POLITÉCNICA

# CONTROL MEDIANTE MODELOS EN VARIABLES DE ESTADO

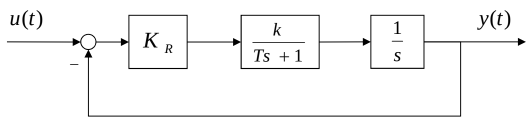
## CONTROL POR REALIMENTACIÓN DEL ESTADO

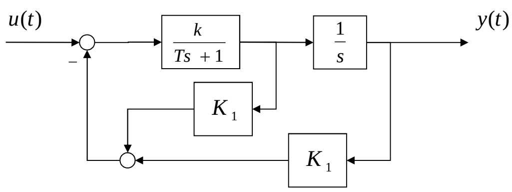
POLITÉCNICA

# INTRODUCCIÓN

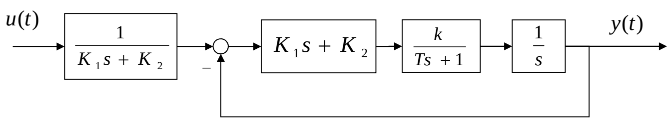
- Mayor eficiencia en la realimentación del estado sobre la opción de realimentar la salida.
- Se suponen, en principio, todas las variables de estado medibles o estimables (observables).
- Subsistema controlable y observable = realización mínima del sistema.
- El comportamiento de la parte no controlable evoluciona independientemente a las entradas, por lo que no puede modificarse mediante ninguna realimentación.
- La parte no observable no puede estimarse con la información de las entradas y de las salidas, por lo que no puede emplearse tampoco en la realimentación.

# EJEMPLO



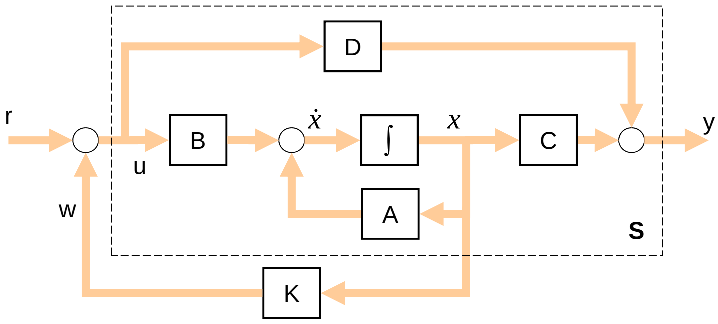




# EJEMPLO II




Aparición de estructuras ideales en el lazo abierto:
Regulador P.D.

# REALIMENTACIÓN DEL ESTADO




S:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = Kx \\ u = r - w \end{cases}$$

$$\dot{x} = Ax + B(r - Kx) = \left[A - BK\right]x + Br$$
$$y = Cx + D\left[r - Kx\right] = \left[C - DK\right]x + Dr$$

Para D=0

$$\dot{x} = \left[A - BK\right]x + Br$$
$$y = Cx$$

# REALIMENTACIÓN DEL ESTADO

$$\dot{x} = Ax + B(r + Kx) = \left[A + BK\right]x + Br$$
$$y = Cx + D\left[r + Kx\right] = \left[C + DK\right]x + Dr$$

$$A_r = A + BK$$

La matriz A representa la dinámica del sistema, por lo que modificando ésta (sus autovalores) conseguiremos que la posición de los polos cambie y por tanto, también, el comportamiento del sistema final.

Dimensión de A y $A_r$ = **n** x **n**
Dimensión de K = **m** x **n**

n x n ecuaciones (n filas de $A_r$) > m x n incógnitas (elementos de K)

# REALIMENTACIÓN DEL ESTADO

Puede elegirse cualquier $A_r$?

Si nº de ecuaciones > nº incógnitas para que el sistema tenga solución, $A_r$ no puede ser cualquiera. Riesgo de que el sistema sea incompatible.

Motivo por el cual hay que utilizar sistemas de referencia tal que garanticen la existencia de la solución.

Modelo basado en la representación de las variables de fase:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

# REALIMENTACIÓN DEL ESTADO

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

n ecuaciones
con n incógnitas

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ k_1 - a_0 & k_2 - a_1 & k_3 - a_2 & k_4 - a_3 & \cdots & k_n - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

POLITÉCNICA

# EJEMPLO

Dado el sistema, se desea diseñar un control por realimentación del estado que sitúe los polos en: s=-1±j y s=-10

$$G(s) = \frac{3s+6}{s^3+3s^2+7s+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_{1,2} = -1 \pm j \\ s_3 = -10 \end{array}\right\} \quad p(s) = (s+10)(s^2+2s+2) = s^3+12s^2+22s+20$$

Luego:

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & -22 & -12 \end{bmatrix}$$

POLITÉCNICA

# EJEMPLO

Modelo de estado en cadena abierta:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$A_r = A + BK$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & -22 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

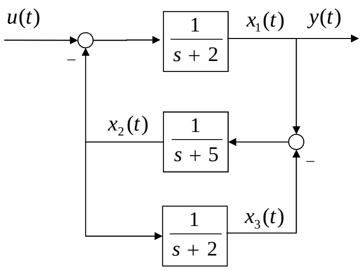
$$\left.\begin{array}{l} 20 = 1 - k_1 \\ 22 = 7 - k_2 \\ 12 = 3 - k_3 \end{array}\right\} \quad K = \begin{bmatrix} -19 & -15 & -9 \end{bmatrix}$$

Sistema final:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & -22 & -12 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} x$$

# EJERCICIO




1. Obtener el modelo de estado.
2. K del sistema realimentado para que los polos dupliquen su valor.
3. Calcular el estado del sistema sin realimentar al cabo de 2 s, para $x_1(0)=1$, $x_2(0)=1$, $x_3(0)=0$ con $u(t)=0$.

# SOLUCIÓN

Modelo en variables de estado:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 1 & -5 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u \qquad G(s)=\frac{s^2+7s+11}{s^3+9s^2+26s+24} \qquad p(s)=(s+2)(s+3)(s+4)$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$A_r=A+BK$$

$$p(s)=(s+4)(s+6)(s+8)$$
$$p(s)=s^3+18s^2+104s+192$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -192 & -104 & -18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -24 & -26 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}k_1&=-192+24=-168\\ k_2&=-104+26=-78\\ k_3&=-18+9=-9\end{aligned}\right\} \quad K=\begin{bmatrix}-168 & -78 & -9\end{bmatrix}$$

POLITÉCNICA

# SOLUCIÓN

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda+5 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda+2 \end{bmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4) \qquad \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -3 \\ \lambda_3 = -4 \end{cases}$$

$$\lambda = -2 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} v_{12} = 0 \\ v_{11} = v_{13} \end{cases} \;\Rightarrow\; v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -3 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} v_{21} = v_{22} \\ v_{22} = -v_{23} \end{cases} \;\Rightarrow\; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & -1 & -1 \\ -0.5 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -4 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 2v_{31} = v_{32} \\ v_{32} = -2v_{33} \end{cases} \;\Rightarrow\; v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \hat{x}_0 = T^{-1}\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}(t) = \hat{\phi}(t)\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5e^{-2t} \\ 0 \\ 0.5e^{-4t} \end{bmatrix} \qquad x(2) = T\hat{x}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5e^{-4} \\ 0 \\ 0.5e^{-8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5(e^{-4}+e^{-8}) \\ e^{-8} \\ 0.5(e^{-4}-e^{-8}) \end{bmatrix}$$

POLITÉCNICA

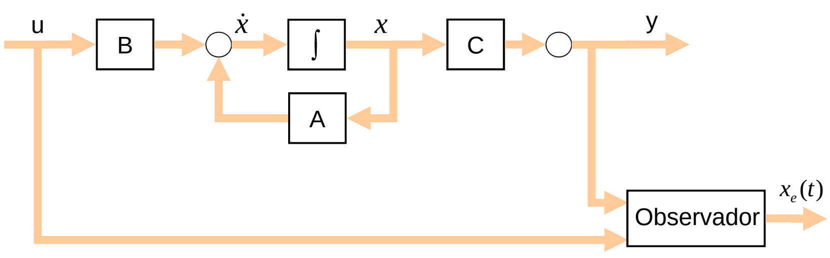
# CONTROL MEDIANTE MODELOS EN VARIABLES DE ESTADO

OBSERVADORES DE ESTADO

# INTRODUCCIÓN

- Necesidad de estimar el estado para hacer control a partir de él.
- El estado son variables internas que muchas veces no es posible medir.
- Se han de estimar a partir de la información de la entrada y la salida.
- El conjunto de variables que se pueden estimar forman el subespacio observable.
- Finalmente se trabajará con la parte del sistema que además de observable sea controlable, es decir, lo que hemos denominado el sistema mínimo.


# INTRODUCCIÓN

# DEFINICIÓN DE OBSERVADORES

Dado un sistema lineal, invariante y observable:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

Se dice que el sistema definido por las ecuaciones:

$$\dot{x}_e(t) = Fx_e(t) + Gu(t) + Hy(t)$$

es un observador del anterior, si verifica las siguientes condiciones:

1. Si los estados de ambos sistemas coinciden en un instante $t_0$, $x_e(t_0)=x(t_0)$, entonces los estados coinciden para todo instante posterior $x_e(t)=x(t)$ para cualquier entrada u(t) aplicada sobre el sistema.
2. $x_e(t)$ debe tender asintóticamente al estado x(t) para cualquier entrada u(t) y para cualesquiera estados iniciales $x_e(t_0)$ y $x(t_0)$.

$$\lim_{t\to\infty} x_e(t) - x(t) = 0$$

# DEFINICIÓN DE OBSERVADORES

$$\dot{x}_e(t) - \dot{x}(t) = Fx_e(t) - Ax(t) + (G - B)u(t) + HCx(t)$$

Para que la entrada no influya y coincida en todo instante el estado real y el estimado (primera condición): G=B

$$\dot{x}_e(t) - \dot{x}(t) = Fx_e(t) - Ax(t) + HCx(t)$$

Suponiendo $x_e(t)=x(t)$:

$$0 = Fx(t) - Ax(t) + HCx(t) = (F - A + HC)x(t) \quad \Rightarrow \quad F = A - HC$$

Por lo que finalmente, nos queda:

$$\dot{x}_e(t) - \dot{x}(t) = (A - HC)x_e(t) - (A - HC)x(t) = (A - HC)(x_e(t) - x(t))$$

# CONSIDERACIONES

- Si el estado real y el estimado parten de valores iniciales distintos, el estimado debe tender asintóticamente al real, eso obliga a que los valores propios de A-HC deban estar en el semiplano negativo.
- Como el objetivo es hacer control a partir de la información del observador, la dinámica de éste deberá ser más rápida que la del sistema, para que la estimación del estado pueda estar disponible antes y poderse usar en el lazo de realimentación.
- Para que la dinámica de A-HC sea más rápida que la de A, sus valores propios deberán tener parte real negativa significativamente menor.
- Fijados los valores propios de F, o lo que es lo mismo, los de A-HC (polos del observador), se podrá obtener H, ya que A y C son conocidos.
- Al igual que ocurría en la realimentación del estado con $A_r$, F no podrá tener cualquier estructura, debido a la posibilidad de inexistencia de solución.

# DISEÑO DEL OBSERVADOR

Forma canónica observable (salidas de integradores):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ b_2 - b_n a_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} x + b_n u$$

POLITÉCNICA

# DISEÑO DEL OBSERVADOR

Cálculo del observador:

$$F = A - HC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -f_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

POLITÉCNICA

# DISEÑO DEL OBSERVADOR

$$F = A - HC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -(a_0 + h_1) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -(a_1 + h_2) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -(a_2 + h_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -(a_{n-1} + h_n) \end{bmatrix}$$