}_r(k-1), \quad (6.50)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}_r(k)\|^2 + 2\psi(k)e^n(k|k)\tilde{\theta}_r(k)^T x_r(k-d) \\ + \psi(k)^2 e^n(k|k)^2 x_r(k-d)^T x_r(k-d) = \|\tilde{\theta}_r(k-1)\|^2. \end{aligned} \quad (6.51)$$

A partir de (6.37) y (6.42),  $e^n(k|k)$  puede expresarse en la forma

$$e^n(k|k) = \tilde{\theta}_r(k)^T x_r(k-d) + \Delta^n(k). \quad (6.52)$$

Combinando (6.51) y (6.52) obtenemos las expresiones

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}_r(k)\|^2 - \|\tilde{\theta}_r(k-1)\|^2 = -2\psi(k)e^n(k|k)[e^n(k|k) - \Delta^n(k)] \\ - \psi(k)^2 e^n(k|k)^2 x_r(k-d)^T x_r(k-d), \end{aligned} \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}_r(k)\|^2 - \|\tilde{\theta}_r(k-1)\|^2 = -\psi(k)e^n(k|k)^2 [2 + \psi(k)x_r(k-d)^T x_r(k-d)] \\ + 2\psi(k)e^n(k|k)\Delta^n(k). \end{aligned} \quad (6.54)$$

El primer miembro de (6.54) será igual a cero si  $\psi(k) = 0$ , y menor que cero si se verifica la siguiente desigualdad para  $\psi(k) = 1$ :

$$|e^n(k|k)[2 + x_r(k-d)^T x_r(k-d)]| > 2|\Delta^n(k)|, \quad (6.55)$$

que puede asimismo escribirse en la forma

$$|e^n(k|k)| > \frac{2|\Delta^n(k)|}{2 + x_r(k-d)^T x_r(k-d)}. \quad (6.56)$$

A partir de (6.48), la desigualdad (6.56) puede escribirse en la forma

$$|e^n(k|k-1)| > \frac{2[1 + x_r(k-d)^T x_r(k-d)]}{2 + x_r(k-d)^T x_r(k-d)} |\Delta^n(k)|. \quad (6.57)$$

Por definición, (6.45) se cumple cuando  $\psi(k) = 1$ , lo que implica, teniendo en cuenta (6.46), que se cumplirá la desigualdad (6.57) en este caso, lo que concluye la demostración de este lema. ■

### 6.3.4 Propiedades del sistema adaptativo

A partir de los resultados del Lema 6.5, deduciremos en primer lugar la estabilidad y propiedades de convergencia del sistema normalizado y, posteriormente, las del sistema sin normalizar. Estas propiedades se establecen a continuación en los Lemas 6.6 y 6.7.

**Lema 6.6:** *A lo largo de la operación del sistema normalizado considerado en el Lema 6.5, existe un instante de tiempo  $k_f$  tal que*

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \hat{\theta}_r(k) &= \hat{\theta}_r(k-1), & \forall k \geq k_f > 0, \\ \text{(b)} \quad |e^n(k|k)| &< 2\Delta_b^n, & \forall k \geq k_f > 0. \end{aligned}$$

□

**Demostración:** Utilizando el mismo argumento que en (6.39), podemos escribir

$$\|x_r(k-d)\|^2 \leq n_r. \quad (6.58)$$

Sea  $h$  un instante de tiempo de la sucesión  $\{k\}$  en el que  $\psi(h) = 1$ . Entonces, de acuerdo con (6.45), tenemos que

$$|e^n(h|h-1)| \geq \Delta_b^n. \quad (6.59)$$

Por lo tanto, a partir de (6.48), (6.58) y (6.59), obtenemos que

$$|e^n(h|h)| \geq \omega_n > 0 \quad \text{con} \quad \omega_n = \frac{\Delta_b^n}{1 + n_r}. \quad (6.60)$$

También, a partir de (6.45) y (6.48), podemos deducir lo siguiente:

$$|e^n(h|h)| [2 + x_r(h-d)^T x_r(h-d)] \geq 2\Delta_b^n. \quad (6.61)$$

Utilizando (6.61) en (6.54), fácilmente deducimos

$$\|\tilde{\theta}_r(h)\|^2 - \|\tilde{\theta}_r(h-1)\|^2 \leq -2|e^n(h|h)| [\Delta_b^n - |\Delta^n(k)|]. \quad (6.62)$$

Y a partir de (6.46), (6.60) y (6.62) obtenemos

$$\|\tilde{\theta}_r(h)\|^2 - \|\tilde{\theta}_r(h-1)\|^2 \leq -\gamma_n^2 < 0 \quad \text{con} \quad \gamma_n^2 = 2\omega_n \delta. \quad (6.63)$$

En consecuencia, en cada instante de adaptación  $h$ , en el cual  $\psi(h) = 1$ ,  $\|\tilde{\theta}_r(h)\|^2$  decrece al menos en  $\gamma_n^2$ . Por lo tanto, siguiendo el mismo razonamiento que en el Lema 6.2, el número de instantes de adaptación será finito, lo que implica que se cumplen las propiedades a y b de este lema. ■

**Lema 6.7:** *A lo largo de la operación del sistema normalizado considerado en el Lema 6.5, el error de estimación a posteriori  $e(k|k)$  del sistema sin normalizar satisface la siguiente propiedad:*

$$\exists k_f < +\infty \quad \text{tal que} \quad |e(k|k)| < 2\Delta_b^n \max\{\|\phi(k-d)\|, c\}, \quad \forall k \geq k_f > 0.$$

□

**Demostración:** A partir de la definición de  $e(k|k)$  en (2.31) y  $e_n(k|k)$  en (6.42), podemos comprobar que

$$e^n(k|k) = \frac{e(k|k)}{n(k)}. \quad (6.64)$$

De (6.64) y la propiedad b del Lema 6.6, tenemos que

$$|e(k|k)| < 2\Delta_b^n n(k), \quad \forall k \geq k_f > 0, \quad (6.65)$$

y considerando la definición de  $n(k)$  en (6.30) nos queda

$$\begin{aligned} |e(k|k)| &< 2\Delta_b^n \max\{\max_{1 \leq i \leq n_p} |\phi_i(k-d)|, c\} \\ &\leq 2\Delta_b^n \max\{\|\phi(k-d)\|, c\}, \quad \forall k \geq k_f > 0, \end{aligned} \quad (6.66)$$

que completa la demostración de este lema. ■

### 6.3.5 Análisis de los resultados

A partir de la síntesis realizada previamente, se ha deducido una propiedad de convergencia para los parámetros del modelo AP que garantiza plenamente la condición a de la Conjetura: el valor de estos parámetros no varía después de un cierto instante  $k_f$ . Se ha deducido asimismo una propiedad de convergencia para el error de estimación a posteriori  $e(k|k)$ , que permanecerá acotado en tanto que el valor de la norma del vector de entradas/salidas del proceso  $\phi(k-d)$  no exceda de una constante positiva  $c$  elegida libremente. En caso contrario, dicho error permanecerá acotado por una función proporcional al valor de dicha norma, donde el factor de proporcionalidad dependerá de la norma del vector de parámetros sin modelizar  $\|\theta_u\|$ .

Obviamente, si la norma del vector de entradas/salidas permanece acotada, la condición b de la Conjetura también se cumplirá. Es decir, se garantizará la estabilidad del sistema adaptativo. Las condiciones bajo las cuales dicha norma permanecerá acotada serán definidas en el Capítulo 7, donde se analizan las condiciones de estabilidad del control predictivo y adaptativo predictivo en su conjunto.

El caso real sin diferencia de estructuras considera hipótesis más cercanas al contexto de la realidad industrial. En este sentido los resultados obtenidos para este caso se aproximan a los objetivos deseados de control en un entorno más realista. Adicionalmente, el caso ideal, considerado en el capítulo anterior, y el caso real sin diferencia de estructuras, pueden ser claramente considerados como casos particulares del caso con diferencia de estructuras que hemos considerado en este apartado. Una diferencia esencial con respecto a los casos tratados previamente es que, mientras que en aquellos se requería un conocimiento preciso de la estructura de las ecuaciones del proceso para definir un modelo AP con la misma estructura, en este caso se puede elegir un modelo AP de orden reducido sin requerir dicho conocimiento.

El único conocimiento requerido en este caso sobre la estructura del proceso es el necesario para calcular el factor de normalización  $n(k)$ , que debe de tener en cuenta la dimensión del vector  $\phi$  de entradas/salidas, y la consideración de una cota para la norma del vector de parámetros sin modelizar  $\|\theta_u\|$ . Sin embargo, tanto la dimensión del vector  $\phi$  como la norma del vector  $\theta_u$  pueden ser razonablemente sobreestimados sin que

ello afecte al resultado de estabilidad, por lo que estas estimaciones no representan una restricción práctica.

El estudio que hemos realizado en este apartado del caso real con diferencia de estructuras ha venido marcado por el propósito didáctico de este libro. Por ello, como en los casos anteriores, hemos elegido los algoritmos más simples que son útiles para ilustrar los conceptos básicos y simplifican el análisis. El lector puede encontrar en [CMSF88] una extensión del algoritmo aquí presentado, que puede minimizar la función de acotación que determina el criterio para la ejecución del algoritmo de adaptación y garantiza la no singularidad de  $\hat{\theta}_1(k)$ .

Es importante señalar que los resultados presentados en [CMSF88] fueron ya corregidos y simplificados en [MR96] y es así como aquí han sido presentados. Mientras que en [CMSF88] se consideró que el número de adaptaciones en el sistema normalizado podía tender a infinito, como aquí se ha probado, dicho número es finito. El lector puede comparar ambos resultados y también encontrar en [CMSF88] un ejemplo que ilustra cómo el uso de un sistema adaptativo diseñado para el caso real con diferencia de estructuras es capaz de estabilizar la operación de un sistema de control adaptativo predictivo en la forma deseada.

## 6.4 Caso real con parámetros variables en el tiempo

### 6.4.1 Naturaleza del problema y estrategia para la solución

El análisis del caso real con parámetros variables con el tiempo representa otro paso de aproximación a las condiciones reales de operación de los procesos industriales. Dentro del alcance de este libro, los procesos con parámetros variables con el tiempo deben considerarse desde una perspectiva de ingeniería, teniendo en cuenta la experiencia de la que se dispone sobre el comportamiento dinámico de este tipo de procesos.

La naturaleza dinámica de los procesos industriales es básicamente no lineal, pero en general su comportamiento puede describirse aproximadamente mediante ecuaciones lineales, tales como las consideradas en los casos reales de los apartados anteriores, en tanto que el proceso opere alrededor de un cierto estado de equilibrio. En este caso, los parámetros del modelo lineal tendrán unos ciertos valores constantes adecuados al correspondiente

estado estacionario. Estos valores generalmente sufrirán variaciones debido al efecto de perturbaciones actuando sobre el proceso. Cuando la acción de estas perturbaciones es lenta, los parámetros variarán lentamente, mientras que si la acción es rápida los parámetros de las ecuaciones que describen el comportamiento del proceso pueden variar rápidamente. La variación paramétrica puede asimismo estar originada por un cambio del estado o de las condiciones en las que el proceso está actuando. El valor de los parámetros del proceso evolucionará dinámicamente, con mayor o menor velocidad, dependiendo de las características del cambio, desde el estado inicial al estado final en el que el proceso pasará a operar.

En ambos casos la estabilización de la operación del proceso dependerá, en gran medida, de la actuación del sistema de control, y esta estabilización de la operación implicará la estabilización de los valores de los parámetros del proceso. En la práctica, puede advertirse un efecto interactivo entre la eficiencia del sistema de control y la convergencia de la dinámica del proceso hacia ecuaciones lineales con parámetros constantes tales como los considerados en los apartados anteriores.

En el contexto de los sistemas de control adaptativo predictivo, la eficiencia del control quedará determinada, por una parte, por la forma de aplicación de la estrategia de control predictivo, que dependerá de cada caso específico; y por otra parte, por la habilidad del mecanismo de adaptación para seguir el cambio paramétrico producido en las ecuaciones del proceso. Si este cambio paramétrico es seguido con suficiente eficiencia y la estrategia de control es la adecuada, parece razonable que el sistema de control será capaz de estabilizar simultáneamente la operación y el comportamiento dinámico del proceso. Este hecho ha quedado confirmado casi sin excepción por la práctica industrial cuando el proceso evoluciona en, lo que hemos denominado en el Capítulo 1, un dominio adaptativo predictivo.

En un estudio previo de análisis y síntesis de sistemas adaptativos en el caso real sin diferencia de estructuras y con parámetros variables con el tiempo [Mar86], se presentaron resultados de acotación del error de estimación a posteriori, con la única restricción de que el valor de los parámetros del proceso fuera acotado. Sin embargo, como ya se ha argumentado en el Apartado 6.2.1, la adaptación continua considerada en [Mar86] puede hacer disminuir o aumentar la norma del vector de error de identificación paramétrica debido al efecto del ruido de medida y de las perturbaciones no medibles actuando sobre el proceso. Por esta razón, hemos introducido un criterio que garantiza la reducción de la mencionada

norma en caso de ejecución de la adaptación en los casos reales previamente considerados.

Ahora, en el contexto en el que los parámetros pueden variar en cada instante, este criterio debe reformularse en el sentido de no requerir que la norma del error de identificación paramétrica decrezca entre dos instantes de adaptación consecutivos, ya que la variación misma de los parámetros del proceso puede evitar dicho decrecimiento. Sin embargo, el nuevo criterio debe asegurar que el decrecimiento de la mencionada norma ocurre durante el instante de adaptación mismo, al comparar el error paramétrico antes y después de la ejecución de la adaptación.

En lo que sigue de este Apartado 6.4 desarrollaremos el análisis matemático que nos permitirá verificar que el algoritmo de adaptación, considerado anteriormente para el caso real con diferencia de estructuras, incluye el nuevo criterio previamente descrito para la presencia de variaciones en los parámetros del proceso.

#### 6.4.2 Definición del sistema adaptativo

El sistema adaptativo que vamos a considerar ahora difiere básicamente del definido para el caso real con diferencia de estructuras por el hecho de que los parámetros del proceso varían con el tiempo, como ya se consideró en la ecuación general (2.28), que rescribimos a continuación:

$$y(k) = \theta(k)^T \phi(k-d) + \Delta(k)$$

La ecuación del proceso normalizado y de la correspondiente señal de perturbación, de manera similar a como se hizo en el Apartado 6.3.2, quedan en este caso definidas de la siguiente forma:

$$y^n(k) = \theta_r(k)^T x_r(k-d) + \Delta^n(k), \quad (6.67)$$

$$\Delta^n(k) = \theta_u(k)^T x_u(k-d) + \frac{\Delta(k)}{n(k)}, \quad (6.68)$$

donde

$$\theta(k)^T = [\theta_r(k)^T, \theta_u(k)^T]$$

y el factor de normalización  $n(k)$  es el definido en (6.30).

Suponiendo que la sucesión de las normas del vector de parámetros sin modelizar  $\{\|\theta_u(k)\|\}$  está acotada y que podemos estimar dicha acotación, es posible utilizar un razonamiento similar al utilizado en el Lema 6.4 para demostrar que la sucesión de valores absolutos de las señales de perturbación normalizadas  $\{|\Delta^n(k)|\}$  está acotada. Asimismo, es posible estimar una cota superior  $\Delta_b^n$  para esta sucesión que cumpla la condición (6.46). Utilizando esta cota superior, los algoritmos de adaptación (6.41)–(6.45) formulados en el Apartado 6.3, completan la definición del sistema adaptativo que vamos a considerar en este caso.

### 6.4.3 Verificación de la condición de convergencia

Para comprobar que se cumplen los objetivos de convergencia deseados para la adaptación paramétrica, tenemos que definir en este punto los siguientes dos vectores de error de identificación paramétrica *reducidos*:

$$\tilde{\theta}_r(k|k) = \theta_r(k) - \hat{\theta}_r(k), \quad (6.69)$$

$$\tilde{\theta}_r(k|k-1) = \theta_r(k) - \hat{\theta}_r(k-1), \quad (6.70)$$

donde  $\tilde{\theta}_r(k|k)$  representa el error de identificación paramétrica reducido en el instante  $k$  una vez que los parámetros del modelo AP han sido adaptados en el mismo instante  $k$ , y  $\tilde{\theta}_r(k|k-1)$  representa el mismo error antes de que los parámetros del modelo AP hayan sido adaptados. Obviamente, si el algoritmo de adaptación no es ejecutado en el instante  $k$ , ambos vectores serán iguales. Si el algoritmo de adaptación se ejecuta, el objetivo deseado en la adaptación es el que se establece en el siguiente lema.

**Lema 6.8:** *A lo largo de la operación del sistema adaptativo descrito por las ecuaciones (6.67)–(6.70) y (6.41)–(6.46), en cada instante de tiempo  $h$  en el que el criterio (6.44)–(6.46) permite la adaptación de los parámetros del modelo AP ( $\psi(k) = 1$ ), se cumple la siguiente propiedad:*

$$\|\tilde{\theta}_r(h|h-1)\|^2 > \|\tilde{\theta}_r(h|h)\|^2. \quad (6.71)$$

□

**Demostración:** Restando (6.69) y (6.70) y utilizando en el instante  $h$  la expresión (6.49) con  $\psi(h) = 1$ , tenemos que

$$\tilde{\theta}_r(h|h) + e^n(h|h)x_r(h-d) = \tilde{\theta}_r(h|h-1), \quad (6.72)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}_r(h|h)\|^2 + 2e^n(h|h)\tilde{\theta}_r(h|h)^T x_r(h-d) \\ + e^n(h|h)^2 x_r(h-d)^T x_r(h-d) = \|\tilde{\theta}_r(h|h-1)\|^2. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Sustituyendo (6.67) en (6.42), obtenemos

$$e^n(h|h) = [\theta_r(h) - \hat{\theta}_r(h)]^T x_r(h-d) + \Delta^n(h). \quad (6.74)$$

A partir de (6.69) y (6.74) podemos escribir

$$e^n(h|h) - \Delta^n(h) = \tilde{\theta}_r(h|h)^T x_r(h-d). \quad (6.75)$$

Usando (6.75), se pueden deducir las siguientes expresiones a partir de (6.73):

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}_r(h|h)\|^2 - \|\tilde{\theta}_r(h|h-1)\|^2 = -2e^n(h|h)[e^n(h|h) - \Delta^n(h)] \\ - e^n(h|h)^2 x_r(h-d)^T x_r(h-d), \end{aligned} \quad (6.76)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}_r(h|h)\|^2 - \|\tilde{\theta}_r(h|h-1)\|^2 = -e^n(h|h)^2 [2 + x_r(h-d)^T x_r(h-d)] \\ + 2e^n(h|h)\Delta^n(h). \end{aligned} \quad (6.77)$$

De (6.77) se deduce que la diferencia  $\|\tilde{\theta}_r(h|h)\|^2 - \|\tilde{\theta}_r(h|h-1)\|^2$  será negativa si se cumple la siguiente condición:

$$|e^n(h|h)| [2 + x_r(h-d)^T x_r(h-d)] > 2|\Delta^n(h)|. \quad (6.78)$$

Como se ha demostrado ya en el Lema 6.5, esta condición se satisface para todo  $h$  tal que  $\psi(h) = 1$ , lo que concluye la demostración de este lema. ■

### 6.4.4 Análisis de los resultados

Hemos analizado el caso real con parámetros variables con el tiempo basándonos en consideraciones heurísticas derivadas de la experiencia real en el comportamiento dinámico de los procesos industriales, apartándonos

en cierta medida de una perspectiva puramente teórica. Asimismo, para este caso hemos considerado el mismo sistema adaptativo obtenido para el caso real con diferencia de estructuras, cuyas hipótesis son más cercanas a las condiciones del entorno de operación industrial e incluye, como casos particulares, los casos real sin diferencia de estructuras e ideal previamente estudiados.

El Lema 6.8 ha demostrado que este sistema adaptativo es asimismo adecuado para el caso real con parámetros variables con el tiempo, dado que la propiedad (6.71) asegura que la adaptación, cuando se ejecuta, siempre hará decrecer la norma de la diferencia entre el vector reducido de los parámetros del proceso y el correspondiente vector de estimación paramétrica. De esta forma se garantiza que, cuando tiene lugar un cambio en los parámetros del proceso, el sistema adaptativo ajustará sus parámetros siempre en la dirección apropiada.

Esta propiedad de la adaptación fortalecerá la eficacia de la estrategia de control predictivo y puede persistir, si es necesario, mientras que la operación del proceso no esté estabilizada, facilitando dicha estabilización al sistema de control. Cuando esto ocurra, los resultados de convergencia previamente obtenidos para el caso ideal con diferencia de estructuras serán asimismo válidos para este caso.

El lector podrá comprobar, mediante ejercicios en simulación o en las prácticas vía Internet de la Unidad Didáctica VI, la robustez del control predictivo y, en consecuencia, su capacidad de estabilización del proceso a pesar de operar con significativos errores de identificación paramétrica. En este contexto, la adaptación que hemos sintetizado y analizado en esta Unidad Didáctica tenderá permanentemente a reducir dichos errores de identificación paramétrica y, en consecuencia, a aumentar la eficacia y la precisión del control predictivo.

## 6.5 Conclusiones

Este capítulo se ha centrado en el análisis y la síntesis de sistemas adaptativos en el contexto de control predictivo, bajo las hipótesis correspondientes a los casos reales sin y con diferencia de estructuras y con parámetros variables con el tiempo. Teniendo en cuenta el papel que juega el sistema adaptativo, hemos considerado su diseño desde una perspectiva de

estabilidad, siguiendo la orientación y principios metodológicos utilizados previamente para el caso ideal y adaptándolos al nuevo contexto.

Los objetivos a alcanzar en la resolución del problema de síntesis fueron definidos en la Conjetura enunciada en el Capítulo 2, que define condiciones de convergencia para el error de estimación a posteriori y para los parámetros del modelo AP, que en caso de ser verificadas garantizan los objetivos de control deseados para el conjunto del sistema de control adaptativo predictivo.

Teniendo pues como principio de diseño la verificación de estas condiciones y los resultados ya alcanzados en el caso ideal, hemos tratado en primer lugar el caso real sin diferencia de estructuras y, posteriormente, el caso real con diferencia de estructuras, éste último incluyendo como casos particulares al anterior y al caso ideal. De esta forma nos hemos aproximado progresivamente a las hipótesis que caracterizan el contexto de operación industrial.

Los resultados obtenidos se acercan muy estrechamente a las condiciones de la Conjetura e incluso las cumplen cuando el vector de entradas/salidas del proceso permanece acotado. Sin embargo, esta condición en sí misma no depende de la operación del sistema adaptativo, sino de la operación del sistema de control adaptativo predictivo en su conjunto. En el siguiente capítulo, basándonos en los resultados de estabilidad obtenidos en éste, demostraremos la acotación del vector de entradas/salidas del proceso y, por ende, la estabilidad del conjunto del sistema de control adaptativo predictivo, garantizando de esta forma el logro del rendimiento de control deseado.

Finalmente, hemos considerado el caso real con parámetros variables con el tiempo y hemos demostrado que los algoritmos obtenidos para el caso real con diferencia de estructuras son también apropiados en este contexto. En efecto, dichos algoritmos satisfacen propiedades de convergencia que permiten asegurar que los parámetros del modelo AP se aproximarán en cada instante de adaptación a los parámetros del proceso, independientemente de que estos últimos varíen. Dicha aproximación se producirá de manera que la norma del error entre el valor en el instante de adaptación de los parámetros del proceso y el valor de los parámetros del modelo AP posteriores a la adaptación decrecerá, en un valor superior a una constante positiva, con respecto a la misma norma calculada con el valor de los parámetros del modelo AP previos a la adaptación.

Los mecanismos de adaptación deducidos en este capítulo son una extensión de los obtenidos en el caso ideal que incluye fundamentalmente un criterio de parada o ejecución de la adaptación y, en el caso real con diferencia de estructuras, una normalización del sistema adaptativo. De acuerdo con este criterio, la adaptación se ejecutará cuando el error de estimación a priori sea superior o igual a una cierta función acotada de la señal de perturbación o, en su caso, de la señal de perturbación normalizada. Por el contrario, dejará de ejecutarse cuando dicho error sea inferior a dicha función, es decir, cuando sea suficientemente pequeño y su origen pueda deberse fundamentalmente a los ruidos y perturbaciones no medibles que actúan sobre el proceso y asimismo, en el caso con diferencia de estructuras, a términos de la dinámica del proceso no considerados en el orden reducido del modelo AP.

Al igual que en el caso ideal, el mecanismo de adaptación, cuando se ejecuta, será de la forma general (5.21) y la ganancia variable  $G(k)$  nunca tenderá hacia cero, por lo que nunca perderá la capacidad de adaptación. Asimismo, el mecanismo de adaptación actuará ajustando los parámetros del modelo AP y haciendo decrecer la norma del error de identificación paramétrica en la forma previamente descrita, hasta conseguir que el error de estimación se reduzca en valor absoluto por debajo de la mencionada función de la señal de perturbación.

La acotación del error de estimación detendrá la adaptación paramétrica e implicará una acotación similar del error de seguimiento. Este resultado de estabilidad en el sistema adaptativo se alcanzará de forma permanente cuando los parámetros del proceso sean constantes y generalmente, como se deduce de la experimentación práctica, a intervalos cuando los parámetros del proceso varíen con el tiempo.

Finalmente, podemos considerar que la operación de los mecanismos de adaptación considerados para los casos reales garantiza asimismo una "identificación con vistas al control" ya que, de forma similar a la del caso ideal, el mecanismo de adaptación podrá alcanzar la acotación del error de estimación (la anulación en el caso ideal) y un rendimiento de control satisfactorio sin necesidad de haber realizado una identificación completa de los parámetros del proceso.

## E III

# Ejercicios de la Unidad Didáctica III

## E3.1 Introducción

Los ejercicios que se proponen tienen como objeto ilustrar la aplicación práctica de los conceptos en los que está basado el diseño de sistemas adaptativos desde la perspectiva de estabilidad desarrollada en esta Unidad Didáctica. Los ejercicios considerarán la operación de sistemas adaptativos, bajo control manual o bajo control adaptativo predictivo (AP) del proceso, y tanto en el caso ideal como en el caso real sin diferencia de estructuras.

El alumno deberá disponer de un entorno de programación similar al considerado en las Unidades Didácticas anteriores. Como en dichas Unidades Didácticas, el programa tipo de simulación que se utilizará en los ejercicios consistirá en un bucle "for" cuyo índice representará el tiempo de simulación, medido en periodos de control. En cada ejecución de dicho bucle, la secuencia de operaciones, será la siguiente:

1. Ejecución de la ecuación del proceso para obtener la salida.
2. Ejecución del sistema adaptativo, calculando el error de estimación a priori y adaptando los parámetros del proceso según la ecuación (5.20) en el caso ideal y las ecuaciones (6.13) y (6.14) en el caso real. En la ecuación (5.20) el alumno puede elegir la matriz  $B$  igual a la matriz

identidad o a cualquier otra matriz que desee experimentar. En la ecuación (6.14) el valor del límite  $\Delta_b$  será oportunamente definido en el ejercicio en cuestión.

3. Bajo control manual, determinación de la acción de control a aplicar en el instante siguiente.
4. Bajo control predictivo, cálculo de la salida deseada en  $k + 1$  empleando para ello la ecuación (3.9), y posteriormente cálculo de la acción de control predictivo mediante la ecuación (3.10). Es decir, en estos ejercicios utilizaremos únicamente la aplicación de la estrategia básica de control predictivo.

Para permitir el correspondiente análisis, el programa tipo deberá asimismo proveer el almacenamiento y la realización de gráficas, en el intervalo de duración de los ejercicios, de las variables de entrada y salida del proceso, de la salida predicha (bajo control manual) o de la salida deseada (bajo control automático), de los parámetros del modelo AP y, de las funciones  $f_1(k)$  y  $f_2(k)$  que definimos a continuación:

- La función  $f_1(k)$  es la suma de los cuadrados de los errores de estimación a posteriori en los instantes en los que se produce adaptación de los parámetros del modelo AP, es decir

$$f_1(k) = \sum_{h=1}^k e(h|h)^2,$$

donde  $e(h|h) = 0$  para todo instante  $h$  en el que no se ejecute la estimación paramétrica.

- La función  $f_2(k)$  depende de la norma del error de estimación paramétrica en la forma

$$f_2(k) = \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}(k)\|^2.$$

En los ejercicios de esta Unidad Didáctica se utilizará un escenario de simulación estándar, que se define con la ayuda de la Figura E3.1

En la Figura E3.1, el eje de abscisas representa el instante simulado de control y el eje de ordenadas es la variable  $s(k)$ . Bajo control manual esta variable será igual a la señal de control  $u(k)$  a aplicar al proceso, y bajo control AP será igual a la consigna  $y_{sp}(k)$ .

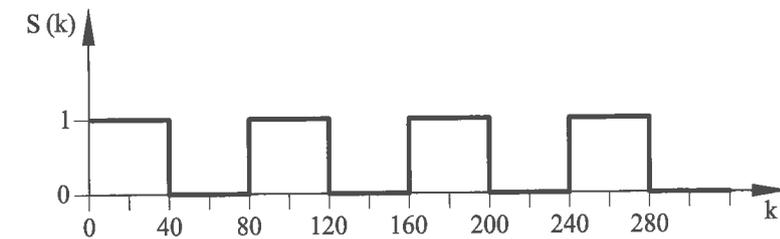


Figura E3.1: Escenario de simulación.

Cuando se aplique control manual, los ejercicios pueden considerarse como alternativa al generar la señal de control por medio de un paseo aleatorio, haciendo la señal de control igual a la integral de un ruido blanco gaussiano, tal y como se indica en el ejercicio en cuestión.

## E3.2 Ejercicios en el caso ideal

### E3.2.1 Control manual

Los Ejercicios 3.1 a 3.8 siguientes pretenden ilustrar, en el caso ideal, la operación del mecanismo de adaptación ante tipos de señal de entrada.

**Ejercicio 3.1.-** En el escenario de simulación estándar bajo control manual, aplicar un sistema adaptativo a un proceso definido por la ecuación

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2),$$

cuyos parámetros reciben los siguientes valores:

$$a_1 = 1.2008; a_2 = -0.5134; b_1 = 0.1738; b_2 = 0.1388,$$

y donde los valores iniciales de los parámetros del modelo adaptativo son:

$$\hat{a}_1 = 1; \hat{a}_2 = 0; \hat{b}_1 = 0.1; \hat{b}_2 = 0.$$

□

**Ejercicio 3.2.-** Aplicar un sistema adaptativo al caso descrito en el Ejercicio 3.1, pero donde los valores iniciales de los parámetros del modelo adaptativo son los siguientes:

$$\hat{a}_1 = 1; \hat{a}_2 = -0.2; \hat{b}_1 = 0.1; \hat{b}_2 = 0.1$$

□

**Ejercicio 3.3.-** Aplicar un sistema adaptativo al caso descrito en el Ejercicio 3.1, pero donde la señal de control sea un paseo aleatorio generado por un ruido blanco gaussiano de media cero y desviación tipo 0.1. □

**Ejercicio 3.4.-** Aplicar un sistema adaptativo al caso descrito en el Ejercicio 3.2, pero donde la señal de control sea un paseo aleatorio generado por un ruido blanco gaussiano de media cero y desviación tipo 0.1. □

**Ejercicio 3.5.-** Aplicar un sistema adaptativo al caso descrito en el Ejercicio 3.1, pero cambiando la ganancia del proceso de 1 a 2 en el instante 150. □

**Ejercicio 3.6.-** Aplicar un sistema adaptativo al caso descrito en el Ejercicio 3.2, pero cambiando la ganancia del proceso de 1 a 2 en el instante 150. □

**Ejercicio 3.7.-** Aplicar un sistema adaptativo al caso descrito en el Ejercicio 3.3, pero cambiando la ganancia del proceso de 1 a 2 en el instante 190. □

**Ejercicio 3.8.-** Aplicar un sistema adaptativo al caso descrito en el Ejercicio 3.4, pero variando la ganancia del proceso de 1 a 2 en el instante 190. □

### E3.2.2 Control adaptativo predictivo

Los Ejercicios 3.9 a 3.14 siguientes pretenden ilustrar, en el caso ideal, la operación del mecanismo de adaptación bajo control AP, cuando la salida del proceso se aproxima a la consigna y cuando se estabiliza en ella.

**Ejercicio 3.9.-** Aplicar control adaptativo predictivo en el escenario de simulación estándar para control automático, al proceso considerado en el Ejercicio 3.1, asignando a los parámetros del modelo AP los mismos valores iniciales que en dicho ejercicio y definiendo la dinámica deseada por un polo doble igual a 0.6 y un cero igual a -1. □

**Ejercicio 3.10.-** Aplicar control adaptativo predictivo, tal y como se ha indicado en el Ejercicio 3.9, pero asignando a los parámetros del modelo AP los siguientes valores iniciales:

$$\hat{a}_1 = 1; \hat{a}_2 = -0.2; \hat{b}_1 = 0.05; \hat{b}_2 = 0.05 \quad \square$$

**Ejercicio 3.11.-** Aplicar control predictivo sin adaptación en un ejercicio como el 3.10 pero donde el sistema adaptativo no está en operación. □

**Ejercicio 3.12.-** Aplicar control adaptativo predictivo en un ejercicio equivalente al 3.9, pero en el que la ganancia del proceso cambia de 1 a 2 en el instante 150. □

**Ejercicio 3.13.-** Aplicar control adaptativo predictivo en un ejercicio equivalente al 3.10. pero en el que la ganancia del proceso cambie de 1 a 2 en el instante 150. □

**Ejercicio 3.14.-** Aplicar control predictivo sin adaptación en un ejercicio equivalente al 3.11 pero en el que la ganancia del proceso cambia de 1 a 2 en el instante 150. y asignando a los parámetros del modelo predictivo los siguientes valores:

$$\hat{a}_1 = 1; \hat{a}_2 = -0.2; \hat{b}_1 = 0.1; \hat{b}_2 = 0.1 \quad \square$$

## E3.3 Ejercicios en el caso real sin diferencia de estructuras

### E3.3.1 Control manual

Los Ejercicios 3.15 a 3.18 siguientes pretenden ilustrar, en el caso real sin diferencia de estructuras, bajo control manual, la operación del mecanismo de adaptación y la influencia de la elección del parámetro  $\Delta_b$ .

**Ejercicio 3.15.-** Sea el proceso definido mediante las ecuaciones

$$y_a(k) = a_1 y_a(k-1) + a_2 y_a(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2),$$

$$y(k) = y_a(k) + n_y(k),$$

cuyos parámetros reciben los siguientes valores:

$$a_1 = 1.2008; a_2 = -0.5134; b_1 = 0.1738; b_2 = 0.1388,$$

y el ruido de medida  $n_y(k)$  es un ruido blanco gaussiano de media nula y de desviación estándar 0.02. Aplicar, en el escenario de simulación estándar bajo control manual, un sistema adaptativo definido por los algoritmos (6.13) y (6.14), donde a  $\Delta_b$  se le asigna un valor igual a dos veces la desviación estándar de  $\Delta(k)$ <sup>1</sup> y los valores iniciales del modelo AP son:

$$\hat{a}_1 = 1; \hat{a}_2 = 0; \hat{b}_1 = 0.1; \hat{b}_2 = 0. \quad \square$$

**Ejercicio 3.16.-** Repetir el Ejercicio 3.15, pero eligiendo un valor de  $\Delta_b$  igual a 3 veces la desviación estándar de  $\Delta(k)$ .  $\square$

**Ejercicio 3.17.-** Repetir el Ejercicio 3.15 eligiendo experimentalmente un valor conveniente para  $\Delta_b$ .  $\square$

**Ejercicio 3.18.-** Repetir el Ejercicio 3.17 pero aplicando como entrada al proceso un paseo aleatorio generado por un ruido blanco gaussiano de media cero y desviación tipo 0.1.  $\square$

### E3.3.2 Control adaptativo predictivo

Los Ejercicios 3.19 a 3.22 que se proponen a continuación pretenden ilustrar, en el caso real sin diferencia de estructuras, la operación del mecanismo de adaptación bajo control AP con un parámetro  $\Delta_b$  convenientemente elegido.

**Ejercicio 3.19.-** Sea el proceso definido mediante las ecuaciones

$$y_a(k) = a_1 y_a(k-1) + a_2 y_a(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2),$$

$$y(k) = y_a(k) + n_y(k),$$

cuyos parámetros reciben los siguientes valores:

$$a_1 = 1.2008; a_2 = -0.5134; b_1 = 0.1738; b_2 = 0.1388$$

<sup>1</sup>Para realizar este cálculo, debe tenerse en cuenta que  $\Delta(k)$  está definida, y se relaciona con el ruido de medida  $n_y(k)$ , mediante la ecuación (2.28), y que la varianza de la suma de variables aleatorias independientes es igual a la suma de las varianzas.

y el ruido de medida  $n_y(k)$  es un ruido blanco gaussiano de media nula y de desviación estándar 0.02. En el escenario de simulación estándar, aplicar control adaptativo predictivo (AP) a este proceso. Para ello la dinámica deseada estará definida por un polo doble de valor 0.6 y un cero igual a  $-1$ , y el sistema adaptativo por los algoritmos (6.13) y (6.14), donde se elegirá experimentalmente un valor conveniente para  $\Delta_b$ , y los valores iniciales del modelo AP serán

$$\hat{a}_1 = 1; \hat{a}_2 = 0; \hat{b}_1 = 0.1; \hat{b}_2 = 0. \quad \square$$

**Ejercicio 3.20.-** Repetir el Ejercicio 3.19 pero eligiendo los siguientes valores iniciales del modelo AP:

$$\hat{a}_1 = 1; \hat{a}_2 = -0.2; \hat{b}_1 = 0.1; \hat{b}_2 = 0.1 \quad \square$$

**Ejercicio 3.21.-** Repetir el Ejercicio 3.19 pero cambiando la ganancia del proceso de 1 a 2 en el instante 150.  $\square$

**Ejercicio 3.22.-** Repetir el Ejercicio 3.20 pero cambiando la ganancia del proceso de 1 a 2 en el instante 150.  $\square$

### E3.4 Comentarios a los ejercicios

Los realización de los ejercicios conlleva la generación de las gráficas de las funciones  $f_1(k)$  y  $f_2(k)$ , que son indicativas del rendimiento del sistema adaptativo predictivo y nos permiten interpretar su operación.

**Ejercicios 3.1 a 3.8:** En el caso ideal, bajo control manual, podemos observar que en las transiciones de la señal de control se producen errores de estimación a posteriori, que hacen crecer la función  $f_1(k)$ . Sin embargo, cuando la señal de control se estabiliza, el error a posteriori tiende a cero rápidamente, y por tanto la función  $f_1(k)$  no continúa incrementándose. En consecuencia, la función  $f_1(k)$  es no decreciente y va creciendo a intervalos. Por su parte, la función  $f_2(k)$ , que es indicativa del error de estimación paramétrico, presenta una evolución exactamente inversa a la de  $f_1(k)$ . Es decir, en los intervalos en los que el error de estimación a posteriori es diferente de cero,  $f_2(k)$  decrecerá, indicando que el error de identificación

paramétrica decrece; y en los intervalos en los que el error de estimación sea cero, permanecerá constante.

**Ejercicios 3.9 a 3.14:** En el caso ideal, bajo control AP, podemos observar que en las transiciones de la salida del proceso hacia la consigna, se producen errores de estimación a posteriori, mientras que una vez estabilizada la salida del proceso en la consigna, el error de estimación se hace rápidamente cero y cesa la variación en los parámetros estimados. Cada una de estas transiciones se refleja en un acercamiento de los parámetros del modelo a los parámetros del proceso en términos de una reducción del cuadrado de la norma del error de identificación paramétrica. A medida que este aprendizaje ocurre, la trayectoria de salida del proceso se aproxima cada vez más a la trayectoria deseada.

El funcionamiento del mecanismo de adaptación que se observa en los ejercicios pone de relieve que, en pocos períodos, el sistema puede alcanzar un rendimiento de control satisfactorio, y que este resultado se consigue a pesar de que exista un error de identificación paramétrica significativo. Es decir, no es necesaria una identificación precisa del proceso para obtener un rendimiento de control satisfactorio y la operación del mecanismo de adaptación tiende a reducir el error de estimación hacia cero de manera eficaz y a estabilizar el valor de los parámetros estimados, verificándose estrictamente las condiciones de la Conjetura establecida en el Capítulo 2, lo que garantiza el mencionado rendimiento de control. El comportamiento de las funciones  $f_1$  y  $f_2$  es análogo al que hemos observado en los experimentos bajo control manual previamente comentados.

Sin embargo, en el Ejercicio 3.11, donde se aplica control predictivo sin adaptación, puede observarse que la salida del proceso no converge hacia la consigna en régimen permanente, produciéndose una desviación permanente. Esta desviación permanente se explica teóricamente en el Capítulo 4 (Apartado 4.5), donde se deducen para la ley de control predictivo (4.19) las funciones de transferencia entre la consigna y la salida y la entrada del proceso en el caso ideal. Debe observarse que la ley de control (3.10), aquí aplicada, es un caso particular de (4.19). El Apartado 4.5 asimismo deduce que, para que la salida del proceso converja hacia la consigna, se necesita que la ganancia del modelo predictivo y la del proceso sean iguales. En efecto, la ganancia del proceso simulado en el Ejercicio 3.11 es igual a 1, mientras que la ganancia del modelo predictivo es igual a 0.5 con lo que ambas ganancias son desiguales.

Por su parte, los resultados del Ejercicio 3.14, donde también se aplica control predictivo sin adaptación, ponen de relieve que, antes del instante 150, la salida del proceso converge hacia la consigna en régimen permanente, dado que la ganancia del modelo predictivo es, durante este período de tiempo, igual a 1, es decir, coincide con la del proceso simulado. Sin embargo, cuando a partir del instante 150 la ganancia del proceso cambia de 1 a 2, vuelve a producirse una desviación permanente entre la salida del proceso y su consigna.

Como se ha comentado previamente y puede observarse en los resultados de los ejercicios aquí comentados, el funcionamiento del mecanismo de adaptación, dentro del contexto de control adaptativo predictivo aplicado en el caso ideal, elimina la desviación permanente considerada. Sin embargo, existe una segunda forma de eliminar la mencionada desviación permanente. En efecto, el Apéndice B (Apartado B.2.3) analiza cómo una formulación incremental en la aplicación de control predictivo, que utiliza una forma incremental de las variables del modelo predictivo, permite que la salida del proceso alcance la consigna sin desviaciones permanentes aunque las ganancias del proceso y del modelo difieran. Asimismo, el mismo apartado pone de relieve cómo la formulación incremental de control predictivo es capaz de compensar desviaciones permanentes debidas a perturbaciones desconocidas constantes que se suman a la acción de control.

La formulación incremental de control predictivo se describe en el Capítulo 8, donde su aplicación se ilustra al control mono y multivariable de una columna de destilación.

**Ejercicios 3.15 a 3.22:** En el caso real sin diferencia de estructuras, la elección de un parámetro  $\Delta_b$  relativamente grande con respecto a la señal de perturbación  $\Delta(k)$ , conllevará un menor número de ejecuciones del mecanismo de adaptación. Ello puede hacer más lento el proceso de identificación y, asimismo, cuando la variable del proceso se estabiliza alrededor de la consigna y la adaptación cesa, resultará en general en un mayor error de identificación paramétrica y en un error de predicción, y en consecuencia en un error de control, de mayor magnitud, de acuerdo con (6.14). En este caso la función  $f_1$  crecerá con las ejecuciones del mecanismo de adaptación, y la función  $f_2$  disminuirá con dichas ejecuciones, al mismo tiempo que se reduce el error de identificación paramétrica y las condiciones de la Conjetura se verificarán después de cada transición.

En los resultados de estos ejercicios, es importante notar que el error de identificación paramétrica de carácter permanente, que se produce cuando la adaptación cesa, implicará que la ganancia del proceso simulado y la del modelo AP en general sean desiguales. Ello puede determinar, de forma análoga a como se ha considerado en los comentarios a los Ejercicios 3.9 a 3.14, que la salida del proceso no se centre alrededor de la consigna en régimen permanente, sino que se aleje en media de la misma en lo que, para este caso, también consideraremos una desviación permanente.

A diferencia con el caso ideal, en los ejercicios que estamos comentando la adaptación no puede eliminar la desviación permanente previamente considerada; pero sí podrá hacerlo, al igual que en el caso ideal, una formulación incremental en la aplicación de control predictivo tal como la considerada en el Apartado B.2.3 e ilustrada en su aplicación práctica en el Capítulo 8.

Por el contrario, si el parámetro  $\Delta_b$  es relativamente pequeño con respecto a la señal de perturbaciones, el número de ejecuciones del mecanismo de adaptación será mayor, pero no podemos asegurar que en todos los casos el error de identificación paramétrica se reduzca y la función  $f_2$  puede eventualmente crecer. El alumno debe comentar los resultados obtenidos al asignar diferentes valores al parámetro  $\Delta_b$  y evaluar la conveniencia de elegir un valor, ni relativamente grande ni relativamente pequeño, para optimizar el rendimiento del mecanismo de adaptación.

## Unidad Didáctica IV

---

# Teoría de Estabilidad del Control Predictivo y Adaptativo Predictivo

## Resumen de la Unidad Didáctica IV

---

Esta Unidad Didáctica presenta los resultados formales de estabilidad para el control predictivo y adaptativo predictivo, cuando el controlador predictivo y el sistema adaptativo son, respectivamente, resultado de la materialización tecnológica de los conceptos realizada en las Unidades Didácticas II y III, y por tanto responden a los criterios de rendimiento establecidos en la Unidad Didáctica I.

El único capítulo de esta Unidad Didáctica, Capítulo 7 del libro, analiza y demuestra bajo qué condiciones el control predictivo y el control adaptativo predictivo pueden garantizar la estabilidad.

En relación al control predictivo, se analiza el efecto de los errores de modelización, al mismo tiempo que se determinan los límites de estabilidad en función de dichos errores.

En relación al control adaptativo predictivo, en primer lugar, se presentan y demuestran los resultados de estabilidad global siempre que no exista diferencia de estructuras entre el proceso y el modelo adaptativo predictivo. Cuando existe diferencia de estructuras, se deducen los límites y las restricciones que de ella se derivan, tanto en el resultado de estabilidad como sobre los objetivos de control, y se demuestra que dichos límites y restricciones dependen de la naturaleza dinámica del proceso. Los resultados de estabilidad obtenidos se basan en las propiedades de los sistemas adaptativos derivados en la Unidad Didáctica III, la naturaleza de estabilidad del proceso y las propiedades de la salida deseada conductora, de la que se requiere que sea físicamente realizable y/o acotada, dependiendo del escenario en cuestión.

Esta Unidad Didáctica se completa con una serie de ejercicios en los que el alumno deberá realizar demostraciones o deducir condiciones de estabilidad y convergencia para sistemas de control predictivo, sistemas adaptativos y sistemas de control adaptativo predictivo, utilizando los resultados de estabilidad presentados tanto en esta Unidad Didáctica como en las anteriores.

## Capítulo 7

# Teoría de Estabilidad

### 7.1 Introducción

En la Unidad Didáctica III se ha demostrado que los sistemas adaptativos basados en un diseño de estabilidad pueden garantizar las condiciones de la Conjetura del Capítulo 2 en el supuesto de que el vector de entradas y salidas  $\phi$  esté acotado. Sin embargo, la acotación de este vector no puede ser garantizada por el sistema adaptativo por sí solo, sino que debe ser garantizada por el sistema de control en su conjunto.

En este capítulo analizaremos las condiciones bajo las cuales el control predictivo y el control adaptativo predictivo pueden garantizar la acotación del vector de entradas/salidas y las consecuencias que esta acotación tienen en la estabilidad. Nuestro análisis se basará en las siguientes premisas:

1. Los resultados obtenidos de los diseños estables de sistemas adaptativos presentados en la Unidad Didáctica III.
2. La naturaleza del proceso caracterizada en términos de estabilidad.
3. La realizabilidad física y la acotación de la salida deseada.

La segunda de las anteriores premisas se refiere al hecho de que los resultados de estabilidad que se obtendrán en este capítulo se basan en propiedades que son inherentes al comportamiento de ciertas clases de procesos. En particular, consideraremos tres clases de procesos que se denominan de la siguiente forma:

- (a) Procesos de naturaleza lineal y estable.
- (b) Procesos de naturaleza lineal y con inverso estable.
- (c) Procesos inestables con inverso inestable.

La tercera de las premisas anteriores nos permitirá dar resultados de estabilidad generales para control predictivo y adaptativo predictivo independientemente de la estrategia específica usada para su aplicación, lo que permite unificar el cuerpo de la teoría de estabilidad. Para cada una de las clases de procesos considerados, esta premisa toma una forma específica cuyas implicaciones teóricas y prácticas serán analizadas. La satisfacción de esta tercera premisa por las diferentes estrategias posibles para la aplicación del control predictivo y adaptativo predictivo es sencilla en algunos casos y puede ser incluso obvia e intuitiva en otros. Pero un análisis riguroso general que englobe todas las formas posibles es un problema complejo y, de hecho, todavía abierto. No obstante, es importante remarcar que la teoría presentada aquí, de acuerdo con los objetivos de este libro, proporciona la base necesaria para un uso práctico, a la vez que riguroso, de la metodología de control predictivo y adaptativo predictivo en procesos industriales dentro de un espectro considerablemente amplio.

En el siguiente apartado se presentarán las propiedades de entrada/salida asociadas con la naturaleza de estabilidad de las clases de procesos consideradas. En el Apartado 7.3 se definirá el concepto de realizabilidad física de la salida deseada en términos matemáticos. El Apartado 7.4 traducirá la premisa número tres en una condición de estabilidad para procesos con naturaleza lineal y con inverso estable y analizará sus consecuencias prácticas desde la perspectiva del diseño y su papel en las demostraciones de estabilidad que se presentan en los Apartados 7.5 y 7.6.

El Apartado 7.5 considerará el efecto de los errores de modelación en la estabilidad del sistema de control cuando se aplica control predictivo, así como acotaciones sobre estos errores para preservar dicha estabilidad. El Apartado 7.6 analizará el papel de la adaptación paramétrica para superar el problema de los errores de modelación del control predictivo y formulará las condiciones generales de estabilidad para la clase de procesos de naturaleza lineal y con inverso estable, tanto para el caso ideal como para los distintos casos reales. Asimismo demostrará cómo los sistemas adaptativos diseñados en el Capítulo 5 (caso ideal) y en el Capítulo 6 (casos reales) permiten satisfacer dichas condiciones generales y, en consecuencia, garantizar

la estabilidad global y los objetivos de control deseados. El Apartado 7.7 presenta un análisis de estabilidad paralelo al anterior para procesos de naturaleza lineal y estable. Finalmente, el Apartado 7.8 considera el análisis de estabilidad para procesos inestables con un inverso también inestable.

## 7.2 Propiedades de entrada/salida asociadas a la naturaleza de estabilidad del proceso

### 7.2.1 Definiciones

Es un resultado estándar de la teoría de sistemas que los procesos lineales estables satisfacen la propiedad de *entrada acotada/salida acotada*. Esto significa que la salida está acotada para cualquier entrada acotada.

Como hemos indicado, en nuestro análisis consideraremos tres clases de procesos, todos ellos descritos en el Capítulo 2 (Apartado 2.4) por las mismas ecuaciones que volvemos a escribir a continuación:

$$y(k) = \theta(k)^T \phi(k-d) + \Delta(k), \quad (7.1)$$

$$y(k) = \theta_o(k)^T \phi_o(k-d) + \theta_1(k)u(k-d) + \Delta(k).$$

Estas ecuaciones se usarán de forma general a lo largo de este capítulo. Como ya se ha definido en el Apartado 2.4,  $d$  es el tiempo de retardo y  $\phi$  es el vector de entradas/salidas que incluye un cierto número de entradas  $u$ , salidas  $y$  y perturbaciones medibles  $w$  en el instante actual y en instantes previos, es decir

$$\phi(k)^T = [y(k), y(k-1), \dots, y(k-p), u(k), u(k-1), \dots, u(k-q), w(k), w(k-1), \dots, w(k-s)]. \quad (7.2)$$

Las perturbaciones medibles se suponen acotadas como es habitual en la práctica industrial. Los parámetros del proceso están incluidos en el vector  $\theta(k)$  y  $\Delta(k)$  es la señal de perturbación.  $\theta_1(k)$  denota el parámetro incluido en el vector  $\theta(k)$  que multiplica en el producto escalar  $\theta(k)^T \phi(k-d)$  a la entrada  $u(k-d)$ . Los vectores  $\theta_o(k)$  y  $\phi_o(k-d)$  resultan de quitar  $\theta_1(k)$  y  $u(k-d)$  de  $\theta(k)$  y  $\phi(k-d)$ , respectivamente.

La primera clase de procesos que consideramos es la que denominaremos como de *naturaleza lineal y estable* y se define de la siguiente forma.

**Definición 7.1:** *Un proceso es de naturaleza lineal y estable cuando puede describirse mediante una ecuación de la forma (7.1) y cuando, para cualquier sucesión de entradas finita, satisface la siguiente propiedad:*

$$\max_{0 \leq j \leq k} |u(j)| > \tau_1 \max_{0 \leq j \leq k} |y(j+d)| - \tau_2, \quad \forall k \geq 0, \quad (7.3)$$

donde  $0 < \tau_1 < \infty$  y  $0 \leq \tau_2 < \infty$ .  $\square$

El Apéndice C demuestra que los procesos lineales y estables de tiempo discreto y con parámetros constantes (con todos sus polos dentro del círculo unidad) satisfacen la propiedad (7.3). También dicho apéndice calcula las constantes  $\tau_1$  y  $\tau_2$  y demuestra que, mientras que el valor de  $\tau_1$  depende únicamente de la dinámica del proceso, el valor de  $\tau_2$  depende de las condiciones iniciales, es decir, del estado del proceso en el instante  $k = 0$ .

Sin embargo, la propiedad (7.3) puede ser satisfecha también por una clase de procesos más amplia que la considerada en el Apéndice C. Esta es la que hemos denominado "de naturaleza lineal y estable". Por ejemplo, dentro de esta clase están procesos lineales con parámetros variables con el tiempo, cuya dinámica puede describir el comportamiento de una extensa variedad de procesos industriales.

Dado un proceso, su proceso inverso resulta de considerar las entradas del primero como si fueran salidas y las salidas como si fueran entradas. El concepto de proceso inverso nos lleva a definir la segunda clase de procesos en la forma siguiente.

**Definición 7.2:** *Un proceso es de naturaleza lineal con inverso estable cuando puede ser descrito por una ecuación de la forma (7.1) y cuando, para cualquier sucesión finita de entradas, satisface la siguiente propiedad:*

$$\max_{0 \leq j \leq k} |y(j+d)| > \rho_1 \max_{0 \leq j \leq k} |u(j)| - \rho_2, \quad \forall k \geq 0, \quad (7.4)$$

donde  $0 < \rho_1 < \infty$  y  $0 \leq \rho_2 < \infty$ .  $\square$

Como puede observarse, esta definición se obtiene directamente de la Definición 7.1 simplemente con el intercambio de entradas y salidas que implica el concepto de proceso inverso. Invirtiendo la función de transferencia de procesos lineales estables en tiempo discreto, y mediante una demostración como la dada en el Apéndice C, puede demostrarse que los procesos lineales con parámetros constantes y con inverso estable (es decir, con todos sus ceros dentro del círculo unidad) satisfacen la propiedad (7.4). Sin embargo, la clase de procesos caracterizada por la propiedad (7.4) es mucho más amplia y cercana a la realidad industrial.

Finalmente, los *procesos inestables con un inverso inestable*, que pueden ser también descritos por la ecuación (7.1), forman la tercera clase de procesos que consideraremos en nuestro análisis, la cual claramente no satisface ninguna de las dos definiciones 7.1 y 7.2.

## 7.2.2 Propiedades

Los siguientes lemas establecen las propiedades de entrada/salida de las clases de procesos previamente definidas. Estas propiedades se usarán posteriormente en el análisis de estabilidad.

**Lema 7.1:** *En un proceso de naturaleza lineal y estable, donde  $|u(k)| < \infty$ ,  $\forall k \geq 0$ , la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  únicamente será no acotada si existe una subsucesión  $\{k_s\}$  de  $\{k\}$  tal que*

$$1) |u(k_s)| > \gamma_1 \|\phi(k_s)\| - \gamma_2, \quad \forall k_s \geq 0, \quad \text{con } 0 < \gamma_1 < \infty \text{ y } 0 \leq \gamma_2 < \infty;$$

$$2) \lim_{k_s \rightarrow \infty} \|\phi(k_s)\| = \infty. \quad \square$$

**Demostración:** A partir de la definición de  $\phi$  dada en (7.2), es claro que  $\{\|\phi(k)\|\}$  será no acotada únicamente si o bien la sucesión de salidas  $\{\|y(k)\|\}$  o la de entradas  $\{\|u(k)\|\}$  son no acotadas. La propiedad (7.3) establece que  $\{\|y(k)\|\}$  es no acotada sólo si  $\{\|u(k)\|\}$  es no acotada. Por tanto, para la clase de sistemas de naturaleza lineal y estable,  $\{\|\phi(k)\|\}$  será no acotada únicamente en el caso en que  $\{\|u(k)\|\}$  sea no acotada. Esto implica que debe existir una subsucesión  $\{k_s\}$  de  $\{k\}$  tal que

$$|u(k_s)| = \max_{0 \leq j \leq k_s} |u(j)|, \quad (7.5)$$

$$\lim_{k_s \rightarrow \infty} |u(k_s)| = \infty. \quad (7.6)$$

Aplicando la desigualdad triangular en (7.2) para  $k = k_s$ , podemos escribir

$$|\phi(k_s)| \leq \sum_{i=0}^p |y(k_s - i)| + \sum_{i=0}^q |u(k_s - i)| + \sum_{i=0}^s |w(k_s - i)|. \quad (7.7)$$

Según (7.5),

$$\sum_{i=0}^q |u(k_s - i)| \leq (q+1)|u(k_s)|. \quad (7.8)$$

Usando (7.5) en (7.3), escribimos

$$\max_{0 \leq j \leq k_s} |y(j+d)| < \frac{|u(k_s)| + \tau_2}{\tau_1}, \quad (7.9)$$

y por tanto

$$\sum_{i=0}^p |y(k_s - i)| \leq (p+1) \frac{|u(k_s)| + \tau_2}{\tau_1}. \quad (7.10)$$

Puesto que las perturbaciones medibles se suponen acotadas por una constante  $w_b$ , tenemos que

$$\sum_{i=0}^s |w(k_s - i)| < (s+1)w_b. \quad (7.11)$$

La sustitución de (7.8), (7.10) y (7.11) en (7.7) nos lleva a escribir

$$|u(k_s)| > \gamma_1 \|\phi(k_s)\| - \gamma_2,$$

con

$$\gamma_1 = \frac{\tau_1}{(p+1) + \tau_1(q+1)}, \quad \gamma_2 = \frac{(p+1)\tau_2 + (s+1)w_b\tau_1}{(p+1) + \tau_1(q+1)}.$$

Esto demuestra la propiedad 1 de este lema. Puesto que  $u(k)$  está incluida en  $\phi(k)$ , la propiedad 2 es una consecuencia directa de (7.6). ■

**Lema 7.2:** En un proceso de naturaleza lineal y con inverso estable, donde  $|u(k)| < \infty$ ,  $\forall k \geq 0$ , la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  únicamente será no acotada si existe una subsucesión  $\{k_s\}$  de  $\{k\}$  tal que

- 1)  $|y(k_s)| > \alpha_1 \|\phi(k_s - d)\| - \alpha_2$ ,  $\forall k_s \geq 0$ ,  
con  $0 < \alpha_1 < \infty$  y  $0 \leq \alpha_2 < \infty$ ;
- 2)  $\lim_{k_s \rightarrow \infty} \|\phi(k_s)\| = \infty$ . □

**Demostración:** De forma similar al caso del Lema 7.1, partiendo de la propiedad (7.4), que se cumple para los procesos de naturaleza lineal con inverso estable, podemos deducir que la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  únicamente será no acotada si  $\{y(k)\}$  es también no acotada. Esto implica que debe existir una subsucesión  $\{k_s\}$  de  $\{k\}$  tal que

$$|y(k_s)| = \max_{0 \leq j \leq k_s} |y(j)|, \quad (7.12)$$

$$\lim_{k_s \rightarrow \infty} |y(k_s)| = \infty. \quad (7.13)$$

A partir de (7.12) y la propiedad (7.4), siguiendo argumentos similares a los usados en el Lema 7.1, se deduce la propiedad 1 de este lema. A partir de la ecuación del proceso (7.1) y usando la desigualdad triangular y la desigualdad de Cauchy-Schwarz a la subsucesión  $\{k_s\}$ , escribimos

$$|y(k_s)| \leq \|\theta(k_s)\| \|\phi(k_s - d)\| + |\Delta(k_s)|.$$

A partir de esta expresión y (7.13), usando el hecho de que  $\|\theta(k_s)\|$  y  $|\Delta(k_s)|$  están acotadas, se demuestra la propiedad 2 de este lema. ■

**Lema 7.3:** En un proceso inestable con inverso inestable descrito por la ecuación (7.1), donde  $|u(k)| < \infty$ ,  $\forall k \geq 0$ , la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  será no acotada únicamente si se cumple una de las siguientes condiciones:

1. Existe una subsucesión  $\{k_{s1}\}$  de  $\{k\}$  similar a la subsucesión  $\{k_s\}$  considerada en el Lema 7.1.
2. Existe una subsucesión  $\{k_{s2}\}$  de  $\{k\}$  similar a la subsucesión  $\{k_s\}$  considerada en el Lema 7.2.
3. Existen las dos subsucesiones  $\{k_{s1}\}$  y  $\{k_{s2}\}$  anteriores. □

**Demostración:** Para que  $\{\|\phi(k)\|\}$  sea no acotada, debe existir una subsucesión  $\{k_{so}\}$  de  $\{k\}$  para la que una de las componentes de  $\phi(k_{so})$  alcance un valor absoluto mayor que el valor absoluto de todas las componentes de  $\phi(j)$  en el intervalo  $0 \leq j \leq k_{so}$ . Esta componente, que denotamos  $c(k_{so})$ , debe cumplir

$$\lim_{k_{so} \rightarrow \infty} |c(k_{so})| = \infty, \quad (7.14)$$

$$|c(k_{so})| \geq \frac{1}{\sqrt{m}} \max_{0 \leq j \leq k_{so}} \|\phi(j)\|, \quad (7.15)$$

donde  $m$  es la dimensión del vector  $\phi$ .

La condición (7.14) es necesaria para que  $\{\|\phi(k)\|\}$  sea no acotada, y (7.15) se deduce del hecho de que  $c(k_{so})$  tiene el mayor valor absoluto de todas las componentes de  $\{\|\phi(k)\|\}$  en el intervalo considerado.

La componente  $c(k_{so})$  puede ser  $u(k_{so})$  o  $y(k_{so})$ . Puede ocurrir que, a lo largo de la sucesión  $\{k_{so}\}$ ,  $c(k_{so})$  sea  $u(k_{so})$  para un número infinito de instantes de tiempo. En tal caso podemos extraer estos instantes como una subsucesión  $\{k_{s1}\}$  de  $\{k_{so}\}$ . También, si  $c(k_{so})$  es  $y(k_{so})$  para un número infinito de instantes, podemos extraer una subsucesión  $\{k_{s2}\}$  de  $\{k_{so}\}$ . Para cada una de estas subsucesiones podemos aplicar los argumentos de los Lemas 7.1 y 7.2, respectivamente, lo que demuestra el Lema 7.3. ■

Es interesante señalar que las propiedades deducidas en este apartado consisten en condiciones que deben cumplirse en cada uno de los casos para que la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  sea no acotada. De hecho, como veremos en los apartados siguientes, el análisis de estabilidad consistirá esencialmente en demostrar que las condiciones anteriores no pueden satisfacerse bajo control predictivo o control adaptativo predictivo y, por consiguiente, la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  permanecerá acotada y se alcanzarán los objetivos de control.

### 7.3 Realizabilidad física de la trayectoria deseada

Aunque la realizabilidad física de la trayectoria deseada se ha considerado ya en capítulos anteriores, en este apartado definiremos este concepto en términos matemáticos que nos permitirán usarlo posteriormente en el análisis de estabilidad. Nos referimos a la trayectoria deseada conductora (*TDC*), que es la que determina finalmente el cálculo de la señal de control

predictivo.

**Definición 7.3:** Se dice que la *TDC* es físicamente realizable si, para cualquier instante  $k$ , su valor  $y_d(k+d)$  puede conseguirse mediante la aplicación en el instante  $k$  de una señal de control  $u_d(k)$  que se mantiene siempre acotada, esto es

$$|u_d(k)| < U < \infty, \quad \forall k > 0. \quad \square$$

Según esta definición, para los procesos descritos por (7.1) la relación entre  $y_d(k+d)$  y  $u_d(k)$ , o la relación equivalente entre  $y_d(k)$  y  $u_d(k-d)$ , viene dada por la ecuación

$$y_d(k) = \theta_o(k)^T \phi_o(k-d) + \theta_1(k)u_d(k-d) + \Delta(k), \quad \forall k \geq d. \quad (7.16)$$

Los factores aleatorios implicados en la ecuación (7.16) hacen imposible calcular en el instante  $k-d$  la señal de control  $u_d(k-d)$  que producirá posteriormente en el instante  $k$  una salida del proceso igual a  $y_d(k)$ . De igual forma, no es posible calcular en el instante  $k$  la señal de control  $u_d(k)$  capaz de producir la salida  $y_d(k+d)$  en  $k+d$ . Sin embargo, para el análisis de estabilidad que vamos a desarrollar, es suficiente saber que la *TDC* es elegida de forma que  $u_d(k)$  existe, satisface la ecuación (7.16) y está acotada tal como se expresa en la Definición 7.3.

Como ya ha sido mencionado, el significado físico de esta condición matemática de acotación corresponde a la existencia de límites en las acciones de control que pueden aplicarse a los procesos reales.

### 7.4 Una condición de estabilidad para procesos de naturaleza lineal y con inverso estable

Vamos a considerar la clase de procesos de naturaleza lineal y con inverso estable caracterizada por la Definición 7.2. La aplicación del control predictivo o adaptativo predictivo a estos procesos puede hacerse, como hemos visto en capítulos anteriores, mediante la estrategia básica presentada en el Capítulo 3 o la estrategia extendida considerada en el Capítulo 4.

La aplicación de la estrategia básica de acuerdo con el principio de control predictivo definido en las ecuaciones (2.34)–(2.35) o su equivalente

(2.36) implica el conocimiento del retardo del proceso  $d$  y, en el caso de control adaptativo predictivo, la no singularidad del parámetro  $\hat{\theta}_1(k)$ . Aunque en los sistemas adaptativos diseñados en los Capítulos 5 y 6 el problema de asegurar la no singularidad de  $\hat{\theta}_1(k)$  no ha sido considerado para simplificar la exposición, una extensión de estos sistemas considerada en [MSF84] permite garantizarla de manera formal. En cualquier caso, esta garantía es sólo de interés teórico ya que conocer el retardo  $d$  implica la no singularidad del correspondiente parámetro  $\theta_1(k)$ , y la singularidad de  $\hat{\theta}_1(k)$  calculado por el mecanismo adaptativo raramente ocurre en la práctica.

La aplicación de la estrategia extendida no requiere un conocimiento preciso del retardo  $d$  porque, como se ha visto en el Capítulo 4, el cálculo de la acción de control en el instante  $k$  se efectúa considerando su efecto sobre un intervalo de predicción  $[k, k + \lambda]$  y se asocia en este intervalo con la elección de la salida deseada proyectada ( $TDP$ ). La relación entre la acción de control y la  $TDP$  está determinada por el modelo predictivo o adaptativo predictivo. En este último, el mecanismo de adaptación puede asignar valores nulos o distintos de cero a los parámetros relacionados con la señal de control, de esta forma identificando el retardo efectivo. Para permitir este ajuste del retardo cuando sea necesario, el modelo adaptativo predictivo tendrá que ser dotado de una estructura paramétrica adecuada.

De acuerdo con los anteriores comentarios, tanto en procesos sin retardo puro como en procesos donde se conoce el retardo, el control adaptativo predictivo puede aplicarse usando tanto la estrategia básica como la extendida. Pero para procesos donde el retardo no es bien conocido o varía con el tiempo, es aconsejable usar la estrategia extendida. No obstante, existen diversas formas de aplicación de la estrategia extendida y un análisis de estabilidad riguroso para cada caso puede ser muy laborioso y complejo. En este sentido, y para que nuestro análisis sea didáctico, intuitivo y unificado para todas las posibles formas de aplicación de control predictivo o adaptativo predictivo y al mismo tiempo mantenga un rigor formal, nos basaremos en que el principio de control predictivo, tal como se ha definido en (2.34)–(2.35) o (2.36), se ejecuta implícitamente siempre cuando se aplica tanto la estrategia básica como la extendida. Además nuestro análisis se basará en una condición general que se establece en la siguiente hipótesis.

**Hipótesis 7.1:** *La salida deseada conductora  $TDC$  se mantiene siempre acotada, es decir,  $|y_d(k+d)| < \omega^2 < \infty$ ,  $\forall k \geq 0$ , y el retardo  $d$  es conocido.*

□

Los Apartados 7.5 y 7.6 presentarán resultados de estabilidad basados en esta hipótesis que serán válidos para cualquier forma de aplicación de las estrategias de control predictivo que la cumplan. En el caso más sencillo esta hipótesis puede satisfacerse simplemente mediante elección directa de la  $TDC$ . En otros casos la satisfacción de esta hipótesis puede ser intuitivamente clara y confirmada por la realidad, pero puede requerir una demostración compleja desde el punto de vista matemático y que queda fuera de los objetivos de este libro.

Los resultados de estabilidad se deducirán tanto para el caso ideal como para los casos reales introducidos en el Capítulo 2 y se basarán en demostrar la contradicción entre la existencia de una subsucesión  $\{k_s\}$ , tal como la definida en el Lema 7.2 que determina la no acotación de la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$ , y la Hipótesis 7.1, cuando se aplica tanto control predictivo como control adaptativo predictivo.

El análisis de estabilidad de los dos siguientes apartados es una extensión del publicado en [Mar84, MSF84, Mar86, CMSF88] y sirve de soporte teórico para el control adaptativo predictivo de procesos estables o inestables en la clase de procesos de naturaleza lineal con inverso estable.

## 7.5 Estabilidad para el control predictivo de procesos de naturaleza lineal y con inverso estable

Cuando el proceso es de naturaleza lineal y con inverso estable, si el modelo que describe el proceso se supone conocido, la aplicación del control predictivo descrito en los Capítulos 3 y 4 lleva a alcanzar los objetivos de control deseados. Sin embargo, en la práctica, usualmente no conoceremos a priori el modelo de forma exacta y, además, el proceso puede variar su dinámica a lo largo del tiempo. Por esta razón, en este apartado el análisis se centrará en el efecto que sobre la estabilidad y el objetivo de control puede tener la existencia de discrepancias entre el modelo predictivo y el proceso, es decir, la existencia de errores de modelación.

### 7.5.1 Resultados de estabilidad

Consideremos la ley de control predictivo definida en la forma

$$y_d(k+d) = \hat{\theta}^T \phi(k), \quad \forall k \geq 0, \quad (7.17)$$

donde  $\hat{\theta}$  es el vector de parámetros del modelo predictivo. Este es un caso particular del principio general de control predictivo (2.34) formulado en el Capítulo 2, considerando aquí que los parámetros del modelo adaptativo predictivo son fijos.

El siguiente teorema establece una condición de estabilidad para esta ley de control predictivo.

**Teorema 7.1:** *Sea un proceso de naturaleza lineal con inverso estable descrito por la ecuación (7.1) y controlado por la ley de control predictivo (7.17). Bajo la Hipótesis 7.1, la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  está acotada si existe un instante de tiempo  $k_f > 0$  para el que se cumple la siguiente condición:*

$$\alpha > \|\theta(k) - \hat{\theta}\|, \quad \forall k \geq k_f, \quad (7.18)$$

donde  $\alpha$  es el mayor de todos los posibles valores  $\alpha_1$  que cumplen la condición 1 del Lema 7.2.  $\square$

**Demostración:** De las ecuaciones del proceso (7.1) y (7.17), el error de control (o seguimiento)  $\epsilon(k)$  puede escribirse en la forma

$$\epsilon(k) = y(k) - y_d(k) = [\theta(k) - \hat{\theta}]^T \phi(k-d) + \Delta(k). \quad (7.19)$$

Usando la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwarz,

$$|\epsilon(k)| \leq \|\theta(k) - \hat{\theta}\| \|\phi(k-d)\| + |\Delta(k)|. \quad (7.20)$$

De acuerdo con la Hipótesis 7.1,

$$|\epsilon(k)| = |y(k) - y_d(k)| \geq |y(k)| - \omega^2. \quad (7.21)$$

De (7.20) y (7.21) se obtiene

$$|y(k)| \leq \|\theta(k) - \hat{\theta}\| \|\phi(k-d)\| + \omega_1^2, \quad (7.22)$$

con

$$\omega_1^2 = \omega^2 + \Delta_b,$$

donde  $\Delta_b$  la cota superior de  $|\Delta(k)|$  definida en el Capítulo 6:

$$\Delta_b \geq \max_{0 < k < \infty} |\Delta(k)| + \rho, \quad \text{siendo } \rho > 0. \quad (7.23)$$

Supongamos que la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  es no acotada. En tal caso existirá una subsucesión  $\{k_s\}$  de  $\{k\}$  que cumplirá las condiciones establecidas en el Lema 7.2. De la condición 1 de este lema y (7.22) podemos escribir

$$\alpha \|\phi(k_s - d)\| < \|\theta(k_s) - \hat{\theta}\| \|\phi(k_s - d)\| + \omega_2^2, \quad \forall k_s \geq 0, \quad (7.24)$$

donde

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 + \alpha_2.$$

Dividiendo ambos miembros de (7.24) por  $\|\phi(k_s - d)\|$ , tenemos

$$\alpha < \|\theta(k_s) - \hat{\theta}\| + \frac{\omega_2^2}{\|\phi(k_s - d)\|}, \quad \forall k_s \geq 0. \quad (7.25)$$

La condición 2 del Lema 7.2 establece que  $\|\phi(k_s - d)\| \rightarrow \infty$  cuando  $k_s \rightarrow \infty$ , lo que implica que el segundo término de la parte derecha de la desigualdad (7.25) tiende a 0 cuando  $k_s \rightarrow \infty$ . En consecuencia, (7.25) claramente contradice la condición dada en (7.18) y por tanto el Teorema 7.1 queda demostrado.  $\blacksquare$

**Corolario 7.1.1:** *Si se cumple la condición (7.18) del Teorema 7.1, la sucesión  $\{|\epsilon(k)|\}$  está también acotada en la forma*

$$|\epsilon(k)| < \alpha \|\phi(k-d)\| + \Delta_b, \quad \forall k \geq d. \quad \square$$

**Demostración:** La acotación del corolario se deduce directamente de (7.18), (7.20) y (7.23).  $\blacksquare$

**Corolario 7.1.2:** *Si el vector de parámetros del proceso es constante e igual al vector de parámetros del modelo predictivo, entonces*

1.  $\|\phi(k)\| < \Omega^2, \quad \forall k \geq 0,$
2.  $\epsilon(k) = \Delta(k), \quad \forall k \geq d.$   $\square$

**Demostración:** Claramente la condición (7.18) del Teorema 7.1 se cumple para el caso constante  $\theta(k) = \hat{\theta}$ , lo que demuestra la propiedad 1 de este corolario. La propiedad 2 se deduce directamente de la ecuación (7.19). ■

**Corolario 7.1.3:** *La trayectoria deseada conductora TDC es físicamente realizable para las condiciones consideradas en el Teorema 7.1.* □

**Demostración:** Restando la ecuación (7.16) de la segunda ecuación del proceso (7.1), se obtiene

$$y(k) - y_d(k) = \theta_1(k)[u(k-d) - u_d(k-d)], \quad \forall k \geq d. \quad (7.26)$$

De acuerdo con el Teorema 7.1, la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  está acotada y, por lo tanto, también lo están las sucesiones  $\{|y(k)|\}$  y  $\{|u(k)|\}$ . El parámetro  $\theta_1(k)$  es, para todo  $k$ , mayor en valor absoluto que una constante positiva. En consecuencia, de (7.26) se deduce directamente que  $\{|u_d(k-d)|\}$  debe estar también acotada, lo que demuestra este corolario. ■

### 7.5.2 Análisis de los resultados

El Teorema 7.1 ha demostrado que si la norma del error de modelación  $\|\theta(k) - \hat{\theta}\|$  es menor que cierto valor  $\alpha$ , que depende de la dinámica del proceso, entonces el sistema de control predictivo será estable y mantendrá acotados el vector de entradas y salidas y el error de control.

Si el modelo predictivo se define por un vector de parámetros  $\hat{\theta}_r$  de menor dimensión que el del proceso  $\theta(k)$ , los resultados del teorema siguen siendo válidos porque es suficiente considerar  $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_r, 0, \dots, 0]$ . De esta forma el Teorema 7.1 tiene en cuenta todos los casos reales, con y sin diferencia de estructuras y con parámetros variables con el tiempo.

La acotación del error de control disminuirá en la medida que el error de modelación sea menor, de acuerdo con (7.20). También, como demuestra el Corolario 7.1.2, si los parámetros del proceso fueran conocidos y usados en el modelo predictivo, el error de control sería igual a la señal de perturbación en los casos reales y cero en el caso ideal.

Finalmente el Corolario 7.1.3 ha demostrado que, en las condiciones

de estabilidad del Teorema 7.1, es suficiente elegir una trayectoria deseada conductora TDC acotada para asegurar que sea físicamente realizable.

## 7.6 Estabilidad para el control adaptativo predictivo de procesos de naturaleza lineal y con inverso estable

### 7.6.1 El papel de la adaptación en la estabilidad

Los resultados obtenidos en el apartado anterior son intuitivos y realistas. De hecho, intuitivamente, el resultado de estabilidad depende de lo bien que el modelo predictivo describa la dinámica del proceso, y esta estabilidad no puede asegurarse si el error de modelación supera un cierto umbral. La motivación básica para el control adaptativo predictivo surge de la necesidad de evitar que la estabilidad garantizada por el Teorema 7.1 pueda fallar debido a errores de modelación que pueden ocurrir o inicialmente o a lo largo de la operación del proceso.

Como una extensión natural de la ley de control predictivo (7.17), consideramos ahora la ley de control adaptativo predictivo

$$y_d(k+d) = \hat{\theta}(k)^T \phi(k), \quad \forall k \geq 0, \quad (7.27)$$

donde  $\hat{\theta}(k)$  es el vector de parámetros del modelo adaptativo predictivo.

El resultado de estabilidad para control predictivo dado en el Teorema 7.1 puede extenderse en el siguiente teorema al contexto de control adaptativo predictivo.

**Teorema 7.2:** *Si el proceso descrito por la ecuación (7.1) es de naturaleza lineal y con inverso estable, la aplicación de la ley de control adaptativo predictivo de (7.27) garantiza, bajo la Hipótesis 7.1, que la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  estará acotada si se cumple la siguiente condición:*

$$\alpha > \|\theta(k) - \hat{\theta}(k)\|, \quad \forall k \geq k_f > 0. \quad (7.28)$$

□

**Demostración:** La demostración de este teorema es equivalente a la del Teorema 7.1 y pueden deducirse corolarios similares. ■

Este teorema ilustra la forma en que la adaptación puede ayudar a garantizar la estabilidad y así alcanzar los objetivos de control deseados para un sistema de control adaptativo predictivo. De hecho, en tanto en cuanto el mecanismo de adaptación sea capaz de ajustar en tiempo real los parámetros  $\hat{\theta}(k)$  del modelo adaptativo predictivo, manteniendo siempre la condición (7.28), el vector de entradas/salidas  $\phi$  permanecerá acotado. Si recordamos ahora que los sistemas adaptativos diseñados y analizados en los Capítulos 5 y 6 han demostrado que satisfacen propiedades de convergencia que permiten alcanzar los objetivos de control cuando el vector  $\phi$  está acotado, parece natural dedicar nuestro esfuerzo a estudiar si dichos sistemas adaptativos son capaces de mantener la condición (7.28) a lo largo de su operación.

Sin embargo la condición (7.28) tiene un importante inconveniente: está formulada en términos del error de modelación, es decir la diferencia entre los parámetros del modelo adaptativo predictivo y los parámetros del proceso, los cuales son desconocidos a priori. Afortunadamente, podemos formular una condición general para el resultado de estabilidad del Teorema 7.2 en términos de los incrementos de los valores de los parámetros del modelo adaptativo predictivo y del error de estimación a posteriori. Esto nos permitirá combinar esta condición general con las propiedades de convergencia de los sistemas adaptativos diseñados en los Capítulos 5 y 6 y así completar el análisis de estabilidad global para el control adaptativo predictivo de procesos de naturaleza lineal y con inverso estable.

Dos ventajas fundamentales de formular la estabilidad global en términos del incremento paramétrico y del error de estimación a posteriori son las siguientes:

1. Esta formulación evita el problema de caracterizar la estabilidad en términos de los parámetros del proceso, que son desconocidos inicialmente. Encontraríamos este problema si basáramos la estabilidad únicamente en el error de modelación como hemos hecho en el caso del control predictivo en el apartado precedente. En ese caso, el análisis nos ha llevado a demostrar que existe una región de estabilidad definida por la desigualdad (7.18). Sin embargo, en el contexto

de las aplicaciones prácticas, no podemos conocer esta región inicialmente porque no conocemos los parámetros del proceso.

2. Esta formulación relaja la condición de estabilidad ya que no se requiere la convergencia de los parámetros del modelo adaptativo predictivo hacia los parámetros del proceso. Esto significa que el objetivo de control deseado podría alcanzarse a pesar de los errores de modelación. En efecto, es suficiente que el mecanismo de adaptación garantice la minimización del error de predicción, lo que es generalmente más fácil de conseguir que una auténtica identificación de los parámetros del proceso. Cuando este último problema tiene solución, puede ser necesaria la acción sobre el sistema de señales artificiales de excitación para obtener información de la dinámica del proceso. En muchos casos tales señales son inaceptables en escenarios industriales, y sus resultados suelen tener una validez limitada en el tiempo y a ciertas condiciones de operación.

El siguiente subapartado establece la condición general de estabilidad previamente mencionada. Los subapartados posteriores usarán esta condición para demostrar la estabilidad global del control adaptativo predictivo para los diferentes casos ideal y reales que venimos considerando en los capítulos precedentes.

### 7.6.2 Condición general de estabilidad

Recordemos el principio general de control adaptativo predictivo definido en el Capítulo 2 en la forma

$$y_d(k+d) = \hat{\theta}_r(k)^T \phi_r(k), \quad \forall k \geq 0. \quad (7.29)$$

donde  $\hat{\theta}_r(k)$  es el vector de parámetros del modelo adaptativo predictivo. El subíndice  $r$  denota que este vector de parámetros puede tener una dimensión menor que la del vector de parámetros del proceso  $\theta(k)$ , como ocurre cuando se trata el caso real con diferencia de estructura. Igualmente  $\phi_r(k)$  contiene una parte de las entradas y salidas más recientes incluidas en  $\phi(k)$ .

La condición general que garantiza la acotación del vector de entradas/salidas se formula en el siguiente teorema.

**Teorema 7.3:** Sea un proceso de naturaleza lineal y con inverso estable descrito por la ecuación (7.1) y controlado por la ley de control adaptativo predictivo (7.29). Bajo la Hipótesis 7.1, la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  está acotada si existe un instante de tiempo  $k_f > 0$  para el que se cumple la siguiente condición

$$\alpha > \|\hat{\theta}_r(k) - \hat{\theta}_r(k-d)\| + \frac{|e(k|k)|}{\max\{\|\phi(k-d)\|, c\}}, \quad \forall k \geq k_f, \quad (7.30)$$

donde  $\alpha$  es el mayor de los posibles valores  $\alpha_1$  considerados en el Lema 7.2 y  $c$  es una constante positiva arbitraria.  $\square$

**Demostración:** A partir de la ecuación del proceso (7.1) y de (7.29), el error de control (o seguimiento) puede escribirse en la siguiente forma:

$$\epsilon(k) = y(k) - y_d(k) = y(k) - \hat{\theta}_r(k-d)^T \phi_r(k-d), \quad (7.31)$$

donde  $\hat{\theta}_r(k-d)$  es el vector de parámetros del modelo adaptativo predictivo estimados por el mecanismo de adaptación en el instante  $k-d$ .

Como se ha definido en el Capítulo 2, el error de estimación a posteriori puede expresarse en la forma

$$e(k|k) = y(k) - \hat{y}(k|k) = y(k) - \hat{\theta}_r(k)^T \phi_r(k-d).$$

Restando esta ecuación de (7.31) se obtiene

$$\epsilon(k) = [\hat{\theta}_r(k) - \hat{\theta}_r(k-d)]^T \phi_r(k-d) + e(k|k). \quad (7.32)$$

Usando la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwarz resulta

$$|\epsilon(k)| \leq \|\hat{\theta}_r(k) - \hat{\theta}_r(k-d)\| \|\phi_r(k-d)\| + |e(k|k)| \quad (7.33)$$

y considerando que, por definición,  $\|\phi(k-d)\| \geq \|\phi_r(k-d)\|$ , podemos escribir

$$|\epsilon(k)| \leq \|\hat{\theta}_r(k) - \hat{\theta}_r(k-d)\| \|\phi(k-d)\| + |e(k|k)|. \quad (7.34)$$

Usando en (7.34) la igualdad (7.21), que también es válida en este caso, obtenemos

$$|y(k)| \leq \|\hat{\theta}_r(k) - \hat{\theta}_r(k-d)\| \|\phi(k-d)\| + |e(k|k)| + \omega^2. \quad (7.35)$$

Supongamos que la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  es no acotada. En tal caso existirá una subsucesión  $\{k_s\}$  de  $\{k\}$  cumpliendo las condiciones del Lema 7.2. De la condición 1 de dicho lema y (7.35) podemos escribir

$$\alpha \|\phi(k_s-d)\| < \|\hat{\theta}_r(k_s) - \hat{\theta}_r(k_s-d)\| \|\phi(k_s-d)\| + |e(k_s|k_s)| + \omega_1^2, \quad (7.36)$$

donde

$$\omega_1^2 = \omega^2 + \alpha_2 < +\infty.$$

Dividiendo ambos miembros de la desigualdad (7.36) por  $\|\phi(k_s-d)\|$ , tenemos

$$\alpha < \|\hat{\theta}_r(k_s) - \hat{\theta}_r(k_s-d)\| + \frac{|e(k_s|k_s)|}{\|\phi(k_s-d)\|} + \frac{\omega_1^2}{\|\phi(k_s-d)\|}. \quad (7.37)$$

Dado que  $\|\phi(k_s-d)\| \rightarrow \infty$  cuando  $k_s \rightarrow \infty$  (condición 2 del Lema 7.2), el último término del segundo miembro de (7.37) tiende a cero, y consecuentemente la desigualdad (7.37) contradice la condición (7.30) de este teorema, que queda así demostrado.  $\blacksquare$

Conviene remarcar que este resultado de estabilidad es general en el sentido de que puede aplicarse a cualquiera de los casos reales definidos en el Capítulo 2 (Apartado 2.2). De hecho el Teorema 7.3 permite cualquier clase de perturbación y ruido actuando sobre el proceso. También permite que el modelo adaptativo predictivo tenga una estructura reducida con respecto a la dinámica del proceso y no se restringe a procesos con parámetros constantes.

Como ya se indicado previamente, en los siguientes subapartados se revisitan los sistemas adaptativos diseñados en los Capítulos 5 y 6 enfatizando la forma en que satisfacen la condición de estabilidad (7.30) para el caso ideal y los diferentes casos reales que hemos venido considerando.

### 7.6.3 Caso ideal

En el caso ideal tratamos con un caso particular de la descripción general del proceso considerado en el Teorema 7.3. Se trata del definido por las hipótesis a) y c) del Apartado 2.2, según las cuales los parámetros del proceso son constantes y la señal de perturbación es nula. En consecuencia el proceso se describe ahora por la ecuación

$$y(k) = \theta^T \phi(k-d). \quad (7.38)$$

De igual forma, de acuerdo con la hipótesis b) para este caso, las ecuaciones del proceso y del modelo adaptativo predictivo tienen la misma dimensión, es decir  $\hat{\theta}_r(k) = \hat{\theta}(k)$ . Por tanto, la aplicación del control adaptativo predictivo satisface la ecuación

$$y_d(k+d) = \hat{\theta}(k)^T \phi(k). \quad (7.39)$$

En el Capítulo 5 (Apartado 5.6) se ha demostrado la existencia de un sistema adaptativo de acuerdo con la ecuación

$$\hat{\theta}(k) = e(k|k)\phi(k-d) + \hat{\theta}(k-1), \quad (7.40)$$

que satisface las siguientes propiedades en el caso ideal:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k|k) = 0, \quad (7.41)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)] = 0. \quad (7.42)$$

A partir de estas dos propiedades, puede formularse el resultado de estabilidad global asintótica para el caso ideal mediante el siguiente teorema.

**Teorema 7.4:** Si el proceso descrito por la ecuación (7.38) es de naturaleza lineal con inverso estable, la aplicación conjunta de la ley de control adaptativo predictivo (7.39) y el mecanismo de adaptación (7.40) garantiza las siguientes propiedades bajo la Hipótesis 7.1:

1.  $\|\phi(k)\| < \Omega < \infty, \quad \forall k \geq 0.$
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon(k) = 0.$

□

**Demostración:** El sistema adaptativo cumple las propiedades de convergencia (7.41) y (7.42). Esto indica claramente que satisface la condición (7.30) del Teorema 7.3. En virtud de dicho teorema, el control adaptativo predictivo (7.39) y el sistema adaptativo (7.40) producen conjuntamente una sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  acotada, lo que demuestra la propiedad 1 del presente teorema. La propiedad 2 se demuestra usando la propiedad 1 y las ecuaciones (7.41) y (7.42) en la ecuación (7.32). ■

#### 7.6.4 Caso real sin diferencia de estructura

De acuerdo con la hipótesis a) y c1) definidas en el Apartado 2.2, la dinámica del proceso se describe en este caso por la ecuación

$$y(k) = \theta^T \phi(k-d) + \Delta(k). \quad (7.43)$$

Por otro lado, de acuerdo con la hipótesis b) para este caso, la dimensión del modelo adaptativo predictivo será idéntica a la del proceso y, en consecuencia, el cálculo del control adaptativo predictivo puede ejecutarse también mediante la ecuación (7.39).

En el análisis realizado para este caso en el Capítulo 6 (Apartado 6.2) se ha demostrado la existencia de un sistema adaptativo con un mecanismo de adaptación definido por las ecuaciones (6.12)–(6.14) que satisface las siguientes propiedades de convergencia de acuerdo con el Corolario 6.3.1:

$$\exists k_f \text{ tal que } |e(k|k)| < 2\Delta_b, \quad \forall k \geq k_f > 0, \quad (7.44)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)] = 0. \quad (7.45)$$

A partir de estas propiedades, el resultado global de estabilidad se formula en el siguiente teorema.

**Teorema 7.5:** Si el proceso descrito por la ecuación (7.43) es de naturaleza lineal con inverso estable, la aplicación conjunta de la ley de control adaptativo predictivo (7.39) y el mecanismo de adaptación definido por (6.12)–(6.14) garantiza las siguientes propiedades bajo la Hipótesis 7.1:

1.  $\|\phi(k)\| < \Omega < \infty, \quad \forall k \geq 0.$
2.  $\exists k_f < \infty \text{ tal que } \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1), \quad \forall k \geq k_f > 0.$
3.  $|\epsilon(k)| = |e(k|k)| < 2\Delta_b, \quad \forall k \geq k_f + d.$

□

**Demostración:** Las propiedades de convergencia (7.44) y (7.45) del sistema adaptativo satisfacen la condición (7.30) del Teorema 7.3. Por tanto, la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  está acotada, lo que demuestra la propiedad 1 del presente teorema. La propiedad 2 se deduce del Lema 6.2, el cual demuestra

que, si la norma del vector  $\phi$  permanece acotada, el número de adaptaciones de los parámetros del modelo adaptativo predictivo es finito. Finalmente, la propiedad 3 se deduce de la propiedad 2 y de (7.32). ■

El resultado del Teorema 7.5 es claramente satisfactorio en el sentido de que demuestra la estabilidad global del control adaptativo predictivo en el caso considerado. Sin embargo, podemos preguntarnos si la cota que resulta para el error de control es suficientemente pequeña. Sabemos que  $\Delta_b$  es la cota para el error de control que resulta cuando los parámetros del proceso son conocidos y se usan en el modelo predictivo, como se ha demostrado en el Corolario 7.1.2. Por tanto  $\Delta_b$  es la mínima cota para el error de control. En este caso hemos demostrado la acotación del error con una cota de valor  $2\Delta_b$ . El lector interesado puede encontrar la definición de un sistema adaptativo más sofisticado en [Mar84, MSF84], no presentado aquí por razones de simplicidad, en el que la cota del error de control se aproxima al valor límite  $\Delta_b$ .

### 7.6.5 Caso real con diferencia en la estructura

Como se ha definido en el Apartado 2.2, las hipótesis del proceso ahora son como las del caso precedente. Por ello la dinámica del proceso se describe también con la ecuación (7.43). De acuerdo con la hipótesis b1) de este caso, el orden del modelo adaptativo predictivo puede ser menor que el de la ecuación del proceso. En consecuencia, el cálculo de la acción de control se realiza mediante la ecuación (7.29), que involucra los vectores de dimensión reducida  $\hat{\theta}_r(k)$  y  $\phi_r(k)$ .

El análisis desarrollado en el Apartado 6.3 para este caso ha demostrado la existencia de un sistema adaptativo con un mecanismo de adaptación definido por las ecuaciones (6.30)–(6.38) y (6.41)–(6.46) tal que, de acuerdo con los Lemas 6.6 y 6.7, existe un instante de tiempo  $k_f < +\infty$  para el que se cumplen las siguientes propiedades de convergencia:

$$\hat{\theta}_r(k) = \hat{\theta}_r(k-1), \quad \forall k \geq k_f > 0, \quad (7.46)$$

$$|e(k|k)| < 2\Delta_b^n \max \{ \|\phi(k-d)\|, c \}, \quad \forall k \geq k_f > 0, \quad (7.47)$$

donde  $\Delta_b^n$  se define en (6.46) como una cota superior para la sucesión de valores absolutos de la señal de perturbación normalizada  $\{|\Delta^n(k)|\}$  definida en (6.38). ■

A partir de estas propiedades, el resultado de estabilidad global se presenta en el siguiente teorema.

**Teorema 7.6:** Si el proceso descrito por la ecuación (7.43) es de naturaleza lineal y con inverso estable, la aplicación conjunta la ley de control adaptativo predictivo (7.29) y el mecanismo de adaptación definido por (6.30)–(6.38) y (6.41)–(6.46) garantiza las siguientes propiedades bajo la Hipótesis 5.1:

1.  $\|\phi(k)\| < \Omega < \infty, \quad \forall k \geq 0.$
2.  $\exists k_f < \infty$  tal que  $\hat{\theta}_r(k) = \hat{\theta}_r(k-1), \quad \forall k \geq k_f > 0.$
3.  $|e(k)| = |e(k|k)| < 2\Delta_b^n \max \{ \|\phi(k-d)\|, c \}, \quad \forall k \geq k_f + d.$

suponiendo que se satisface la condición

$$\alpha > 2\Delta_b^n, \quad (7.48)$$

donde  $\alpha$  es el mayor de los valores  $\alpha_1$  considerados en el Lema 7.2. □

**Demostración:** El Lema 6.7 ha demostrado la existencia de un instante  $k_f < \infty$  tal que

$$2\Delta_b^n > \frac{|e(k|k)|}{\max \{ \|\phi(k-d)\|, c \}}, \quad \forall k \geq k_f > 0, \quad (7.49)$$

y con la condición (7.48):

$$\alpha > 2\Delta_b^n > \frac{|e(k|k)|}{\max \{ \|\phi(k-d)\|, c \}}, \quad \forall k \geq k_f > 0. \quad (7.50)$$

La propiedad 2 de este teorema es un resultado directo del Lema 6.6. Con esta propiedad, la ecuación (7.50) implica que se cumple la condición (7.30) del Teorema 7.3, lo que demuestra la propiedad 1 del presente teorema. La propiedad 3 se deduce directamente utilizando la propiedad 2, la ecuación (7.32) y el Lema 6.7. ■

El resultado presentado en el Teorema 7.6 garantiza la estabilidad global del control adaptativo predictivo en el caso real con diferencia de estructura dentro de límites impuestos por los parámetros  $\alpha$  y  $\Delta_b^n$ . El valor de  $\alpha$  depende de la naturaleza dinámica del proceso, como establece el Lema 7.2. El parámetro  $\Delta_b^n$  es una cota superior de  $|\Delta^n(k)|$  y depende básicamente de la norma del vector de parámetros no modelados  $\|\theta_u\|$  como resulta de (6.38) y del valor absoluto de la señal de perturbación  $|\Delta(k)|$ . Reducir el orden del modelo adaptativo predictivo produce un aumento de  $\|\theta_u\|$  y por tanto un aumento de  $\Delta_b^n$ .

Observando (7.48) es claro que, si  $\alpha$  es grande, el margen para  $\Delta_b^n$  es también grande, lo que permite una reducción significativa del orden del modelo adaptativo predictivo. Si  $\alpha$  es pequeño, una ligera reducción del orden puede llevar a inestabilidad.

De la propiedad 3 del Teorema 7.6, puede deducirse que una reducción del orden del modelo aumenta la cota del error de control  $\epsilon(k)$  y conlleva un deterioro del rendimiento del sistema de control. Claramente, la reducción permitida del orden del modelo adaptativo predictivo está condicionada por la condición (7.48) y la cota admitida para el error de control  $\epsilon(k)$ . En el límite, cuando  $\|\theta_u\| = 0$ , se recupera la estabilidad global incondicional del caso real sin diferencia en la estructura entre el modelo del proceso y el modelo adaptativo predictivo, en el que el error de control está acotado por la propiedad 3 del Teorema 7.5. También, si la señal de perturbación es nula, se obtiene la estabilidad asintótica del caso ideal tal como se establece en la propiedad 2 del Teorema 7.4.

Finalmente, es interesante señalar que la condición de estabilidad (7.48) podría relajarse usando un sistema adaptativo más sofisticado que, por razones de simplicidad, no se ha incluido en este libro. El lector puede encontrar en [CMSF88] un sistema adaptativo para el que el término  $2\Delta_b^n$  en (7.48) se sustituye por  $\Delta_b^n + \delta$ , siendo  $\delta$  una constante positiva arbitrariamente pequeña, aproximándonos así a la condición de estabilidad más favorable en este caso.

### 7.6.6 Caso real con parámetros variables con el tiempo

En el análisis desarrollado en el Apartado 6.4 del capítulo anterior para el caso real con parámetros variables con el tiempo, el Lema 6.8 ha demostrado que el sistema adaptativo normalizado considerado asegura que, cuando se

ejecuta una adaptación del modelo AP:

$$\|\theta_r(k) - \hat{\theta}_r(k-1)\| > \|\theta_r(k) - \hat{\theta}_r(k)\|,$$

donde  $\theta_r(k)$  es el vector de parámetros del proceso reducido y  $\hat{\theta}_r(k-1)$  y  $\hat{\theta}_r(k)$  son los vectores de parámetros del modelo adaptativo predictivo antes y después de efectuar la adaptación respectivamente. Así los parámetros estimados tienden a seguir la evolución de los parámetros del proceso. La adaptación se ejecuta siempre que el error de estimación a priori sea superior a cierta función acotada de la señal de perturbación.

Aunque tomando formas diferentes, los Teoremas 7.2 y 7.3 establecen las condiciones para la estabilidad global del control adaptativo predictivo en el caso real con parámetros variables en el tiempo. El Teorema 7.2 garantiza la estabilidad global cuando la norma del error de identificación es menor que un cierto valor, el cual depende de la dinámica del proceso. El Teorema 7.3 establece las condiciones de estabilidad basadas en la acotación del error de estimación a posteriori y del incremento en los parámetros del modelo adaptativo predictivo. Ambos teoremas admiten una variación permanente en dichos parámetros y la estabilidad queda garantizada en tanto en cuanto se cumplan las desigualdades (7.28) y (7.30). En ambos casos esto dependerá básicamente del tipo de variación que experimenten los parámetros del proceso. Como se ha discutido previamente en el Apartado 6.4, los cambios paramétricos observados en los procesos industriales se deben generalmente a la acción de perturbaciones o a cambios en los puntos de operación, lo que puede producir cambios rápidos en los parámetros, o a variaciones continuas suaves en las condiciones de operación, lo que puede producir lentos pero permanentes cambios en los parámetros. En cualquier caso, parece razonable esperar que la operación del sistema adaptativo será capaz de mantener las anteriores condiciones de estabilidad en estas circunstancias.

Asimismo, como ya se ha considerado en el Apartado 6.4, la eficiencia de la adaptación fortalecerá la robustez de la estrategia de control predictivo y, generalmente, ayudará en la estabilización del comportamiento dinámico del proceso. En este caso, los resultados de convergencia obtenidos para el caso real con diferencia de estructura son también válidos. Como sabemos, este último incluye como casos particulares el caso real sin diferencia en la estructura y el caso ideal con sus correspondientes resultados de estabilidad.

## 7.7 Resultados de estabilidad para procesos de naturaleza lineal y estable

### 7.7.1 Una condición general de estabilidad

En este apartado consideraremos la clase de procesos de naturaleza lineal y estable que se caracteriza por la Definición 7.1, independientemente de que el inverso del proceso sea estable o inestable. El caso en que el inverso es inestable hace que la clase considerada en este apartado no sea un subconjunto de la clase considerada en los apartados precedentes. Cuando el inverso del proceso es inestable la propiedad establecida en el Lema 7.2 no es cierta y, en consecuencia, los resultados de estabilidad obtenidos en los apartados anteriores no son válidos.

La clase de procesos tratados ahora tienen en común la propiedad establecida en el Lema 7.1, el cual se utilizará en este apartado para deducir los resultados de estabilidad.

Los resultados de estabilidad de los apartados anteriores siguen siendo válidos para los procesos considerados aquí que tengan su inverso estable. Para dichos procesos el control predictivo o adaptativo predictivo puede aplicarse tanto mediante la estrategia básica como la extendida. Sin embargo, para procesos estables con inverso inestable, como ya se ha analizado en los Capítulos 3 y 4, la aplicación de la estrategia básica no es posible ya que puede generar acciones de control no acotadas.

Existen distintas formas de aplicación de la estrategia extendida como se ha considerado en el apartado anterior y analizado en el Capítulo 4. Plantear un análisis de estabilidad riguroso para cada caso, tanto en control predictivo como adaptativo predictivo, es entrar en un área compleja y abierta para la investigación teórica. En consecuencia, en este apartado, siguiendo una línea didáctica, intuitiva y unificada, al mismo tiempo que rigurosa, como la seguida en el Apartado 7.4, basaremos nuestro análisis en el hecho de que el principio de control predictivo tal como se ha definido en (2.34)–(2.35) o (2.36) se ejecuta implícitamente siempre, tanto cuando se aplica la estrategia básica como la extendida, y en la condición general que se establece en la siguiente hipótesis.

**Hipótesis 7.2:** La salida deseada conductora  $y_d(k+d)$  es físicamente realizable,  $\forall k \geq 0$ , y el tiempo de retardo  $d$  es conocido.  $\square$

A partir de la teoría desarrollada en los Capítulos 4–6, parece razonable que, mediante la aplicación de la estrategia extendida de control predictivo y con una elección apropiada del horizonte de predicción y de la estructura del modelo adaptativo predictivo, la Hipótesis 7.2 debería cumplirse para procesos de naturaleza lineal y estable, lo que se confirma de forma empírica en las aplicaciones prácticas.

Los apartados 7.7.2 y 7.7.3 deducen resultados generales de estabilidad para esta clase de procesos que serán válidos para cualquier forma de aplicación de la estrategia extendida de control predictivo que satisfaga la Hipótesis 7.2.

### 7.7.2 Control predictivo

El resultado de estabilidad en el contexto del control predictivo es análogo al obtenido en el Apartado 7.5 y se formula en el siguiente teorema.

**Teorema 7.7:** Sea un proceso de naturaleza lineal y estable descrito por una ecuación de la forma (7.1) y controlado por la ley de control predictivo (7.17). Bajo la Hipótesis 7.2, la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  está acotada si existe un instante de tiempo  $k_f > 0$  para el que se cumple la siguiente condición:

$$\gamma > \|\theta(k) - \hat{\theta}\|, \quad \forall k \geq k_f, \quad (7.51)$$

donde

$$\gamma = \theta_{1m} \gamma_o,$$

siendo  $\gamma_o$  el mayor de todos los posibles valores  $\gamma_1$  que satisfacen la condición 1 del Lema 7.1 y  $0 < \theta_{1m} \leq |\theta_1(k)|$ , para todo  $k \geq 0$ .  $\square$

**Demostración:** Como en el Teorema 7.1, a partir de la ecuación del proceso (7.1) y la ley de control (7.17), obtenemos la ecuación (7.19):

$$\epsilon(k) = y(k) - y_d(k) = [\theta(k) - \hat{\theta}]^T \phi(k-d) + \Delta(k).$$

Como en la demostración del Corolario 7.1.3, restando la ecuación (7.16) de la segunda ecuación (7.1), obtenemos la ecuación (7.26):

$$\epsilon(k) = y(k) - y_d(k) = \theta_1(k)[u(k-d) - u_d(k-d)], \quad \forall k \geq d.$$

De las dos anteriores ecuaciones obtenemos

$$\theta_1(k)u(k-d) = [\theta(k) - \hat{\theta}]^T \phi(k-d) + \Delta(k) + \theta_1(k)u_d(k-d). \quad (7.52)$$

Usando la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwarz:

$$\theta_{1m}|u(k-d)| \leq \|\theta(k) - \hat{\theta}\| \|\phi(k-d)\| + |\Delta(k)| + |\theta_1(k)u_d(k-d)|. \quad (7.53)$$

Supongamos que la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  es no acotada. En tal caso, usando la propiedad 1 del Lema 7.1 y la ecuación (7.53), existirá una subsucesión  $\{k_s\}$  de  $\{k\}$  para la que podemos escribir

$$\gamma \|\phi(k_s-d)\| < \|\theta(k_s) - \hat{\theta}\| \|\phi(k_s-d)\| + |\Delta(k_s)| + |\theta_1(k_s)u_d(k_s-d)| + \theta_{1m}\gamma_2, \quad (7.54)$$

donde  $\gamma = \gamma_o \theta_{1m}$ .

Dividiendo ambos miembros de la desigualdad (7.54) por  $\|\phi(k_s-d)\|$ :

$$\gamma < \|\theta(k_s) - \hat{\theta}\| + \frac{|\Delta(k_s)| + |\theta_1(k_s)u_d(k_s-d)| + \theta_{1m}\gamma_2}{\|\phi(k_s-d)\|}. \quad (7.55)$$

De acuerdo con la propiedad 2 del Lema 7.1,  $\|\phi(k_s-d)\| \rightarrow \infty$  cuando  $k_s \rightarrow \infty$ . Por otro lado, la sucesión  $\{|u_d(k-d)|\}$  está acotada debido a la realizabilidad física de la trayectoria deseada conductora *TDC* (Definición 7.3). En consecuencia, el segundo término del segundo miembro de (7.55) tiende a 0 cuando  $k_s \rightarrow \infty$ . En consecuencia, (7.55) contradice la condición (7.51) y por tanto el Teorema 7.7 queda demostrado. ■

A partir de este teorema, corolarios semejantes a los 7.1.1 y 7.1.2 del Teorema 7.1 pueden deducirse también en este caso. A continuación se exponen sin demostración.

**Corolario 7.7.1:** Si se cumple la condición (7.51) del Teorema 7.7, entonces la sucesión  $\{|\epsilon(k)|\}$  está también acotada en la forma

$$|\epsilon(k)| < \gamma \|\phi(k-d)\| + \Delta_b, \quad \forall k \geq d.$$

□

**Corolario 7.7.2:** Si el vector de parámetros del proceso es constante e igual al vector de parámetros del modelo predictivo, entonces

1.  $\|\phi(k)\| < \Omega^2, \quad \forall k \geq 0.$
2.  $\epsilon(k) = \Delta(k), \quad \forall k \geq 0.$  □

Además se deduce también el siguiente corolario.

**Corolario 7.7.3:** Bajo las condiciones de estabilidad dadas en el Teorema 7.7, la trayectoria deseada conductora *TDC* es acotada. □

**Demostración:** A partir del Teorema 7.7, la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  está acotada, lo que implica que las sucesiones  $\{|y(k)|\}$  y  $\{|u(k)|\}$  están acotadas. La sucesión  $\{|u_d(k)|\}$  está acotada porque la *TDC* es físicamente realizable. El parámetro  $\theta_1(k)$  es también acotado. Por tanto la acotación de  $\{|y_d(k)|\}$  se deduce directamente de (7.26), demostrándose así este corolario. ■

Pueden hacerse comentarios sobre el resultado del Teorema 7.7 y sus corolarios similares a los escritos en el Apartado 7.5.2 en relación al Teorema 7.1, exceptuando en este caso el resultado del Corolario 7.7.3, que demuestra que la realizabilidad física de la *TDC* implica su acotación.

### 7.7.3 Control adaptativo predictivo

La motivación y los objetivos para el control adaptativo predictivo son, en este caso, similares a los considerados en el Apartado 7.6.1 para el caso de procesos de naturaleza lineal y con inverso estable. Igualmente, el resultado de estabilidad para control predictivo dado en el Teorema 7.7 puede traducirse directamente para control adaptativo predictivo en el siguiente teorema.

**Teorema 7.8:** Si el proceso descrito por la ecuación (7.1) es de naturaleza lineal y estable, la aplicación de la ley de control adaptativo predictivo (7.27) garantiza, bajo la Hipótesis 7.2, que la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  estará acotada si se satisface la siguiente condición:

$$\gamma > \|\theta(k) - \hat{\theta}(k)\|, \quad \forall k \geq k_f > 0. \quad (7.56)$$

□

**Demostración:** La demostración de este teorema es equivalente a la del Teorema 7.7 y pueden deducirse corolarios similares. ■

El principal resultado de estabilidad en el contexto del control adaptativo predictivo es también análogo al obtenido en el Apartado 7.6 y se establece en el siguiente teorema.

**Teorema 7.9:** *Sea un proceso de naturaleza lineal y estable descrito por una ecuación de la forma (7.1) y controlado por la ley de control adaptativo predictivo (7.29). Bajo la Hipótesis 7.2, la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  estará acotada si existe un instante de tiempo  $k_f > 0$  para el que se cumple la siguiente condición:*

$$\gamma > \|\hat{\theta}_r(k) - \hat{\theta}_r(k-d)\| + \frac{|e(k|k)|}{\max\{\|\phi(k-d)\|, c\}}, \quad \forall k \geq k_f, \quad (7.57)$$

donde  $c$  es una constante positiva arbitraria. □

**Demostración:** Siguiendo argumentos similares a los de la demostración del Teorema 7.3, podemos deducir la ecuación (7.32):

$$\epsilon(k) = [\hat{\theta}_r(k) - \hat{\theta}_r(k-d)]^T \phi_r(k-d) + e(k|k).$$

Recordemos la ecuación (7.26):

$$\epsilon(k) = \theta_1(k)[u(k-d) - u_d(k-d)], \quad \forall k \geq d.$$

A partir de estas dos ecuaciones obtenemos

$$\theta_1(k)u(k-d) = [\hat{\theta}_r(k) - \hat{\theta}_r(k-d)]^T \phi_r(k-d) + e(k|k) + \theta_1(k)u_d(k-d). \quad (7.58)$$

Usando la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwarz en (7.58) y usando el hecho de que  $\|\phi(k-d)\| \geq \|\phi_r(k-d)\|$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \theta_{1m}|u(k-d)| &\leq \|\hat{\theta}_r(k) - \hat{\theta}_r(k-d)\| \|\phi(k-d)\| + |e(k|k)| \\ &\quad + |\theta_1(k)u_d(k-d)|. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Supongamos que la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  es no acotada. En tal caso, usando la propiedad 1 del Lema 7.1 y la ecuación (7.59), podemos escribir

$$\begin{aligned} \gamma \|\phi(k_s-d)\| &< \|\hat{\theta}_r(k_s) - \hat{\theta}_r(k_s-d)\| \|\phi(k_s-d)\| \\ &\quad + |e(k_s|k_s)| + |\theta_1(k_s)u_d(k_s-d)| + \theta_{1m}\gamma_2, \end{aligned} \quad (7.60)$$

donde  $\gamma = \gamma_0\theta_{1m}$ .

Dividiendo ambos lados de (7.60) por  $\|\phi(k_s-d)\|$ , se obtiene

$$\gamma < \|\hat{\theta}_r(k_s) - \hat{\theta}_r(k_s-d)\| + \frac{|e(k_s|k_s)|}{\|\phi(k_s-d)\|} + \frac{|\theta_1(k_s)u_d(k_s-d)| + \theta_{1m}\gamma_2}{\|\phi(k_s-d)\|}. \quad (7.61)$$

Dado que, de acuerdo con la propiedad 2 del Lema 7.1,  $\|\phi(k_s-d)\| \rightarrow \infty$  cuando  $k_s \rightarrow \infty$ , el último término del segundo miembro de (7.61) tiende a cero porque la sucesión  $\{u_d(k_s-d)\}$  es acotada debido a la realizabilidad física de la TDC. En consecuencia, la desigualdad (7.61) contradice la condición (7.57) de este teorema, que queda así demostrado. ■

A partir de este teorema puede desarrollarse un análisis de estabilidad para el caso ideal y los diferentes casos reales en términos completamente análogos a los seguidos a partir del Teorema 7.3 para procesos de naturaleza lineal y con inverso estable, pero en este caso para procesos de naturaleza lineal y estable basados en la Hipótesis 7.2.

## 7.8 Procesos inestables y con inverso inestable

### 7.8.1 Una condición general de estabilidad

Como se ha indicado en la introducción de este capítulo, las clases de procesos de naturaleza lineal y con inverso estable y de naturaleza lineal y estable incluyen casi todos los procesos industriales. Sin embargo, con la intención de completar el material teórico presentado en este capítulo, en este apartado seguiremos las mismas líneas seguidas en los apartados anteriores para analizar la estabilidad del control adaptativo predictivo aplicado a la clase de procesos inestables cuyo inverso es también inestable. Los resultados de estabilidad se presentarán tanto en el contexto del control predictivo como del control adaptativo predictivo. Estos resultados se basarán en la naturaleza dinámica del proceso y en la ejecución implícita del principio de control predictivo en la forma (2.34)-(2.35) o (2.36), así como en la siguiente hipótesis.

**Hipótesis 7.3:** La salida deseada conductora  $y_d(k+d)$  es físicamente realizable y acotada para todo  $k \geq 0$  y el tiempo de retardo  $d$  es conocido.  $\square$

Como ya se ha mencionado en la introducción, las verificaciones teóricas de esta hipótesis para las diversas formas en las que la estrategia extendida puede ser aplicada son problemas abiertos y quedan fuera del alcance de este libro.

### 7.8.2 Control predictivo

El resultado de estabilidad en este caso se establece en el siguiente teorema.

**Teorema 7.10:** Sea un proceso inestable con inverso inestable descrito por una ecuación de la forma (7.1) y controlado por la ley de control (7.17). Bajo la Hipótesis 7.3, la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  estará acotada si existe un instante de tiempo  $k_f > 0$  para el que se cumple la condición

$$\min\{\alpha, \gamma\} > \|\theta(k) - \hat{\theta}\|, \quad \forall k \geq k_f, \quad (7.62)$$

donde  $\alpha$  y  $\gamma$  son constantes positivas análogas a las definidas en los Teoremas 7.1 y 7.7 respectivamente.  $\square$

**Demostración:** Supongamos que  $\{\|\phi(k)\|\}$  es no acotada. En tal caso, existirá una de las dos sucesiones  $\{k_{s1}\}$  o  $\{k_{s2}\}$  que cumplen las condiciones 1 y 2 del Lema 7.3 respectivamente. La condición 1 está relacionada con el Lema 7.1 y establece que  $\|\phi(k_{s1})\| \rightarrow \infty$  cuando  $k_{s1} \rightarrow \infty$ . La condición 2 está relacionada con el Lema 7.2 y establece que  $\|\phi(k_{s2} - d)\| \rightarrow \infty$  cuando  $k_{s2} \rightarrow \infty$ .

Teniendo en cuenta que la TDC es físicamente realizable, podemos usar argumentos similares a los usados en la demostración del Teorema 7.7 para demostrar la contradicción entre la existencia de una sucesión de la forma  $\{k_{s1}\}$  y la condición (7.62). Teniendo en cuenta también que la TDC es acotada, podemos seguir argumentos similares a los del Teorema 7.1 para demostrar la contradicción entre la existencia de  $\{k_{s2}\}$  y la condición (7.62). Estas dos contradicciones concluyen la demostración del presente teorema.  $\blacksquare$

A partir de este teorema pueden deducirse corolarios como los 7.1.1 y 7.1.2 asociados al Teorema 7.1. De igual forma podemos extraer aquí comentarios similares a los del Apartado 7.5.2 para los resultados del Teorema 7.1 y sus corolarios, excepto en que en este caso la TDC se supone acotada y físicamente realizable según la Hipótesis 7.3.

### 7.8.3 Control adaptativo predictivo

Del Teorema 7.10 podemos formular el siguiente teorema para el contexto adaptativo predictivo.

**Teorema 7.11:** Sea un proceso inestable con inverso inestable descrito por una ecuación de la forma (7.1) y controlado por la ley de control (7.27). Bajo la Hipótesis 7.3, la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  estará acotada si existe un instante de tiempo  $k_f > 0$  para el que se cumple la condición

$$\min\{\alpha, \gamma\} > \|\theta(k) - \hat{\theta}(k)\|, \quad \forall k \geq k_f, \quad (7.63)$$

donde  $\alpha$  y  $\gamma$  son constantes positivas análogas a las definidas en los Teoremas 7.1 y 7.7 respectivamente.  $\square$

**Demostración:** La demostración de este teorema es idéntica a la del Teorema 7.10 y pueden deducirse corolarios similares.  $\blacksquare$

El resultado principal de estabilidad en el contexto del control adaptativo predictivo se presenta en la siguiente teorema.

**Teorema 7.12:** Sea un proceso inestable con inverso inestable descrito por una ecuación de la forma (7.1) y controlado por la ley de control adaptativo predictivo (7.29). Bajo la Hipótesis 7.3, la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  está acotada si existe un instante de tiempo  $k_f > 0$  para el que se satisface la condición

$$\min\{\alpha, \gamma\} > \|\hat{\theta}_r(k) - \hat{\theta}_r(k-d)\| + \frac{|e(k|k)|}{\max\{\|\phi(k-d)\|, c\}}, \quad \forall k \geq k_f, \quad (7.64)$$

donde  $c$  es una constante positiva arbitraria.  $\square$

**Demostración:** Como se ha considerado en la demostración del Teorema 7.10, si la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  es no acotada, puede existir una de las sucesiones  $\{k_{s1}\}$  o  $\{k_{s2}\}$ . En el caso de que exista  $\{k_{s1}\}$ , usando la hipótesis de que la *TDC* es físicamente realizable, argumentos similares a los dados en la demostración del Teorema 7.9 demuestran que la condición (7.64) no puede cumplirse. Para el caso de la existencia de  $\{k_{s2}\}$ , considerando que la *TDC* es acotada, vemos que argumentos similares a los del Teorema 7.3 también demuestran que la condición (7.64) no puede cumplirse. Ambos casos establecen la contradicción entre la no acotación de  $\{\|\phi(k)\|\}$  y la condición (7.64), lo que sirve para demostrar el presente teorema. ■

A partir de este teorema puede desarrollarse un análisis de estabilidad para el caso ideal y los diferentes casos reales en términos análogos al desarrollado en el Apartado 7.6 para el Teorema 7.3 para procesos de naturaleza lineal y con inverso estable, pero en este caso para procesos inestables con inverso inestable y a partir de la Hipótesis 7.3.

## 7.9 Conclusiones

Los resultados presentados en este capítulo forman un cuerpo teórico de estabilidad en el contexto del control predictivo y adaptativo predictivo. La formulación ha partido de la naturaleza dinámica de los procesos, que se han agrupado en tres clases, a saber: (1) procesos de naturaleza lineal y con inverso estable; (2) procesos de naturaleza lineal y estable; y (3) procesos inestables con inverso inestable. Para cada una de estas clases, se ha establecido una condición de estabilidad basada en las características de acotación y/o realizabilidad física de la trayectoria deseada conductora *TDC*. En la primera clase, donde el inverso del proceso es estable, la correspondiente condición puede ser satisfecha usando tanto la estrategia básica como la estrategia de control predictivo. En la segunda clase, donde el inverso del proceso puede ser inestable, la satisfacción de la condición requiere el uso de la estrategia extendida. Esta condición ha unificado el análisis realizado para cualquiera de las clases de procesos y ha dado validez general a los resultados de estabilidad obtenidos, independientemente de la estrategia de control específica utilizada.

El análisis ha ido progresando desde la formulación más sencilla (caso

ideal) hasta una formulación definida por hipótesis que se ajustan con más realismo a un entorno industrial. En primer lugar, este capítulo ha demostrado que la estabilidad del control predictivo depende de una medida del error de modelación que se ha formulado matemáticamente en relación con la dinámica del proceso. Este resultado tiene una interpretación intuitiva y era razonablemente esperable. La motivación básica para el control adaptativo predictivo ha sido superar el problema de estabilidad debido al error de modelación. En el caso ideal se ha demostrado, como era de esperar, la estabilidad asintótica que garantiza que la salida del proceso es capaz de seguir la salida deseada con un vector de entradas/salidas acotado.

Como también cabía esperar, la estabilidad asintótica no ha sido posible en los casos reales debido a la existencia del vector de perturbación, desconocido e imprevisible. No obstante, cuando no hay diferencia entre la estructura del modelo AP y el proceso, el objetivo es que el error de control (o seguimiento) se aproxime al vector de perturbación tanto como sea posible. Los resultados de este capítulo han demostrado la estabilidad para este caso en términos de la acotación del vector de entradas/salidas y del error de control, aproximándose este último a la cota conocida de la señal de perturbación.

Cuando hay diferencia de estructuras, parece lógico que la estabilidad no pueda garantizarse siempre y que deba existir un límite para la estabilidad dependiendo de la reducción del orden del modelo AP. La teoría presentada en este capítulo ha desarrollado la formulación matemática para este límite y su relación con la dinámica del proceso. Cuando la reducción del orden del modelo es compatible con este límite, el control adaptativo predictivo garantiza el resultado de estabilidad y el error de control puede minimizarse mediante una elección adecuada del mecanismo de adaptación.

En el caso en que los parámetros sean variables con el tiempo, la teoría desarrollada aquí ha establecido una condición de estabilidad que, admitiendo la forma habitual de variación de los parámetros en el contexto industrial, y especialmente en los dominios de operación que hemos denominado adaptativos predictivos (AP) en la formulación ADEX, debería satisfacerse razonablemente por los mecanismos de adaptación diseñados en los Capítulos 5 y 6. Estos mecanismos garantizan un seguimiento de los parámetros del proceso por parte de los parámetros del modelo AP hasta que se alcanza la estabilidad, lo que la práctica confirma empíricamente de forma continuada.

Se han indicado algunas áreas donde el análisis teórico no está cerrado y pueden ser objeto de investigación. Pero es importante señalar que los resultados de la teoría presentada en este capítulo tienen claras implicaciones en la aplicación práctica de control adaptativo predictivo, particularmente en los dominios AP, dentro de la solución ADEX, que por su propia definición pueden validar las hipótesis teóricas de partida y facilitar la verificación de las condiciones de estabilidad, garantizando en consecuencia la robustez, la estabilidad y el rendimiento deseados del sistema de control en sus aplicaciones industriales y otras.

En resumen, los resultados presentados en este capítulo proporcionan un soporte teórico para una aplicación sistemática y unificada del control predictivo y adaptativo predictivo por sí mismos y, particularmente, en el contexto más amplio del control adaptativo predictivo experto (ADEX).

## E IV

---

# Ejercicios de la Unidad Didáctica IV

### E4.1 Naturaleza de los ejercicios

Los ejercicios que aquí se proponen tienen como objetivo que el alumno utilice y ejercite los conocimientos relativos a la convergencia y estabilidad de los sistemas de control adaptativo predictivo, expuestos tanto en esta Unidad Didáctica IV como en las anteriores II y III. En la formulación de los ejercicios no se hará, en general, una descripción formal de las ecuaciones, expresiones, variables y notaciones que aparezcan o que sean necesarias para su resolución, teniendo en cuenta que deben ser ya conocidas para el alumno y que dichas descripciones están contenidas en el texto de las correspondientes Unidades Didácticas.

En primer lugar, los ejercicios consistirán en realizar demostraciones de estabilidad o deducir condiciones de convergencia en el contexto de los sistemas adaptativos. Posteriormente, se pondrán ejercicios de la misma naturaleza en el contexto de los sistemas de control predictivo y adaptativo predictivo.

## E4.2 Convergencia y estabilidad de sistemas adaptativos

**Ejercicio 4.1.-** Sea un sistema adaptativo operando en el caso ideal, donde el proceso y el modelo adaptativo son descritos respectivamente por las ecuaciones

$$\begin{aligned} y(k) &= \theta^T \phi(k-d), \\ \hat{y}(k|k) &= \hat{\theta}(k)^T \phi(k-d), \end{aligned}$$

y el mecanismo de adaptación responde a la ecuación

$$\hat{\theta}(k) = \sum_{h=1}^k e(h|h) B \phi(h-d) + \hat{\theta}(0).$$

Demostrar que se cumple

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad s(k_t) &= \sum_{k=1}^{k_t} e(k|k)^2 \leq \delta^2 < +\infty, \quad \forall k_t > 0; \\ \text{b)} \quad \delta^2 &= \frac{1}{2} [\theta - \hat{\theta}(0)]^T B^{-1} [\theta - \hat{\theta}(0)] = \frac{1}{2} \tilde{\theta}(0)^T B^{-1} \tilde{\theta}(0). \end{aligned}$$

En la demostración debe de utilizarse la expresión

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k_t} \left[ \sum_{h=1}^k z(h) - c \right]^T B^{-1} z(k) &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^{k_t} z(k) - c \right]^T B^{-1} \left[ \sum_{k=1}^{k_t} z(k) - c \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_t} z(k)^T B^{-1} z(k) - \frac{1}{2} c^T B^{-1} c \geq -\frac{1}{2} c^T B^{-1} c, \end{aligned}$$

que es válida para cualquier vector  $z$  variable con el tiempo y cualquier vector  $c$  constante.  $\square$

**Ejercicio 4.2.-** Sea el sistema adaptativo del Ejercicio 4.1, donde el mecanismo de adaptación está definido por

$$\hat{\theta}(k) = e(k|k) \phi(k-d) + \hat{\theta}(k-1).$$

Conociendo que el error de estimación a posteriori  $e(k|k) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , demostrar que el incremento paramétrico  $\Delta \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)$  también tiende a 0 cuando  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Ejercicio 4.3.-** Sea un sistema adaptativo donde el proceso está descrito por la ecuación

$$y(k) = \theta^T \phi(k-d) + \Delta(k)$$

y el modelo adaptativo calcula las estimaciones a priori y a posteriori de la salida del proceso mediante

$$\begin{aligned} \hat{y}(k|k-1) &= \hat{\theta}(k-1)^T \phi(k-d), \\ \hat{y}(k|k) &= \hat{\theta}(k)^T \phi(k-d). \end{aligned}$$

Deducir la relación que permite calcular el error de estimación a posteriori  $e(k|k)$  a partir del error de estimación a priori  $e(k|k-1)$  si el mecanismo de adaptación está definido por

$$\hat{\theta}(k) = e(k|k) \phi(k-d) + \hat{\theta}(k-1). \quad \square$$

**Ejercicio 4.4.-** Sea el sistema adaptativo del Ejercicio 4.3, donde el mecanismo de adaptación está definido por

$$\hat{\theta}(k) = e(k|k) \phi(k-d) + \hat{\theta}(k-1).$$

Demostrar que la norma del error de identificación paramétrica  $\tilde{\theta}(k) = \theta - \hat{\theta}(k)$  se reducirá para todo instante  $k$  en el que se cumpla la condición

$$|e(k|k)| > \frac{2|\Delta(k)|}{2 + \phi(k-d)^T \phi(k-d)}. \quad \square$$

**Ejercicio 4.5.-** Sea el sistema adaptativo del Ejercicio 4.3, donde el mecanismo de adaptación está definido por

$$\hat{\theta}(k) = \psi(k) e(k|k) \phi(k-d) + \hat{\theta}(k-1),$$

y donde

a)  $\psi(k) = 1$  si se cumple la condición

$$|e(k|k)| [2 + \phi(k-d)^T \phi(k-d)] \geq 2\Delta_b.$$

b)  $\psi(k) = 0$  si no se cumple la condición del punto anterior.

c)  $\|\phi(k-d)\|^2 < \Omega^2 < \infty, \quad \forall k > 0.$

$$d) \Delta_b \geq \max_{0 < k < \infty} |\Delta(k)| + \rho, \text{ siendo } \rho > 0.$$

Demostrar que el número de adaptaciones ( $\psi(k) = 1$ ) será finito.  $\square$

**Ejercicio 4.6.-** Sea el sistema adaptativo del ejercicio anterior. Demostrar que existe un  $k_f > 0$  tal que

$$|e(k|k)| < 2\Delta_b, \quad \forall k \geq k_f > 0.$$

**Ejercicio 4.7.-** Sea el sistema adaptativo del Ejercicio 4.5, con la diferencia de que no se garantiza la hipótesis c) y existe una sucesión  $\{h\}$  caracterizada por  $\psi(h) = 1$ . Demostrar que  $e(h|h) \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Ejercicio 4.8.-** Sea el sistema adaptativo del ejercicio anterior. Demostrar que el incremento paramétrico  $\hat{\theta}(h) - \hat{\theta}(h-1)$  tiende a cero cuando  $h \rightarrow \infty$ , teniendo en cuenta que  $e(h|h) \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Ejercicio 4.9.-** Sea un sistema adaptativo donde el proceso y el modelo adaptativo están descritos por las ecuaciones:

$$y(k) = \theta^T \phi(k-d) + \Delta(k),$$

$$\hat{y}(k|k) = \hat{\theta}_r(k)^T \phi_r(k-d).$$

Deducir las correspondientes ecuaciones del proceso y del modelo adaptativo en un sistema normalizado, siguiendo los siguientes pasos:

- Definir un factor de normalización y deducir las variables de entrada/salida del sistema normalizado asegurando su acotación.
- Definir las ecuaciones normalizadas del proceso y del modelo adaptativo.
- Reescribir la ecuación del proceso extendiendo la señal de perturbación normalizada de forma que incluya términos de la dinámica del proceso y que el orden de los términos de dicha dinámica, no incluidos en dicha señal, coincida con el orden del modelo adaptativo.  $\square$

**Ejercicio 4.10.-** Sea el sistema adaptativo normalizado considerado en el ejercicio anterior. Demostrar la acotación de la señal de perturbación normalizada, teniendo en cuenta que la señal de perturbación sin normalizar  $\Delta(k)$  es acotada.  $\square$

**Ejercicio 4.11.-** En el sistema adaptativo normalizado del Ejercicio 4.9, definir los errores de estimación a priori y a posteriori normalizados.  $\square$

**Ejercicio 4.12.-** Sea el sistema adaptativo del Ejercicio 4.9, donde el error de estimación a posteriori normalizado  $e^n(k|k)$  verifica

$$|e^n(k|k)| < 2\Delta_b^n, \quad \forall k \geq k_f > 0.$$

Deducir la función que acotará el valor absoluto del error de estimación a posteriori del sistema adaptativo sin normalizar  $e(k|k)$ .  $\square$

**Ejercicio 4.13.-** Sea el sistema adaptativo normalizado del Ejercicio 4.9, en el que el mecanismo de adaptación se define mediante

$$\hat{\theta}_r(k) = \hat{\theta}_r(k-1) + \psi(k)e^n(k|k)x_r(k-d),$$

donde

- $x_r(k-d)$  es el vector de entradas/salidas normalizado con el orden reducido del modelo adaptativo.
- $\psi(k) = 1$  si se cumple la condición

$$|e^n(k|k)[2 + x_r(k-d)^T x_r(k-d)]| > 2|\Delta^n(k)|.$$

- $\psi(k) = 0$  si no se cumple la condición del punto anterior.
- $\Delta_b^n \geq |\Delta^n(k)| + \rho$ , con  $\rho > 0$ , para todo  $k > 0$ , siendo  $\Delta^n(k)$  la señal de perturbación del sistema normalizado.

Demostrar que existe un instante  $k_f$  tal que:

$$\hat{\theta}_r(k) = \hat{\theta}_r(k-1), \quad \forall k \geq k_f > 0.$$

$\square$

**Ejercicio 4.14.-** Sea el sistema adaptativo normalizado del ejercicio anterior. Demostrar que:

$$\|\tilde{\theta}_r(k-1)\|^2 \geq \|\tilde{\theta}_r(k)\|^2, \quad \forall k > 0.$$

□

**Ejercicio 4.15.-** Sea el sistema adaptativo normalizado del Ejercicio 4.13, donde los parámetros del proceso son variables con el tiempo, es decir, donde el proceso normalizado viene definido por la ecuación

$$y(k) = \theta(k)^T \phi(k-d) + \Delta(k),$$

$$\Delta(k) = n_y(k) - \theta(k)^T n_\phi(k-d) + \xi(k).$$

Demostrar que

$$\|\tilde{\theta}_r(k|k-1)\|^2 > \|\tilde{\theta}_r(k|k)\|^2.$$

donde

$$\tilde{\theta}_r(k|k) = \theta_r(k) - \hat{\theta}_r(k),$$

$$\tilde{\theta}_r(k|k-1) = \theta_r(k) - \hat{\theta}_r(k-1).$$

□

### E4.3 Convergencia y estabilidad de sistemas de control predictivo y adaptativo predictivo

**Ejercicio 4.16.-** Sea un proceso estable con inverso inestable descrito por

$$y(k) = a y(k-1) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2),$$

donde los parámetros tienen valores constantes entre 0 y 1 y satisfacen las condiciones

$$b_1 < b_2; \quad a + b_1 + b_2 = 1.$$

Consideremos la siguiente trayectoria de referencia de primer orden:

$$y_r(k+j|k) = \mu_a y_r(k+j-1|k) + \mu_b y_{sp}(k+j-1|k), \quad j = 1, 2, \dots, \lambda;$$

$$y_r(k|k) = y(k).$$

con  $\mu_a$  y  $\mu_b$  elegidos entre 0 y 1 y  $\mu_a + \mu_b = 1$ , siendo  $y_{sp}$  la consigna.

Consideremos el siguiente modelo predictivo:

$$\hat{y}(k+j|k) = \hat{a} \hat{y}(k+j-1|k) + \hat{b}_1 \hat{u}(k+j-1|k) + \hat{b}_2 \hat{u}(k+j-2|k)$$

para  $j = 1, 2, \dots, \lambda$ ;

$$\hat{y}(k|k) = y(k), \quad \hat{u}(k|k) = u(k), \quad \hat{u}(k-1|k) = u(k-1).$$

1. Suponiendo que la entrada se mantiene constante en el horizonte de predicción, demostrar que la salida del proceso puede predecirse en la forma

$$\hat{y}(k+\lambda|k) = \hat{\alpha}(\lambda) y(k) + \hat{\beta}_1(\lambda) u(k) + \hat{\beta}_2(\lambda) u(k-1),$$

dando las expresiones explícitas de los coeficientes  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}_1$ ,  $\hat{\beta}_2$  en función de  $\lambda$ .

2. Supongamos que la consigna es un valor constante  $\bar{y}_{sp}$ . Imponiendo el criterio de rendimiento  $J_k = \hat{y}(k+\lambda|k) - y_r(k+\lambda|k) = 0$ , deducir la ley de control que proporciona explícitamente la entrada  $u(k)$  en función del valor de consigna y de las variables medidas en cada instante  $k$ .

3. Obtener las expresiones explícitas de las funciones de transferencia que relacionan respectivamente la señal de control y la salida del proceso con la consigna.

4. Analizar la estabilidad de dichas funciones de transferencia en función del valor de  $\lambda$  y determinar su valor mínimo para que las trayectorias de salida y de control estén acotadas. Para los casos en que el control sea estable, demostrar que la salida controlada tiende a alcanzar cualquier consigna constante, si se cumple cierta relación entre los parámetros del modelo predictivo y los del proceso.

□

**Ejercicio 4.17.-** Consideremos el proceso y la ley de control del ejercicio anterior. Demostrar que dicha ley de control lleva a un error permanente entre la salida del proceso y cualquier consigna constante si existe una perturbación constante a la entrada del proceso.

□

**Ejercicio 4.18.-** Para el Ejercicio 4.16, reformular la ley de control cuando se utiliza un modelo predictivo en forma incremental como en el caso tratado en el Apéndice B (Apartado B.2.3), dando una expresión explícita para los parámetros de la ley de control en función de  $\lambda$ .

Analizar la estabilidad de dicha ley de control y su capacidad para llevar la salida del proceso a consignas constantes sin desviación permanente. Discutir el papel de la trayectoria de referencia y observar si es necesario que los parámetros  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}_1$ ,  $\hat{b}_2$  del modelo predictivo coincidan o no con los del proceso.  $\square$

**Ejercicio 4.19.-** Sea un proceso de naturaleza lineal y estable descrito por

$$\begin{aligned} y(k) &= \theta(k)^T \phi(k-d) + \Delta(k), \\ \phi(k)^T &= [y(k), y(k-1), \dots, y(k-p), u(k), u(k-1), \dots, u(k-q), \\ &\quad w(k), w(k-1), \dots, w(k-s)], \\ \Delta_b &\geq \max_{0 < k < \infty} |\Delta(k)| + \rho, \quad \text{siendo } \rho > 0, \end{aligned}$$

caracterizado por la propiedad

$$\max_{0 \leq j \leq k} |u(j)| > \tau_1 \max_{0 \leq j \leq k} |y(j+d)| - \tau_2, \quad \forall k \geq 0,$$

donde  $0 < \tau_1 < \infty$  y  $0 \leq \tau_2 < \infty$ . Sea una subsucesión  $\{k_s\}$  de  $\{k\}$  en la que

$$|u(k_s)| = \max_{0 \leq j \leq k_s} |u(j)|.$$

Mostrar que

$$|u(k_s)| > \gamma_1 \|\phi(k_s)\| - \gamma_2, \quad \forall k_s \geq 0, \quad \text{con } 0 < \gamma_1 < \infty \text{ y } 0 \leq \gamma_2 < \infty,$$

y obtener los valores de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en función de  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , teniendo en cuenta que los valores absolutos de la perturbación medible  $w$  están acotados por la constante  $w_b$ .  $\square$

**Ejercicio 4.20.-** Sea un proceso de naturaleza lineal y con inverso estable descrito por

$$\begin{aligned} y(k) &= \theta(k)^T \phi(k-d) + \Delta(k), \\ \phi(k)^T &= [y(k), y(k-1), \dots, y(k-p), u(k), u(k-1), \dots, u(k-q), \\ &\quad w(k), w(k-1), \dots, w(k-s)], \\ \Delta_b &\geq \max_{0 < k < \infty} |\Delta(k)| + \rho, \quad \text{siendo } \rho > 0, \end{aligned}$$

caracterizado por la propiedad

$$\max_{0 \leq j \leq k} |y(j+d)| > \rho_1 \max_{0 \leq j \leq k} |u(j)| - \rho_2, \quad \forall k \geq 0,$$

donde  $0 < \rho_1 < \infty$  y  $0 \leq \rho_2 < \infty$ . Sea una subsucesión  $\{k_s\}$  de  $\{k\}$  en la que

$$|y(k_s)| = \max_{0 \leq j \leq k_s} |y(j)|.$$

Mostrar que

$$|y(k_s)| > \alpha_1 \|\phi(k_s-d)\| - \alpha_2, \quad \forall k_s \geq 0, \quad \text{con } 0 < \alpha_1 < \infty \text{ y } 0 \leq \alpha_2 < \infty,$$

y obtener los valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  en función de  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , teniendo en cuenta que los valores absolutos de la perturbación medible  $w$  están acotados por la constante  $w_b$ .  $\square$

**Ejercicio 4.21.-** Sea un proceso descrito por

$$\begin{aligned} y(k) &= \theta(k)^T \phi(k-d) + \Delta(k), \\ \phi(k)^T &= [y(k), y(k-1), \dots, y(k-p), u(k), u(k-1), \dots, u(k-q), \\ &\quad w(k), w(k-1), \dots, w(k-s)]. \end{aligned}$$

Mostrar que si la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  no es acotada, debe cumplirse al menos una de las siguientes condiciones:

- 1)  $|u(k_s)| > \gamma_1 \|\phi(k_s)\| - \gamma_2, \quad \forall k_s \geq 0,$   
con  $0 < \gamma_1 < \infty$  y  $0 \leq \gamma_2 < \infty$ ;
- 2)  $|y(k_s)| > \alpha_1 \|\phi(k_s)\| - \alpha_2, \quad \forall k_s \geq 0,$   
con  $0 < \alpha_1 < \infty$  y  $0 \leq \alpha_2 < \infty$ .

$\square$

**Ejercicio 4.22.-** Sea el proceso descrito en el Ejercicio 4.20, donde la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  sólo será no acotada si existe una subsucesión  $\{k_s\}$  de  $\{k\}$  tal que

- 1)  $|y(k_s)| > \alpha_1 \|\phi(k_s-d)\| - \alpha_2, \quad \forall k_s \geq 0,$   
con  $0 < \alpha_1 < \infty$  y  $0 \leq \alpha_2 < \infty$ ;
- 2)  $\lim_{k_s \rightarrow \infty} \|\phi(k_s)\| = \infty$ .

Siendo la sucesión  $\{|y_d(k+d)|\}$  acotada, demostrar que la aplicación de la ley de control predictivo

$$y_d(k+d) = \hat{\theta}^T \phi(k), \quad \forall k \geq 0,$$

garantiza la acotación de  $\{\|\phi(k)\|\}$  si se cumple que

$$\alpha > \|\theta(k) - \hat{\theta}\|, \quad \forall k \geq k_f,$$

donde  $\alpha = \alpha_1$ . □

**Ejercicio 4.23.-** Sea el proceso del Ejercicio 4.20 bajo la ley de control predictivo

$$y_d(k+d) = \hat{\theta}^T \phi(k), \quad \forall k \geq 0,$$

donde el error de identificación paramétrica está acotado por

$$\alpha > \|\theta(k) - \hat{\theta}\|, \quad \forall k \geq k_f.$$

Deducir una función de acotación del valor absoluto del error de seguimiento  $|\varepsilon(k)|$  para todo  $k \geq d$ . □

**Ejercicio 4.24.-** Sea el proceso del Ejercicio 4.20 bajo la ley de control predictivo

$$y_d(k+d) = \hat{\theta}^T \phi(k), \quad \forall k \geq 0,$$

donde el error de identificación paramétrica es nulo. Deducir el valor del error de seguimiento  $\varepsilon(k)$  para todo  $k \geq d$ . □

**Ejercicio 4.25.-** Sea el proceso del Ejercicio 4.20 bajo la ley de control predictivo

$$y_d(k+d) = \hat{\theta}^T \phi(k), \quad \forall k \geq 0,$$

donde las sucesiones  $\{\|\phi(k)\|\}$  y  $\{|y_d(k)|\}$  están acotadas. Demostrar que la salida deseada conductora es físicamente realizable. □

**Ejercicio 4.26.-** Sea el proceso descrito en el Ejercicio 4.20, donde la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  sólo será no acotada si existe una subsucesión  $\{k_s\}$  de

$\{k\}$  tal que:

$$1) \quad |y(k_s)| > \alpha_1 \|\phi(k_s - d)\| - \alpha_2, \quad \forall k_s \geq 0, \\ \text{con } 0 < \alpha_1 < \infty \text{ y } 0 \leq \alpha_2 < \infty;$$

$$2) \quad \lim_{k_s \rightarrow \infty} \|\phi(k_s)\| = \infty.$$

Siendo la sucesión  $\{|y_d(k+d)|\}$  acotada, demostrar que la aplicación de la ley de control adaptativo predictivo

$$y_d(k+d) = \hat{\theta}_r(k)^T \phi_r(k), \quad \forall k \geq 0$$

garantiza la acotación de  $\{\|\phi(k)\|\}$  si se cumple que

$$\alpha > \|\hat{\theta}_r(k) - \hat{\theta}_r(k-d)\| + \frac{|e(k|k)|}{\max\{\|\phi(k-d)\|, c\}}, \quad \forall k \geq k_f,$$

donde  $\alpha = \alpha_1$ . □

**Ejercicio 4.27.-** Sea un proceso descrito por la ecuación

$$y(k) = \theta^T \phi(k-d)$$

bajo la ley de control adaptativo predictivo

$$y_d(k+d) = \hat{\theta}(k)^T \phi(k)$$

y un mecanismo de adaptación que garantiza:

$$a) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} e(k|k) = 0,$$

$$b) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} [\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)] = 0.$$

Demostrar que, si la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  está acotada para todo  $k \geq 0$ , el error de seguimiento  $\varepsilon(k) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . □

**Ejercicio 4.28.-** Sea un proceso descrito por la ecuación

$$y(k) = \theta(k)^T \phi(k-d) + \Delta(k)$$

bajo la ley de control adaptativo predictivo

$$y_d(k+d) = \hat{\theta}_r(k)^T \phi_r(k).$$

demostrar que el error de seguimiento  $\varepsilon(k-d)$  y el error de estimación a posteriori  $e(k|k)$  son iguales  $\forall k \geq k_f > 0$  si  $\hat{\theta}_r(k) = \hat{\theta}_r(k-d)$ .  $\square$

**Ejercicio 4.29.-** Sea el proceso descrito por

$$y(k) = \theta^T \phi(k-d) + \Delta(k)$$

bajo la ley de control adaptativo predictivo

$$y_d(k+d) = \hat{\theta}_r(k)^T \phi_r(k).$$

donde la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  estará acotada si se satisface la condición

$$\alpha > \|\hat{\theta}_r(k) - \hat{\theta}_r(k-d)\| + \frac{|e(k|k)|}{\max\{\|\phi(k-d)\|, c\}}, \quad \forall k \geq k_f.$$

Sea asimismo un mecanismo de adaptación que verifica:

- $\hat{\theta}_r(k) = \hat{\theta}_r(k-1), \quad \forall k \geq k_f > 0,$
- $|e(k|k)| < 2\Delta_b^n \max\{\|\phi(k-d)\|, c\}, \quad \forall k \geq k_f > 0.$

Calcular la relación entre los parámetros  $\alpha$  y  $\Delta_b^n$  que garantiza la estabilidad global.  $\square$

**Ejercicio 4.30.-** Sea un proceso de naturaleza lineal y estable descrito por

$$y(k) = \theta(k)^T \phi(k-d) + \Delta(k),$$

$$y(k) = \theta_o(k)^T \phi_o(k-d) + \theta_1(k)u(k-d) + \Delta(k),$$

donde si la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$  no está acotada debe existir una subsucesión  $\{k_s\}$  a lo largo de la cual se verifica:

- $|u(k_s)| > \gamma_1 \|\phi(k_s)\| - \gamma_2, \quad \forall k_s \geq 0,$   
con  $0 < \gamma_1 < \infty$  y  $0 \leq \gamma_2 < \infty;$
- $\lim_{k_s \rightarrow \infty} \|\phi(k_s)\| = \infty.$

Supongamos que el proceso está controlado por la ley de control predictivo

$$y_d(k+d) = \hat{\theta}^T \phi(k),$$

donde la salida deseada  $y_d(k+d)$  es físicamente realizable. Calcular una acotación sobre el error de identificación paramétrica que garantice la estabilidad global.  $\square$

**Ejercicio 4.31.-** Calcular una función de acotación del valor absoluto del error de seguimiento  $\varepsilon(k)$  a partir de la acotación sobre el error de identificación paramétrica que garantiza la estabilidad global en el sistema de control predictivo del ejercicio anterior.  $\square$

**Ejercicio 4.32.-** En el sistema de control predictivo del Ejercicio 4.30 demostrar que la salida deseada conductora está acotada si las sucesiones  $\{\|\phi(k)\|\}$  y  $\{|\theta_1(k)|\}$  están acotadas.  $\square$

**Ejercicio 4.33.-** Sea el proceso del Ejercicio 4.33 bajo la ley de control adaptativo predictivo

$$y_d(k+d) = \hat{\theta}(k)^T \phi(k),$$

donde la salida deseada conductora es físicamente realizable. Deducir condiciones sobre los incrementos de los parámetros del modelo AP y el error de estimación a posteriori del sistema adaptativo capaces de garantizar la acotación de la sucesión  $\{\|\phi(k)\|\}$ .  $\square$

## Unidad Didáctica V

---

# Aplicaciones de Control Predictivo y Adaptativo Predictivo

## Resumen de la Unidad Didáctica V

---

Una vez alcanzado el primer estadio de definición de las metodologías de aplicación en las unidades didácticas anteriores, tanto para el control predictivo como para el adaptativo predictivo, en esta unidad se lleva a cabo la materialización tecnológica de los conceptos en su segundo estadio, es decir el de su aplicación práctica.

Esta Unidad Didáctica pretende ilustrar el uso tanto de la estrategia básica de control predictivo como de la estrategia extendida, así como la aplicación de control predictivo sin adaptación de parámetros y la de control adaptativo predictivo (AP). Para cubrir estos objetivos se han elegido proyectos que en su día fueron hitos tecnológicos en el desarrollo del control predictivo y adaptativo predictivo en su vertiente de aplicación práctica. La Unidad Didáctica consta de tres capítulos.

El capítulo primero, Capítulo 8 del libro, pretende tender un puente que permita al alumno pasar de la definición metodológica del control adaptativo predictivo a su aplicación práctica, utilizando la estrategia básica de control predictivo. Con este objetivo, este capítulo pone especial énfasis en los aspectos prácticos de la aplicación de control adaptativo predictivo a procesos reales. Estos aspectos prácticos se ilustran mediante la aplicación de la metodología al control mono y multivariable de una columna de destilación. Este proyecto se llevó a cabo en 1976 en el Departamento de Ingeniería Química de la Universidad de Alberta en Canadá. El control multivariable de una columna de destilación era por aquel entonces un ejemplo típico de las dificultades encontradas en la aplicación de la moderna teoría de control y, en consecuencia, la aplicación de control adaptativo predictivo a este proceso constituía un proyecto muy adecuado para evaluar las capacidades de esta metodología de control avanzado.

El segundo capítulo de esta Unidad Didáctica, Capítulo 9 del libro, presenta la primera aplicación histórica de control adaptativo predictivo a un proceso de producción industrial. Esta primera aplicación utilizó la estrategia extendida de control predictivo. El proceso en cuestión fue la planta de blanqueo de la fábrica de pulpa de CANFOR Ltd. en Port Mellon, en la Columbia Británica del Canadá. Este proyecto, realizado en 1984, fue

resultado de una colaboración entre el Paper and Pulp Research Institute of Canada (PAPRICAN) y el Departamento de Ingeniería Química de la Universidad de Alberta, y se llevó a cabo en el contexto de un programa de investigación y desarrollo de cinco años de duración financiado por el Natural Sciences and Engineering Research Council (NSERC) de Canadá.

El tercer capítulo, Capítulo 10 del libro, presenta la aplicación de control predictivo a modelos físicos experimentales de estructuras de edificios sometidas a excitaciones sísmicas. Este capítulo describe y analiza los aspectos prácticos en la aplicación de la estrategia extendida de control predictivo ligada a la utilización de la representación de estado en el modelo predictivo. El tipo de aplicación en cuestión es representativo de otras similares en el área aeroespacial, mecánica y de la ingeniería civil, donde la reducción en tiempo real de las vibraciones de estructuras flexibles sometidas a excitaciones dinámicas, representa en años recientes una de las aplicaciones de mayor interés, por su problemática, para la teoría de control. Este proyecto fue realizado en 1986 en los laboratorios del National Center for Earthquake Engineering Research en Buffalo, Estados Unidos, y fue una de las primeras aplicaciones de la teoría de control conocidas en este dominio.

## Capítulo 8

# Control multivariable de una columna de destilación

### 8.1 Introducción

En este capítulo se presenta la primera aplicación de control adaptativo predictivo (AP) a un proceso real, que se realizó en los primeros meses de 1976 en el Departamento de Ingeniería Química de la Universidad de Alberta en Canadá y cuyos resultados fueron publicados en [Mar76a, MS84]. Utilizando la estrategia básica de control predictivo, este capítulo ilustra los aspectos prácticos relacionados con la aplicación de control AP a procesos reales. Estos aspectos prácticos son considerados en su aplicación al control mono y multivariable de una columna de destilación binaria.

Cuando este proyecto se llevó a cabo algunos autores habían criticado la teoría existente para el control de los procesos químicos y, por extensión, para el control de los procesos industriales [Fos73, KST76, LW76], poniendo de relieve la existencia de un vacío entre dicha teoría y la práctica industrial. El control multivariable de una columna de destilación fue en dicha crítica un ejemplo típico de las dificultades encontradas en las aplicaciones prácticas de la moderna teoría de control. El análisis de las diferentes aplicaciones de las metodologías disponibles para el control multivariable de columnas de destilación [RS76, Edg76] resaltaba la incapacidad de dichas metodologías para responder a los problemas existentes. Claramente, las causas de esta incapacidad no eran ajenas a la compleja naturaleza dinámica