Prof. Maurizio Mattesini

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Capítulo 22

Campo Eléctrico II:

Distribuciones continuas de cargas

Capítulo 22

1. Cálculo del campo eléctrico **E** mediante la Ley de Coulomb
2. Ley de Gauss
3. Cálculo del campo eléctrico **E** mediante la ley de Gauss
4. Discontinuidad de E_n
5. Carga y campo en la superficie de los conductores

Se puede describir la carga en forma de **distribuciones continuas** y de esta forma es posible calcular la carga total en superficies del tamaño de las de los cuerpos celestes (por ejemplo la **Tierra**).

Densidad de carga

A escala microscópica, la carga eléctrica está *cuantificada*.
A escala macroscópica un gran número de cargas están tan próximas que la carga total puede considerarse *distribuida continuamente* en le espacio (semejante al uso de una densidad de masa continua para describir el aire).

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$ Densidad volúmica

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$$ Densidad de carga superficial

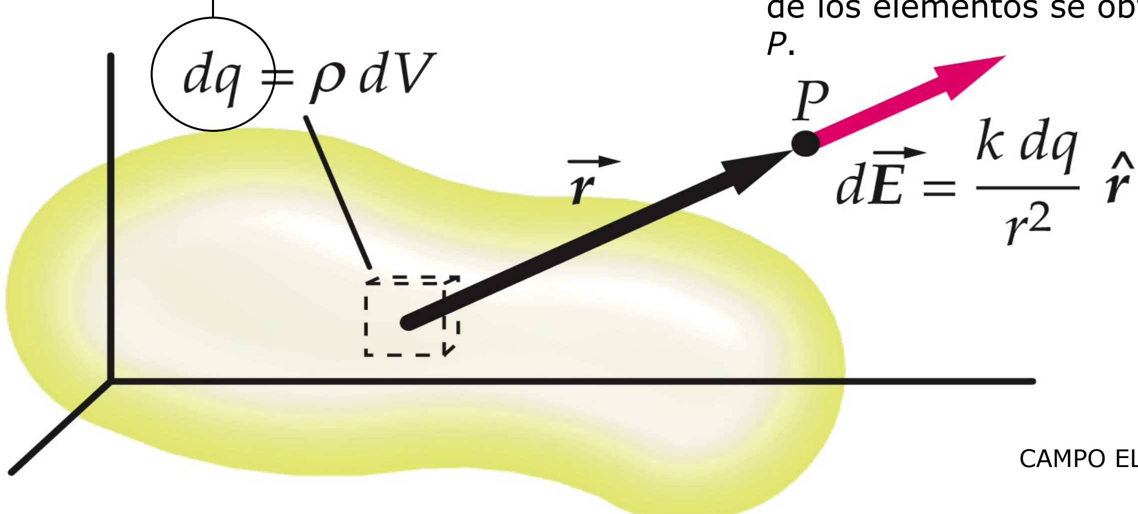
$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$ Densidad de carga lineal

22-1
Calculo del campo eléctrico **E** mediante la ley de Coulomb

Campo eléctrico debido a una distribución de carga continua

Suficientemente pequeño para que podamos considerarle como una **carga puntual**.

Si se tiene un objeto cargado que no se puede reducir a una carga puntual, hay que descomponer este objeto en **elementos infinitesimales**. Cada uno de estos elementos contiene un diferencial de carga que se comporta como si fuese una carga puntual. Aplicando el **principio de superposición** al conjunto de los elementos se obtiene el campo total en el punto *P*.

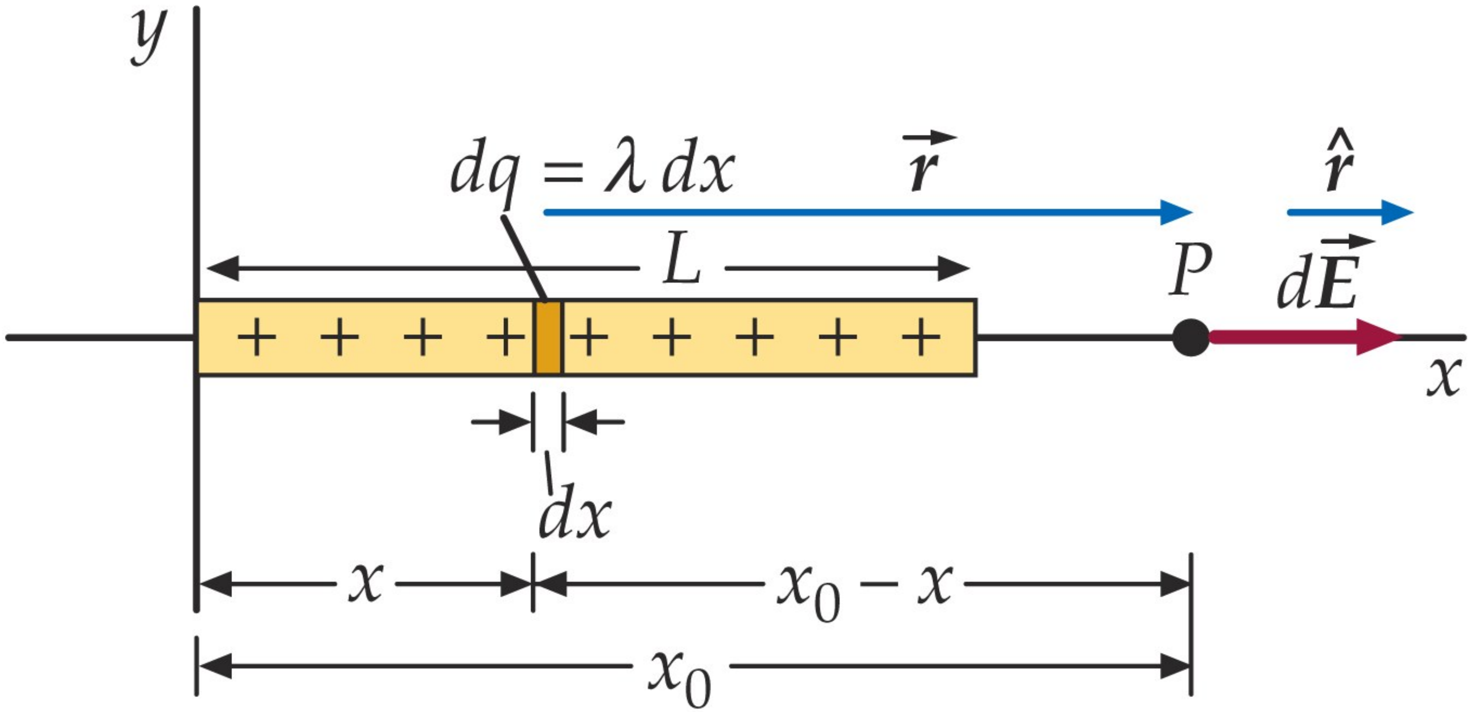


$$E = \int_V \frac{k\,dq}{r^2}\,\hat{r}$$

CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA

Un elemento de carga dq produce un campo $d\mathbf{E}=(kdq/r^2)\mathbf{r}$ en el punto P. El campo en P debido a la carga total se obtiene integrando esta expresión para toda la distribución de carga.

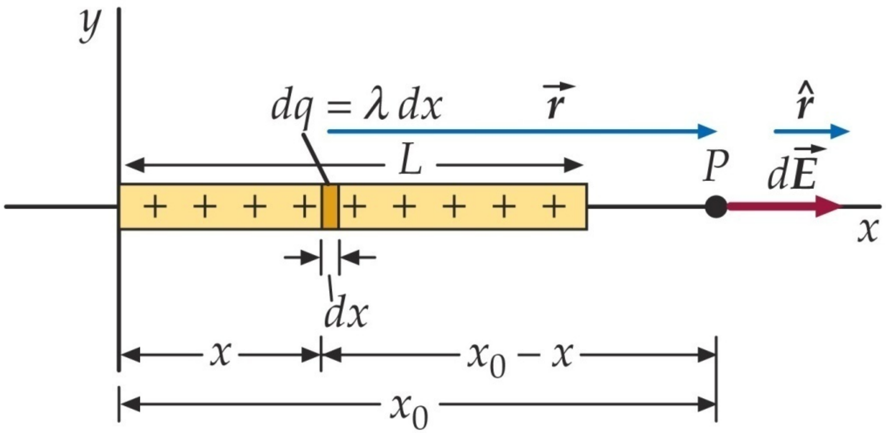
Campo eléctrico sobre el eje de una carga lineal finita



$$\boxed{E_x = \frac{kQ}{(x_o - L)x_o}}$$

Si $x_o >> L$, el campo eléctrico en P es aproximadamente kQ/x_o^2. Es decir, si estamos suficientemente lejos de la carga lineal, ésta se comporta como una carga puntual Q.

Una carga Q está distribuida a lo largo del eje x desde x=0 a x=L. La densidad de carga lineal para esta carga es λ=Q/L. Queremos deterniminar **E** producido por está carga lineal en un punto P sobre el eje x, en $x=x_0$.



El campo eléctrico debido a la carga dq situada en dx está dirigido a lo largo del eje x y viene dado, de acuerdo con la **ley de Coulomb** por:

$$dE_x\mathbf{i} = \frac{kdq}{(x_o - x)^2}\mathbf{i} = \frac{k\lambda dx}{(x_o - x)^2}\mathbf{i}$$

Podemos encontrar el módulo de **E** mediante integración sobre la línea cargada en sentido creciente de x=0 hasta x=L:

$$E_x = k\lambda \int_{x=0}^{x=L} \frac{dx}{(x_o - x)^2} = -k\lambda \int_{u=x_0}^{u=x_0-L} \frac{du}{u^2}$$

En donde hemos operado el <u>cambio de variable</u> $u=x_o-x$, de tal forma que:

$$du = -dx$$

$$\boxed{x = 0} \rightarrow u = (x_0 - x) = (x_0 - 0) = x_0$$

$$\boxed{x = L} \rightarrow u = (x_0 - x) = x_0 - L$$

Integrando obtenemos que:

$$E_x = k\lambda \left.\frac{1}{u}\right|_{x_0}^{x_0-L} = k\lambda\left\{\frac{1}{(x_o - L)} - \frac{1}{x_o}\right\} = \frac{k\lambda L}{(x_o - L)x_o}$$

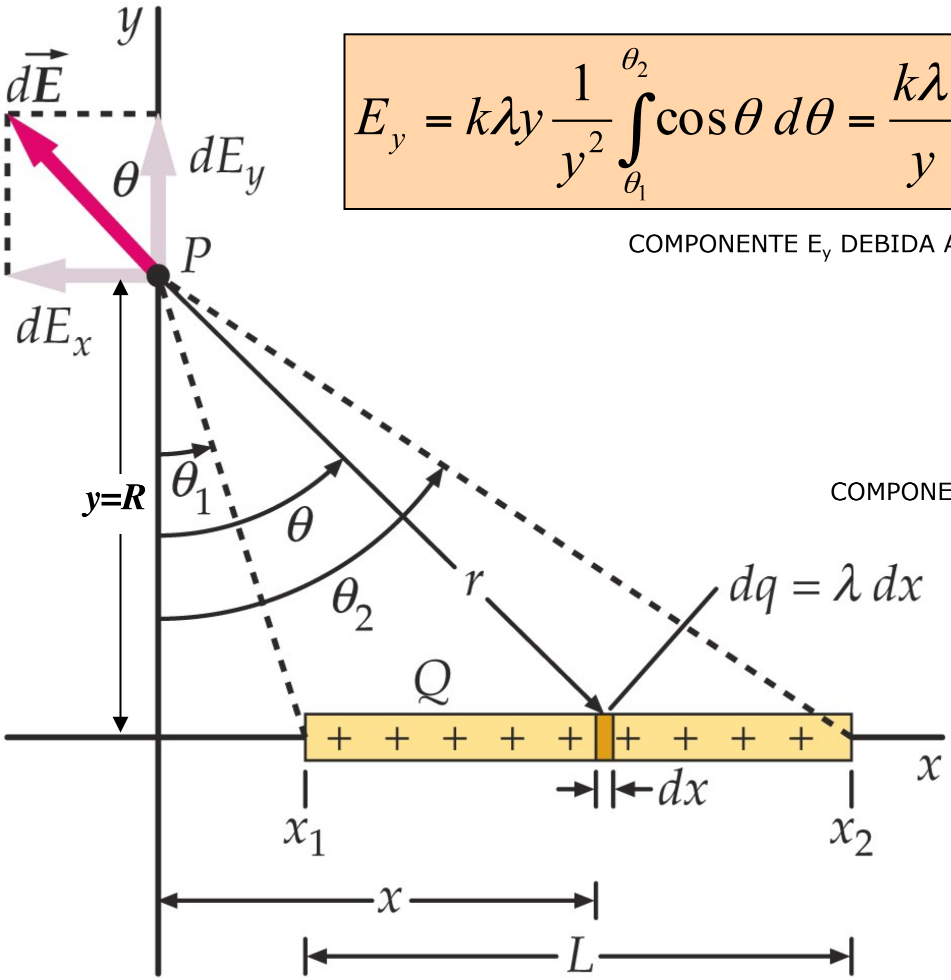
Sustituyendo Q por λL resulta

$$E_x = \frac{kQ}{(x_o - L)x_o}$$

Obsérvese que en la integración de E_x hemos utilizado la siguiente integral definida con n=-2:

$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1},\ n \neq -1$$

Campo eléctrico fuera de una carga lineal finita



$$E_y = k\lambda y \frac{1}{y^2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta \, d\theta = \frac{k\lambda}{y}\left(sen\,\theta_2 - sen\,\theta_1\right) = \frac{kQ}{Ly}\left(sen\,\theta_2 - sen\,\theta_1\right)$$

COMPONENTE E_y DEBIDA A UN SEGMENTO CON DENSIDAD DE CARGA LINEAL UNIFORME

$$E_x = \frac{k\lambda}{y}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)$$

COMPONENTE E_x DEBIDA A UN SEGMENTO DE CARGA LINEAL UNIFORME

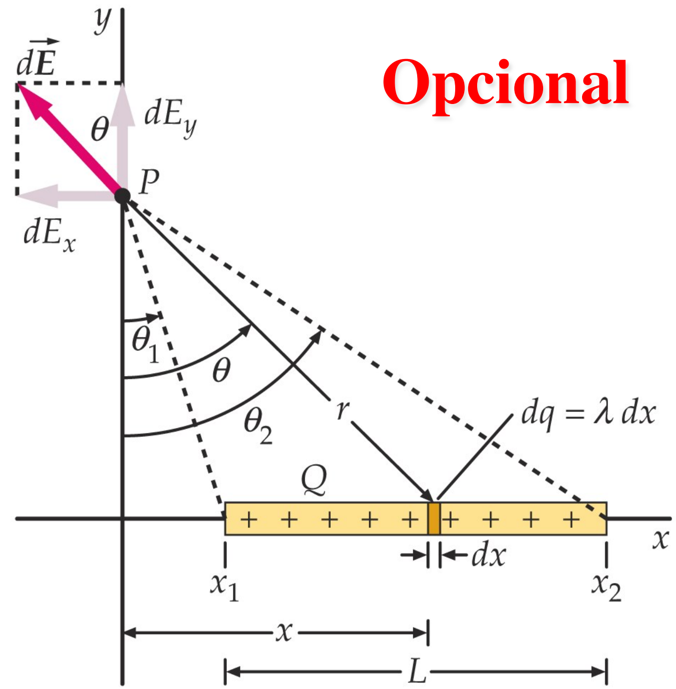
Carga lineal infinita:

$\theta_1 \rightarrow -\pi/2$ ($x_1 = -\infty$); $\theta_2 \rightarrow \pi/2$ ($x_2 = \infty$)

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y} \qquad E_x = 0$$

CAMPO **E** DEBIDO A UNA CARGA LINEAL INFINITA

Un elemento de carga $dq = \lambda dx$ genera un campo $d\mathbf{E}$ tal como se muestra en la figura. El campo en *P* tiene componentes en los ejes *x* e *y*. En este problema sólo calcularemos la componente sobre el eje *y*. El módulo del campo eléctrico producido por un elemento de carga *dq* es:



Opcional

$$|d\mathbf{E}| = \frac{kdq}{r^2} = \frac{k\lambda dx}{r^2}$$

y la componente *y* es

$$dE_y = |d\mathbf{E}|\cos\theta = \frac{k\lambda dx}{r^2}\frac{y}{r} = \frac{k\lambda y dx}{r^3}$$

en donde $\cos\theta = y/r$. La componente total *y*, E_y, se calcula integrando desde $x=x_1$ a $x=x_2$:

$$E_y = \int_{x=x_1}^{x=x_2} dE_y = k\lambda y \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{r^3}$$

Hacemos esta integral mediante un cambio de variable utilizando funciones trigonométricas. En la figura vemos que $x = y\, tg\theta$, y por lo tanto la derivada de *x es*:

$$dx = y\frac{d(tg\theta)}{d\theta} \rightarrow dx = y\sec^2\theta\, d\theta^{1}$$

Por otra lado tenemos que

$$y = r\cos\theta \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\cos\theta}{y} \rightarrow \frac{1}{r^3} = \frac{\cos^3\theta}{y^3}$$

Si sustituimos los valores de *dx* y $1/r^3$ en la ecuación de E_y obtenemos:

$$E_y = k\lambda y \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{r^3} = k\lambda y \int_{\theta_1}^{\theta_2} y\sec^2\theta\, d\theta \cdot \left(\frac{\cos^3\theta}{y^3}\right)$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

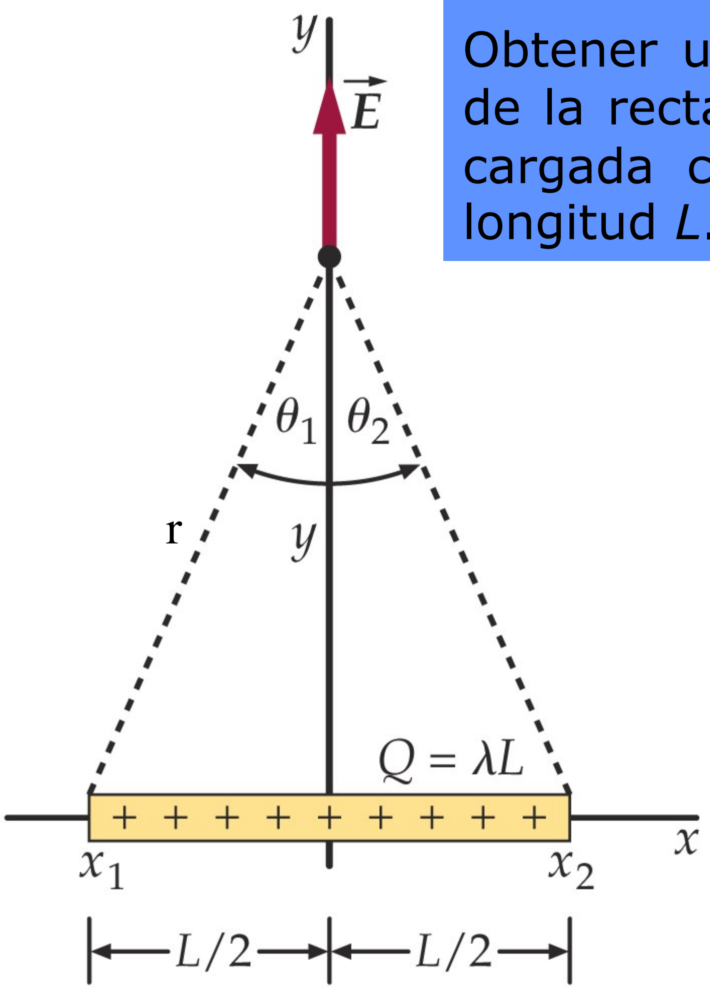
$$E_y = \frac{k\lambda}{y}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta\, d\theta = \boxed{\frac{k\lambda}{y}\left(sen\,\theta_2 - sen\,\theta_1\right)}$$

[1]Hemos usado la relación $d(tg\,\theta)/d\theta = sec^2\theta$.

Campo eléctrico debido a una línea finita cargada

EJEMPLO 22.1

Obtener una expresión del campo eléctrico a lo largo de la recta perpendicular bisectora debido a una línea cargada con densidad de carga lineal uniforme λ y longitud *L*.



$$\text{Considerar}: \theta_2 = -\theta_1 = \theta$$

$$E_y = \frac{k\lambda}{y}\left(sen\theta_2 - sen\theta_1\right) = \frac{k\lambda}{y}\left[sen\theta - sen(-\theta)\right] = \frac{2k\lambda}{y} sen\theta$$

$$sen\theta = \frac{L/2}{r} = \frac{L/2}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}$$

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y}\frac{L/2}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}\hat{j}$$

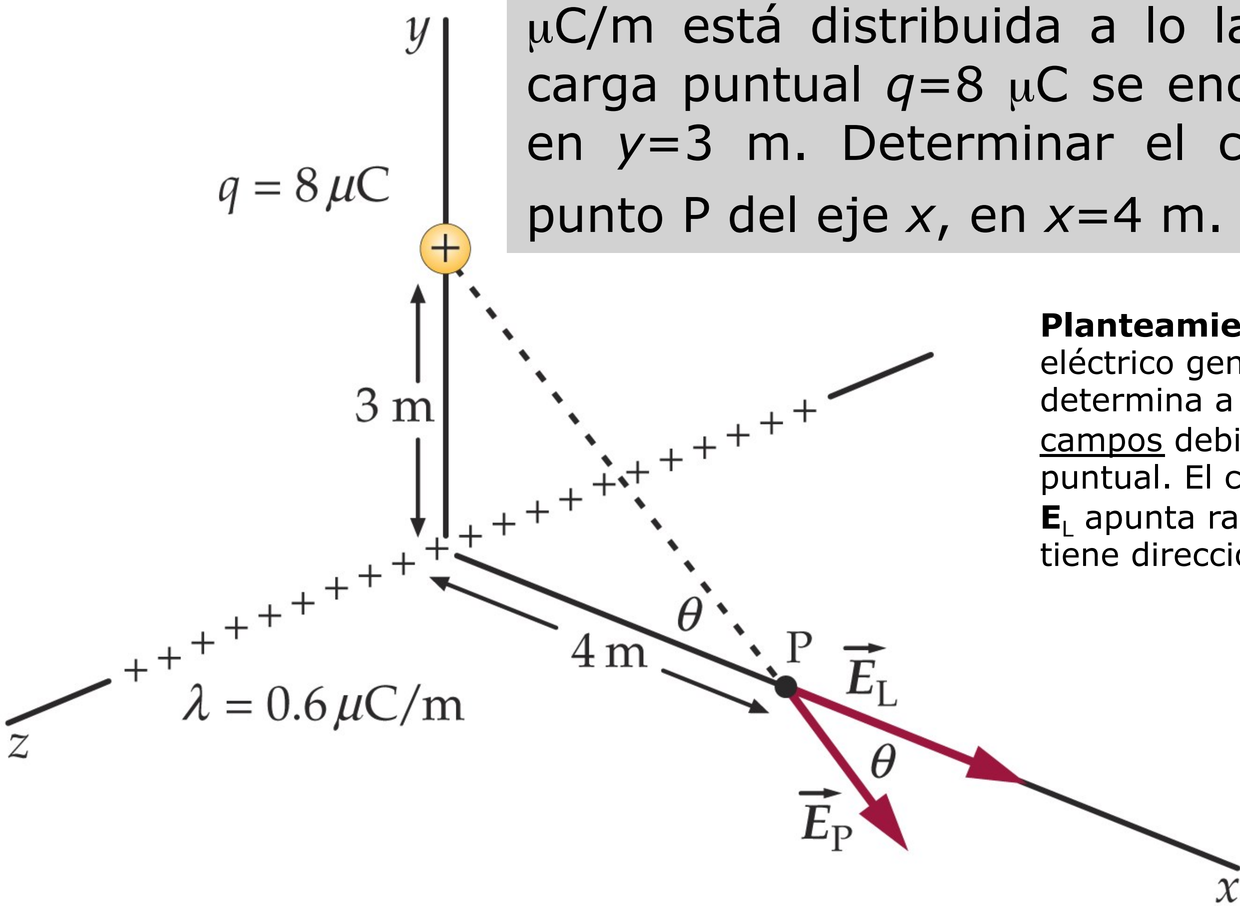
$$E_x = \frac{k\lambda}{y}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right) = \frac{k\lambda}{y}\left[\cos\theta - \cos(-\theta)\right] = 0$$

$$E = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} = \boxed{\frac{2k\lambda}{y}\frac{L/2}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}\hat{j}}$$

Campo **E** debido a una línea cargada y una carga puntual

EJEMPLO 22.3

Una línea cargada infinita de densidad lineal λ=0.6 μC/m está distribuida a lo largo del eje *z*, y una carga puntual *q*=8 μC se encuentra sobre el eje *y* en *y*=3 m. Determinar el campo eléctrico en el punto P del eje *x*, en *x*=4 m.



Planteamiento del problema: El campo eléctrico generado por este sistema se determina a partir de la superposición de los campos debidos a la carga lineal y a la carga puntual. El campo debido a la línea cargada $\mathbf{E}_L$ apunta radialmente alejándose del eje *z* y tiene dirección positiva del eje *x*.

1. Calcular el campo E_L en el punto P debido a un carga lineal infinita

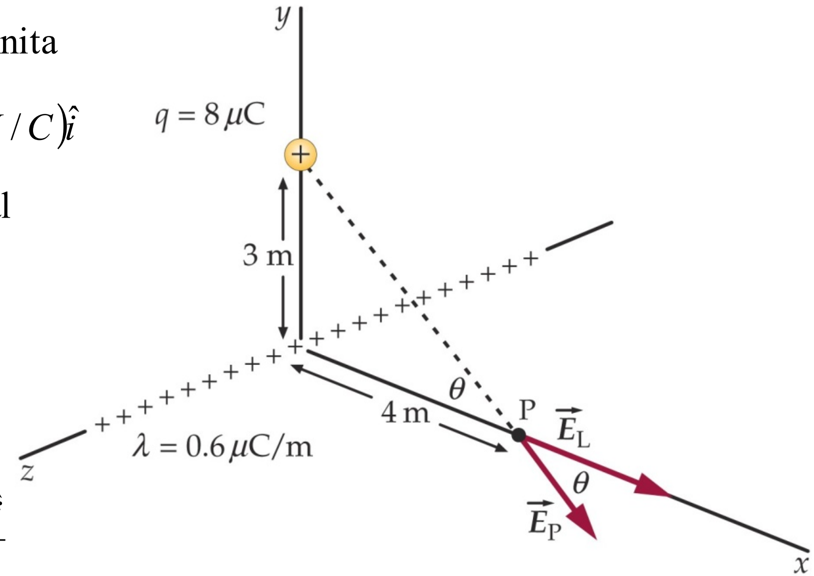
$$E_L = 2k\frac{\lambda}{R}\hat{i} = 2\left(8.99\times10^9\ N\cdot m^2/C^2\right)\frac{\left(6\times10^{-7}\ C/m\right)}{4\,m}\hat{i} = \left(2.70\ kN/C\right)\hat{i}$$

2. Determinar el campo E_P en el punto P debido a la carga puntual

$$E_P = \frac{kq}{r_{q,P}^2}\hat{r}_{q,P}$$

$$\hat{r}_{q,P} = \frac{\vec{r}_{q,P}}{\left|r_{q,P}\right|} = \frac{4\hat{i}-3\hat{j}}{\sqrt{(-3)^2+(4)^2}} = \frac{4\hat{i}-3\hat{j}}{5}$$

$$E_P = \frac{\left(8.99\times10^9\ N\cdot m^2/C^2\right)\left(8\times10^{-6}\ C\right)}{\left(\sqrt{(-3\,m)^2+(4\,m)^2}\right)^2}\hat{r}_{q,P} = \left(2.88\ kN/C\right)\frac{4\hat{i}-3\hat{j}}{5}$$



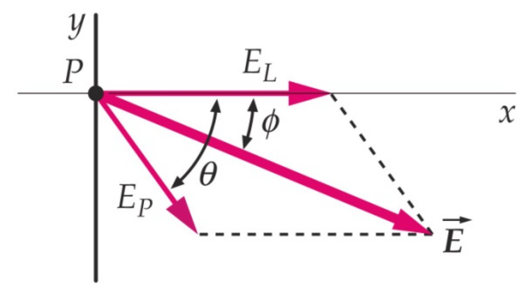
3. Determinar las componentes x y y del campo total

$$E_{P,x} = \left(2.88\ kN/C\right)\left(\frac{4}{5}\right)\hat{i} = \left(2.30\ kN/C\right)\hat{i}$$

$$E_{P,y} = \left(2.88\ kN/C\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\hat{j} = \left(-1.73\ kN/C\right)\hat{j}$$

$$E_x = E_{L,x} + E_{P,x} = \left(2.70\ kN/C\right)\hat{i} + \left(2.30\ kN/C\right)\hat{i} = \boxed{\left(5.00\ kN/C\right)\hat{i}}$$

$$E_y = E_{L,y} + E_{P,y} = 0 + \left(-1.73\ kN/C\right)\hat{j} = \boxed{\left(-1.73\ kN/C\right)\hat{j}}$$



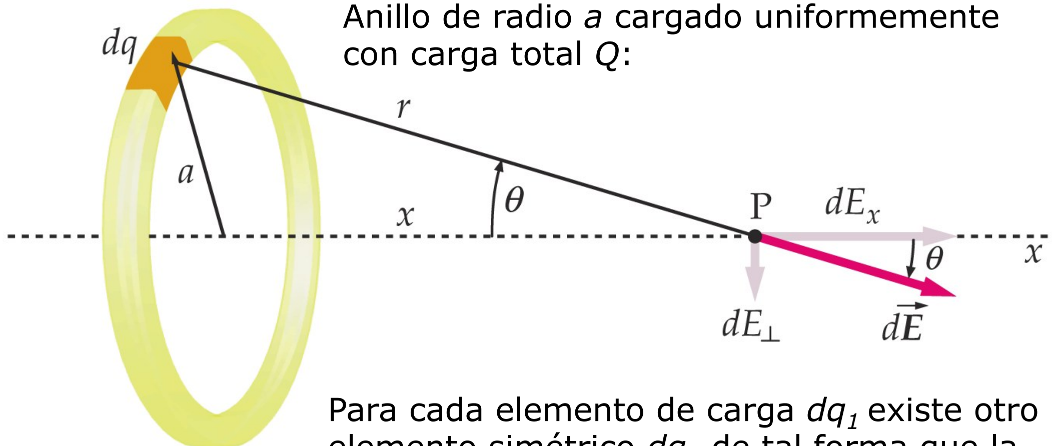
4. Calcular el módulo del campo total

$$E = \sqrt{E_x^{\ 2} + E_y^{\ 2}} = \sqrt{\left(5.00\ kN/C\right)^2 + \left(-1.73\ kN/C\right)^2} = \boxed{5.29\ kN/C}$$

5. Determinar el ángulo ϕ entre el campo y el eje x

$$\phi = arctg\frac{E_y}{E_x} = \boxed{-19.1^\circ}$$

Campo eléctrico sobre el eje de un anillo cargado

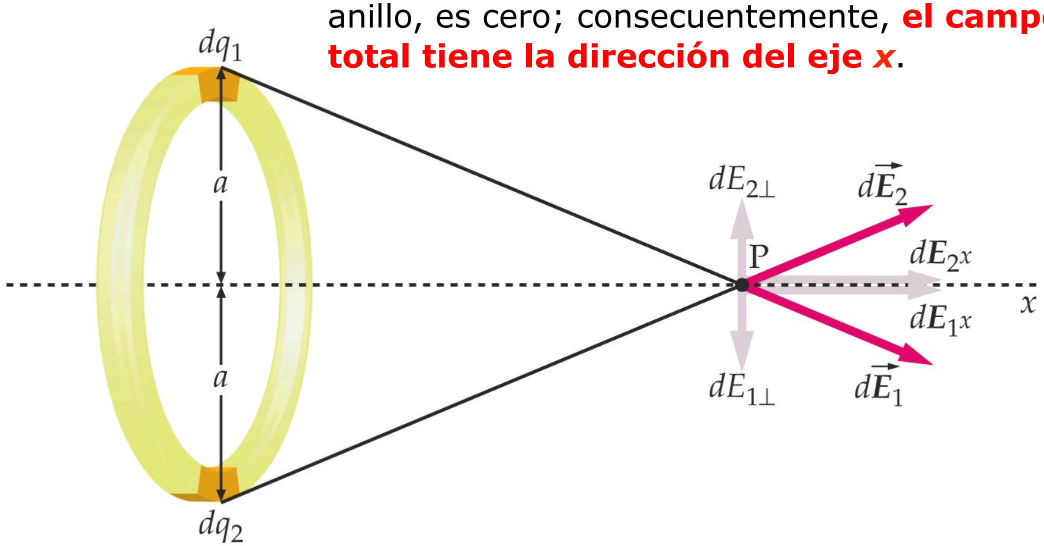


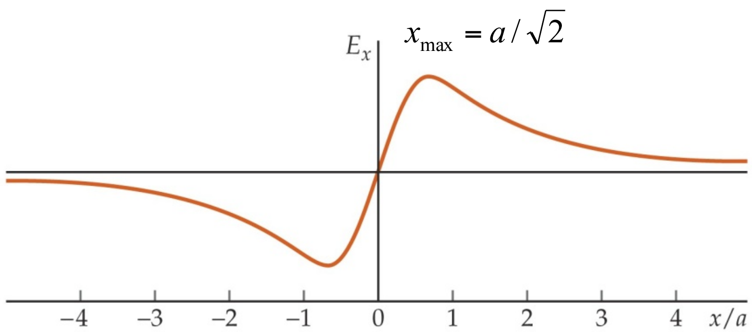
Anillo de radio *a* cargado uniformemente con carga total *Q*:

$$E_x = \frac{kQx}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

COMPO ELÉCTRICO SOBRE EL EJE DE UN ANILLO CARGADO

Para cada elemento de carga dq_1 existe otro elemento simétrico dq_2 de tal forma que la suma de las componentes perpendiculares al eje *x*, generadas por todos los elementos del anillo, es cero; consecuentemente, **el campo total tiene la dirección del eje *x***.





Los elementos diferenciales de la componente perpendicular del campo se anulan por pares.

Opcional

A partir de la simetría de la figura vemos que el campo resultante debido al anillo entero debe estar dirigido a lo largo del eje del anillo, es decir, se anulará la suma de las componentes perpendiculares. La componente axial del campo debido al elemento de carga indicado es:

$$dE_x = \left|d\mathbf{E}\right|\cos\theta = \frac{kdq}{r^2}\cos\theta = \frac{kdq}{r^2}\,\frac{x}{r} = \frac{kdqx}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

en donde

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

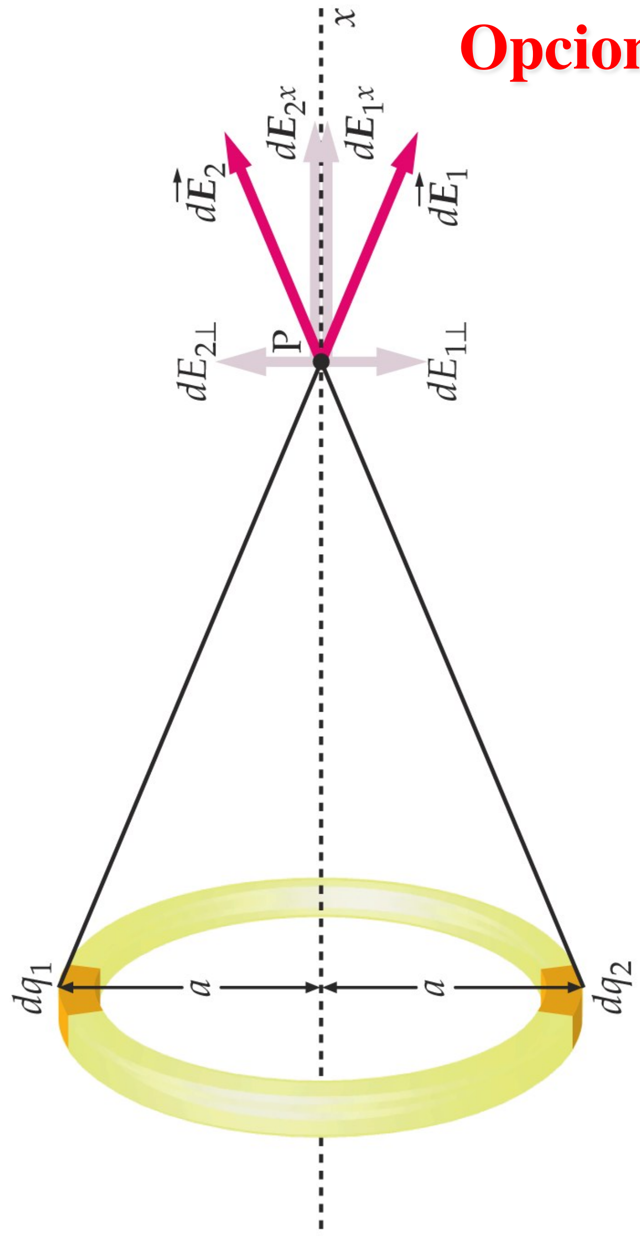
$$r = \sqrt{x^2+a^2} \quad \rightarrow \quad r^3 = \left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

El campo eléctrico debido al anillo completo cargado es:

$$E_x = \int \frac{kxdq}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$

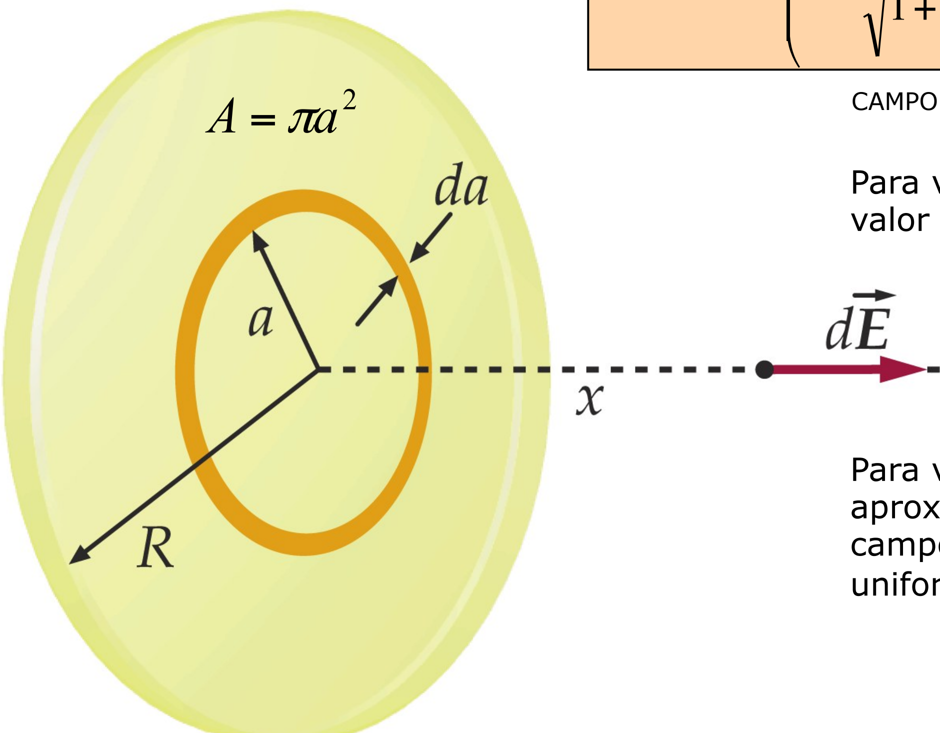
Como x no varía al integrar para los elementos de carga, podemos sacarle fuera de la integral y, por lo tanto,

$$E_x = \frac{kx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}\int dq = \boxed{\frac{kQx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}}$$



Campo eléctrico en el eje de un disco uniformemente cargado

El disco se puede considerar como si estuviera formado por una serie de **cargas anulares concéntricas**.



$$\boxed{E_x = 2\pi k\sigma\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{R^2}{x^2}}}\right),\quad x>0;\quad E_x = -2\pi k\sigma\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{R^2}{x^2}}}\right),\quad x<0}$$

CAMPO ELÉCTRICO **E** EN EL EJE DE UN DISCO UNIFORMEMENTE CARGADO

Para valores de **<u>x grandes</u>** (x>>R), E_x se aproxima al valor de una <u>carga puntual</u> Q colocada en el origen:

$$\boxed{E_x = \frac{kQ}{x^2},\quad x >> R}$$

Se utiliza el desarrollo en serie del binomio $(1+\varepsilon)^n \approx 1+n\varepsilon$ para $|\varepsilon| << 1$:

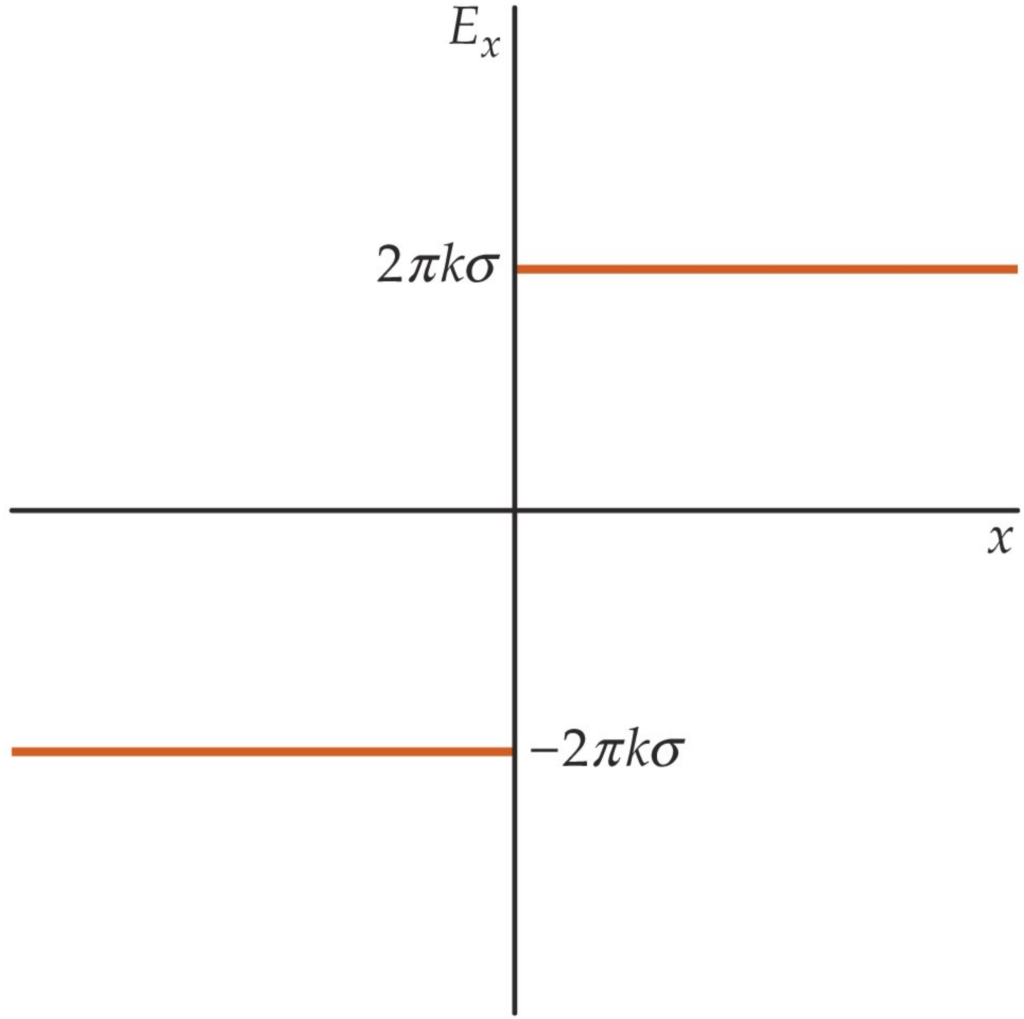
$$\left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1-\frac{R^2}{2x^2}$$

Para valores de **<u>x pequeños</u>** ($R/x\rightarrow\infty$, $n/\infty=0$), E_x se aproxima al valor de un <u>plano infinito de carga</u>. El campo no depende de x (es decir, el campo eléctrico es uniforme) y existe una discontinuidad en E_x de $4\pi k\sigma$:

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= 2\pi k\sigma,\quad x>0 \\ E_x &= -2\pi k\sigma,\quad x<0 \end{aligned}}$$

CAMPO **E** EN LAS PROXIMIDADES DE UN PLANO INFINITO DE CARGA

Discontinuidad de **E** en un plano infinito de carga



Campo eléctrico en el eje de un disco con carga uniforme

EJEMPLO 22.4

Un disco de radio 5 cm es portador de una densidad superficial uniforme de valor 4 μC/m^2. Utilizando aproximaciones razonables, determinar **E** sobre el eje del disco a distancia de (a) 0.01 cm, (b) 0.03 cm, (c) 6 m. Comparar los resultados con los valores exactos a los que se llega utilizando la ecuación:

Planteamiento del problema: A grandes distancias el campo debido al disco debe tender al de una carga puntual y debe ser igual al del plano infinito cargado en el limite cuando x→0. Para calcular el valor exacto del campo eléctrico en puntos especificos se utilizará la siguente expresión para $E_{x(\text{exacta})}$:

$$E_{x(exacta)} = 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}}\right)$$

Campo debido a un plano infinito de carga:

$$d = 0.01\,cm$$

$$E_x^{aprox.} \approx 2\pi k\sigma = 2\pi\left(8.98755\times10^9\,N\cdot m^2/C^2\right)\left(4\times10^{-6}\,C/m^2\right) = \underline{225.88}\,k\mathrm{N/C}$$

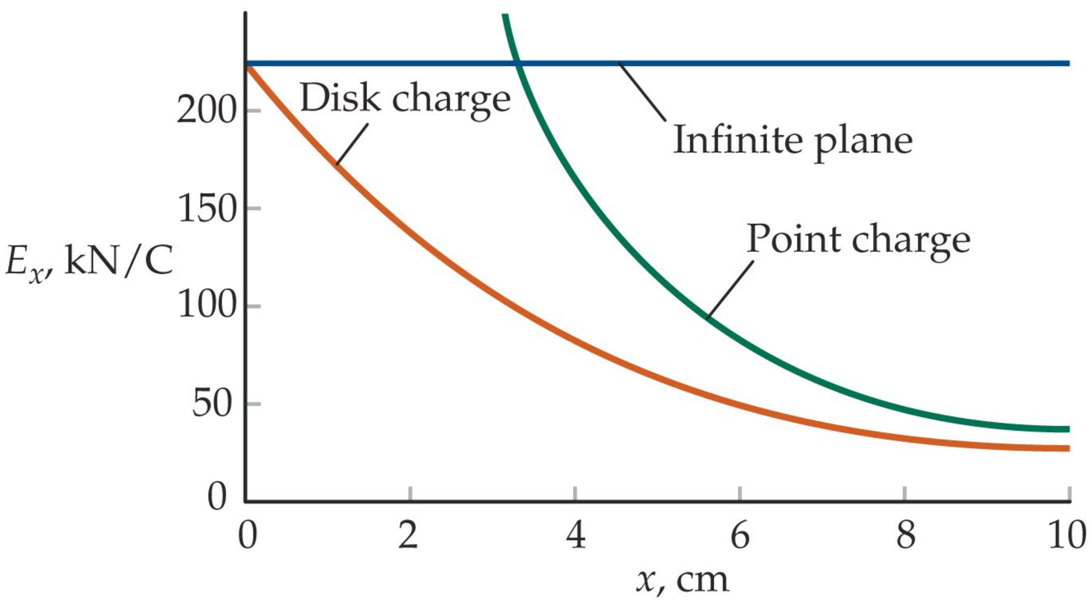
$$d = 0.03\,cm$$

$$E_x^{aprox.} \approx 2\pi k\sigma = \underline{225.88}\,k\mathrm{N/C}$$

Campo debido a una carga puntual:

$$d = 600\,cm$$

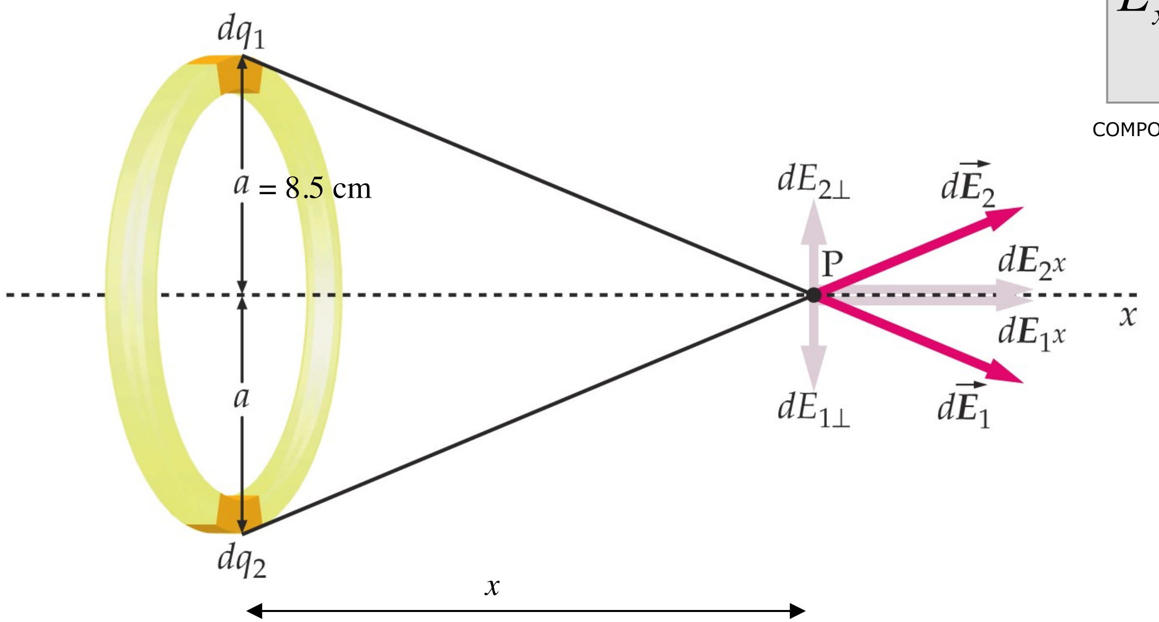
$$E_x^{aprox.} \approx \frac{kQ}{x^2} = \frac{k\sigma\pi R^2}{x^2} = 2\pi k\sigma\frac{R^2}{2x^2} = \left(225.88\,k\mathrm{N/C}\right)\frac{(0.05\,\mathrm{m})^2}{2(6\,\mathrm{m})^2} = \underline{7.84}\,k\mathrm{N/C}$$



x (cm)	E_x (exacta) (kN/C)	E_x (aprox.) (kN/C)	% dif.
0.01	225.43	225.88	0.2
0.03	224.53	225.88	0.6
600	7.84	7.84	0.005

PROBLEMA 19

Una carga de 2.75 μC está uniformemente distribuida sobre un anillo de radio 8.5 cm. Determinar el campo eléctrico generado sobre el eje a (*a*) 1.2 cm, (*b*) 3.6 cm y (*c*) 4.0 m del centro del anillo. (*d*) Determinar el campo a 4.0 m con la aproximación de que el anillo es una carga puntual en el origen y comparar el resultado con el obtenido en (*c*).

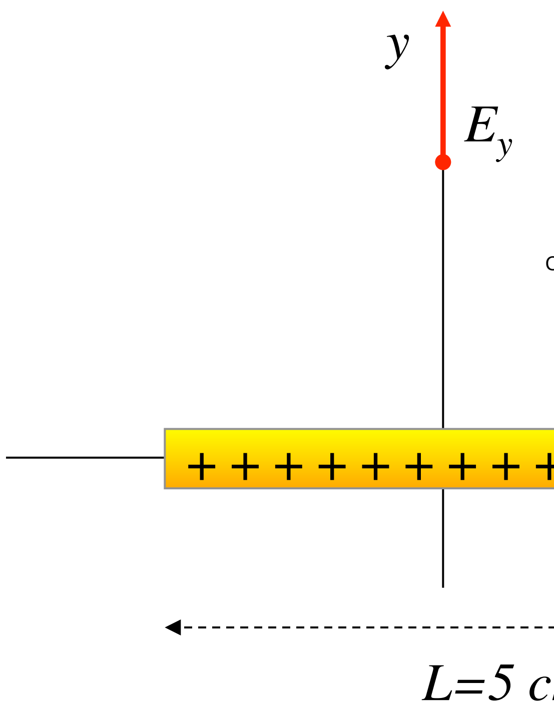


$$E_x = \frac{kQx}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

COMPO ELÉCTRICO SOBRE EL EJE DE UN ANILLO CARGADO

PROBLEMA 21

Una carga lineal uniforme se extiende desde *x*=-2.5 cm a *x*=+2.5 cm y posee una densidad de carga lineal λ=6.0 nC/m. (*a*) Determinar la carga total. Hallar el campo eléctrico generado sobre el eje *y* en (*b*) *y*=4 cm, (*c*) *y*=12 cm y (*d*) *y*=4.5 m. (*e*) Determinar el campo eléctrico en *y*=4.5 m suponiendo que la carga es puntual y comparar el resultado con el obtenido en *(d)*.



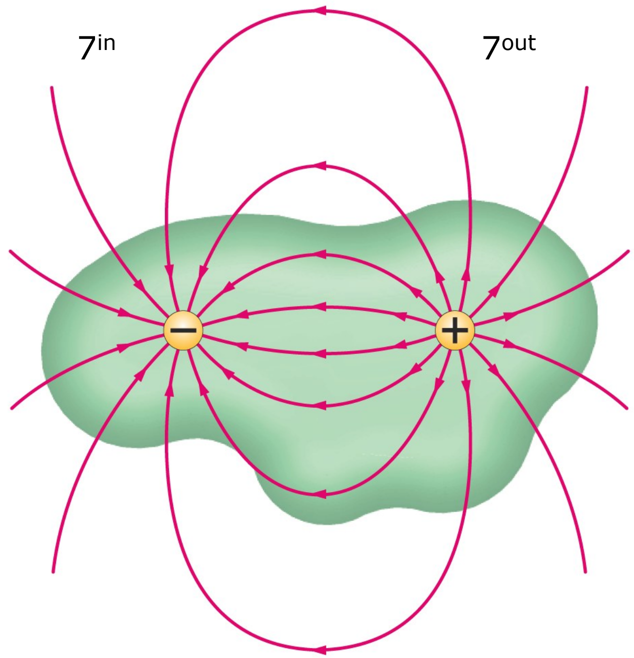
$$E_y(y) = \frac{2k\lambda}{y} \frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}L\right)^2 + y^2}}$$

CAMPO ELÉCTRICO A LO LARGO DE UNA RECTA ⊥ BISECTORA DE UNA LÍNEA DE CARGA FINITA (VÉASE EL **EJEMPLO 22.1**)

22-2
Ley de Gauss

Enunciado cualitativo de la Ley de Gauss

Johann Carl Friedrich Gauss, matemático, astrónomo y físico alemán (1777-1855)



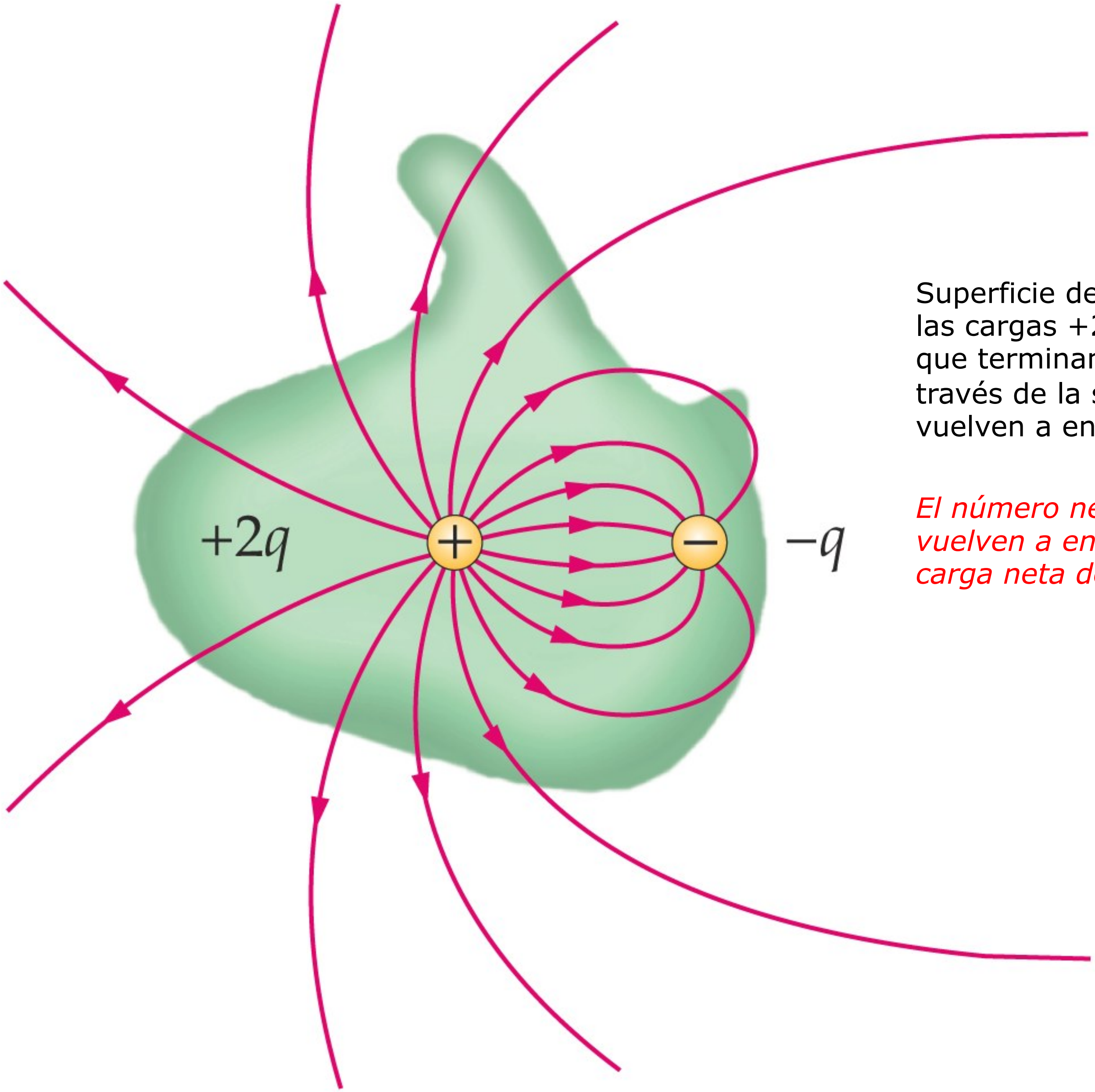
Dipolo eléctrico encerrado en una superficie de forma arbitraria**. El número de líneas que abandonan la superficie es exactamente igual al número de líneas que entran** en ella sin que importe donde se dibuje la superficie, siempre que se encierren dentro de ella ambas cargas del dipolo.

Se entiende por **superficie cerrada** aquella que divide el espacio en dos regiones diferentes, la interior y la exterior.

> *El número neto de líneas que salen por cualquier superficie que encierra las cargas es proporcional a la carga encerrada dentro de dicha superficie*.

ENUNCIADO CUALITATIVO DE LA LEY DE GAUSS

Para cargas estáticas la **ley de Gauss** y la **ley de Coulomb** son equivalentes. Sin embargo, la ley de Gauss es más general, pues también puede aplicarse a distribuciones de cargas no estáticas.

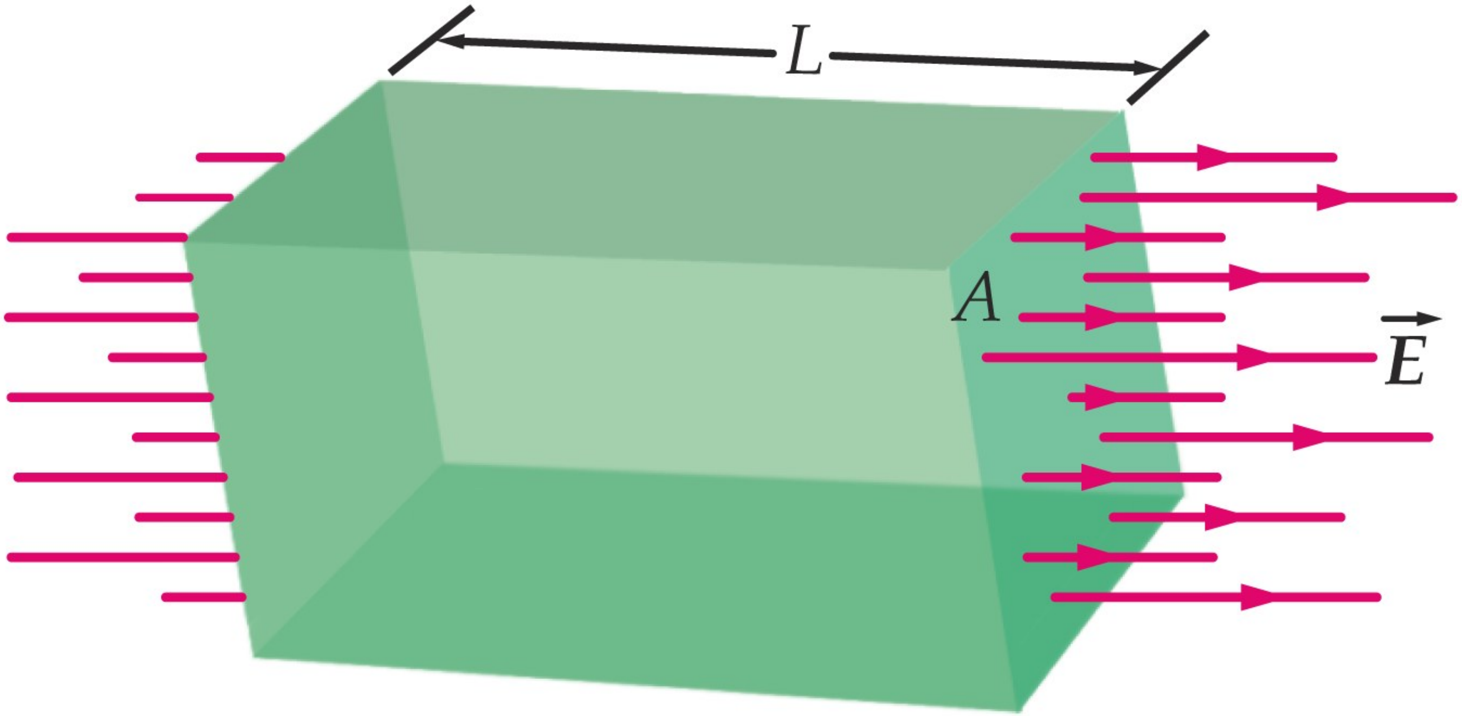


Superficie de forma arbitraria que incluye las cargas +2q y −q. Las líneas de campo que terminan en −q o bien no pasan a través de la superficie o bien salen y vuelven a entrar.

El número neto de líneas que salen y no vuelven a entrar es proporcional a la carga neta dentro de la superficie.

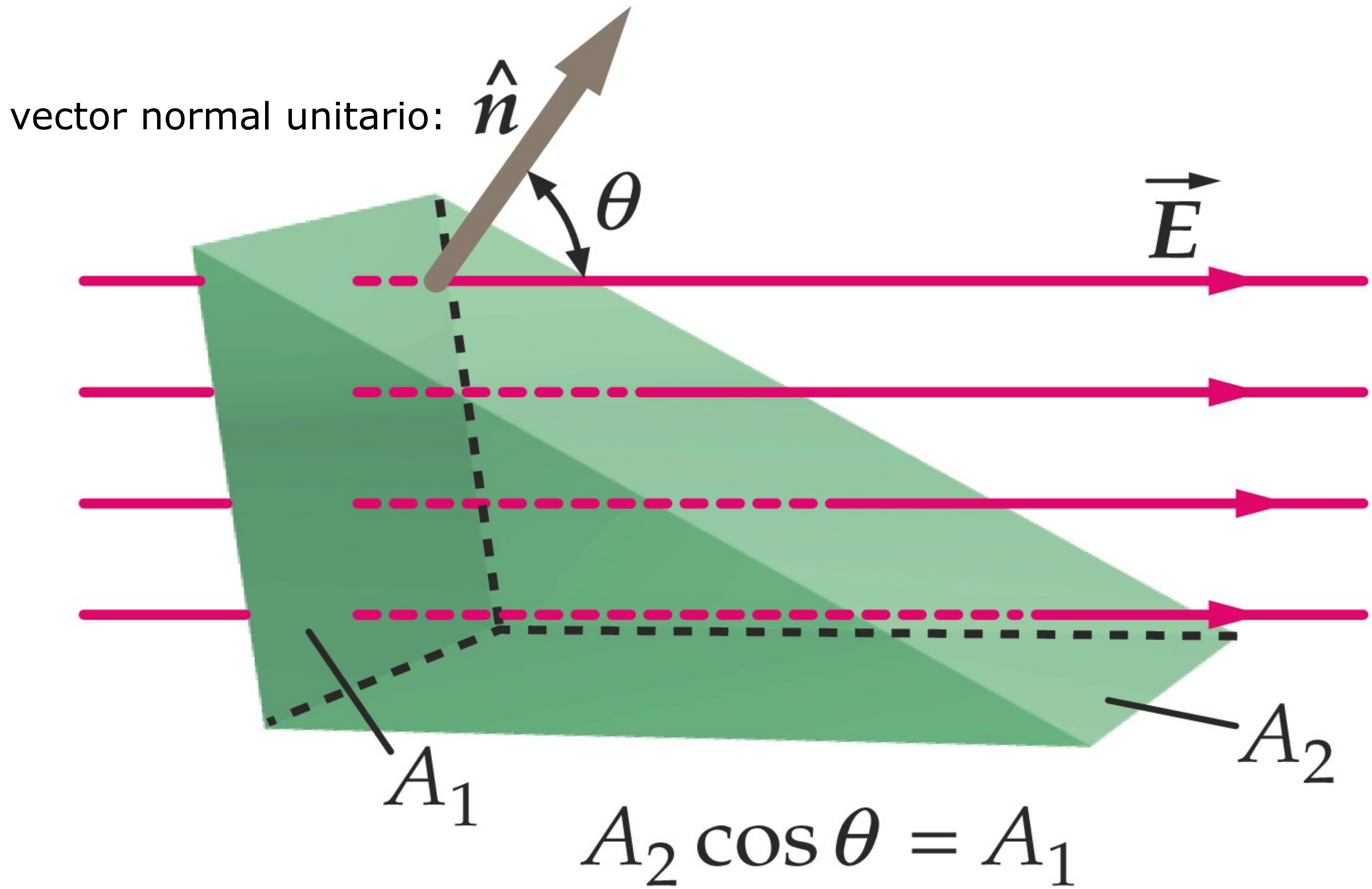
Flujo eléctrico, ϕ

La magnitud matemática que está relacionada con el número de líneas de campo que atraviesa una superficie se llama **flujo eléctrico**, ϕ.



$$\phi = EA$$

Las unidades SI del flujo son ($N{\cdot}m^2/C$)



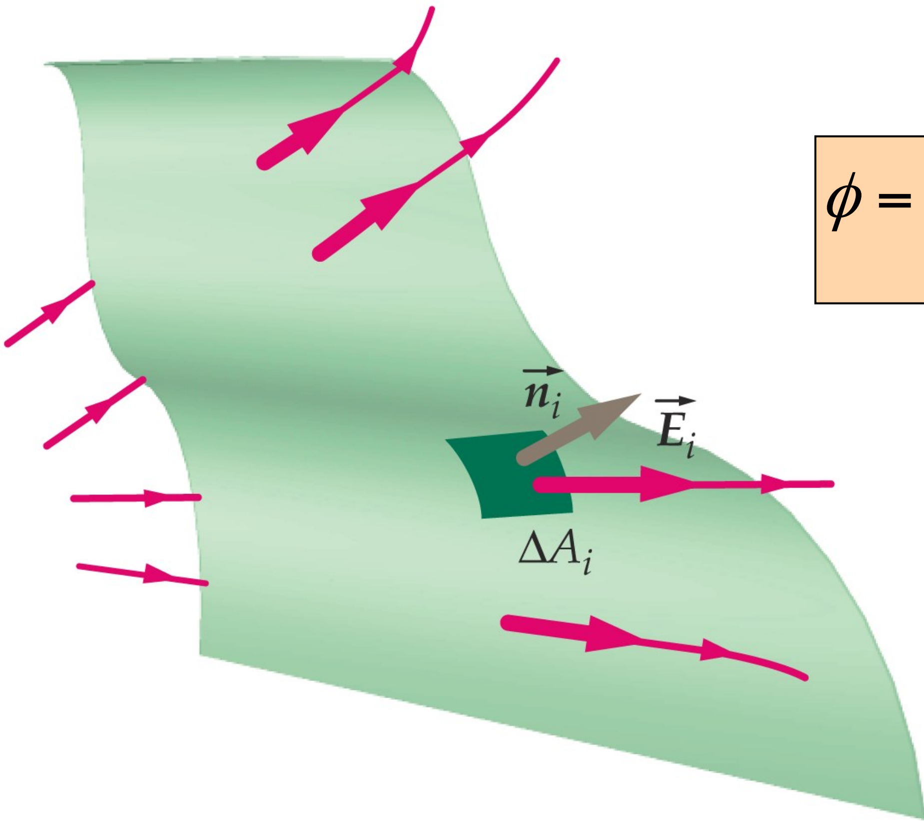
$$\phi = E \cdot \hat{n} A = EA\cos\theta = E_n A$$

E_n es la componente $\perp$ al área.

Nótese que el flujo que atraviesa A_2 es el mismo que pasa por A_1.

Definición de flujo eléctrico

Superficie de forma arbitraria sobre la cual el campo **E** puede variar:



$$\Delta\phi_i = E_{ni}\Delta A_i = E_i \cdot \hat{n}_i \Delta A_i$$

$$\boxed{\phi = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i E_i \cdot \hat{n}_i \Delta A_i = \int_S E \cdot \hat{n}\, dA}$$

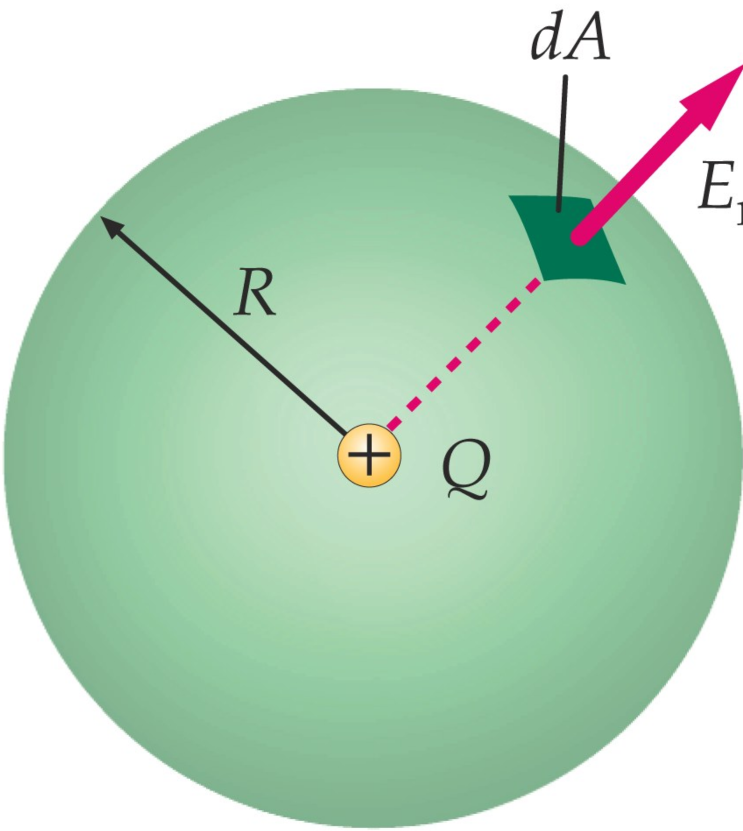
DEFINICIÓN-FLUJO ELÉCTRICO

$$\boxed{\phi_{neto} = \oint_S E \cdot \hat{n}\, dA = \oint_S E_n\, dA}$$

Si el elemento de área ΔA_i que elegimos es suficientemente pequeño, podemos considerarle como un **plano** y la variación del campo eléctrico a través del elemento puede despreciarse.

El vector normal unitario **n** se define de modo que está **dirigido hacia fuera** en cada punto. Si **E** está dirigido hacia dentro (fuera), $\mathbf{E_n}$ es negativo (positivo).

Enunciado cuantitativo de la Ley de Gauss



$$E_n = \frac{kQ}{R^2}$$

E_n puede salir de la integral por ser constante en todos los puntos.

$$\phi_{neto} = \oint_S E_n dA = E_n \oint_S dA = E_n \cdot 4\pi R^2$$

$$\phi_{neto} = \frac{kQ}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi kQ$$

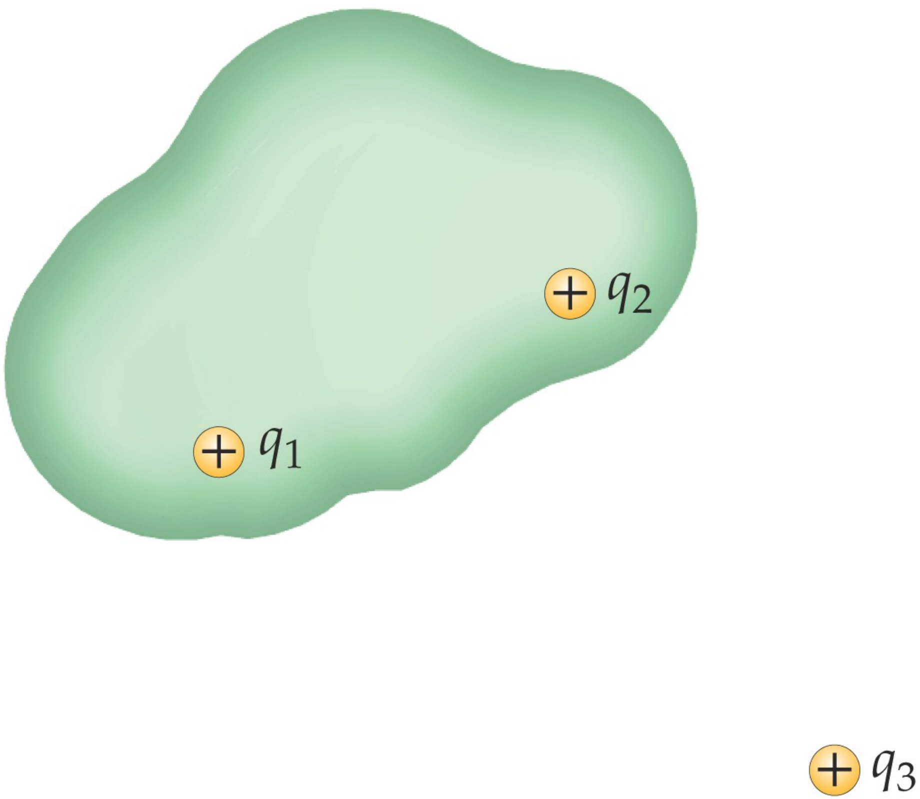
$$\boxed{\phi_{neto} = \oint_S E_n dA = 4\pi k Q_{\text{interior}}}$$

LEY DE GAUSS

*El **flujo neto** a través de cualquier superficie es igual a **4πk** veces la carga neta dentro de la superficie.* El flujo neto es independiente del radio de la esfera.

En matemática, una **integral de línea** (**circulación**) es aquella integral cuya función es evaluada sobre una curva, o sea, sobre una trayectoria cerrada. $\oint_S$

Superficie con tres cargas puntuales



Puesto que el campo eléctrico en cualquier punto de la superficie es el vector suma de los campos eléctricos producidos por cada una de las tres cargas, el flujo neto a través de la superficie es precisamente la suma de los flujos debidos a las cargas individuales:

$$\phi_{neto} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$

$$\phi_1 = 4\pi k q_1$$

$$\phi_2 = 4\pi k q_2$$

$$\phi_3 = 0$$

$$\boxed{\phi_{neto} = 4\pi k\left(q_1 + q_2\right)}$$

Cada línea de fuerza procedente de q_3 entra en la superficie en un punto y abandona la misma en algún otro punto ($\phi_3=0$).

Permitividad del vacío, ε_o

La **permitividad** es una cantidad física que describe cómo un campo eléctrico afecta y es afectado por un **medio**. Es costumbre escribir la constante de Coulomb *k* en función de esta constante ε_o:

$$\boxed{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}}$$

$$\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi\left(8.99\times10^{9}\ N\cdot m^2/C^2\right)} = 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C}^2/N\cdot m^2$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\hat{r}}$$

LEY DE COULOMB

$$\boxed{\phi_{neto} = \oint_S E_n dA = \frac{1}{\varepsilon_o} Q_{\mathrm{interior}}}$$

LEY DE GAUSS

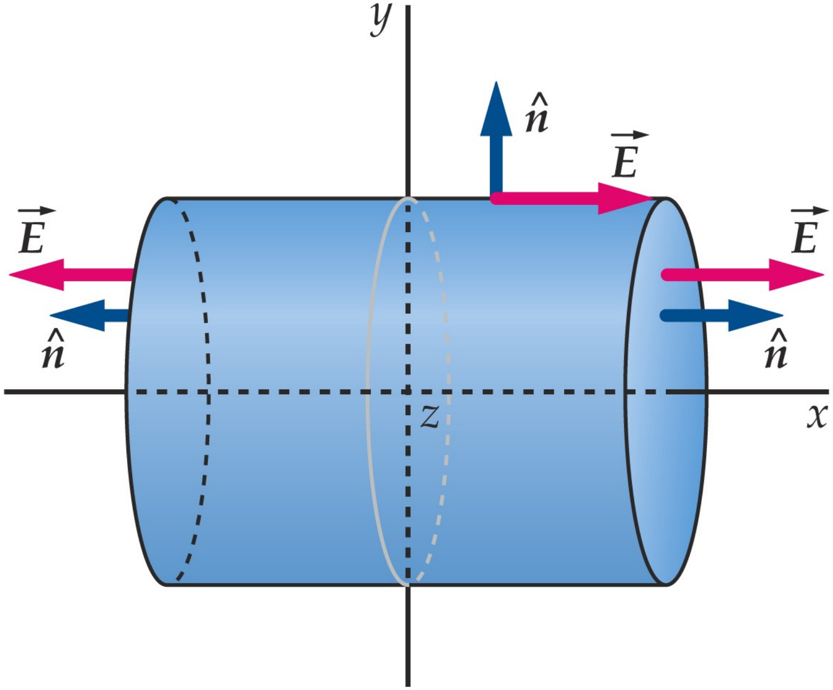
Válida solo en distribuciones de carga estáticas.

Válida para calcular **E** en distribuciones de carga con altos grados de simetría. También puede aplicarse a distribuciones de carga no estáticas.

Flujo a través de una superficie cilíndrica cerrada

EJEMPLO 22.5

Un campo eléctrico vale E=(200 N/C)**i** para x>0 y E=(-200 N/C)**i** para x<0. Un cilindro imaginario de longitud 20 cm y radio R=5 cm tiene su centro en el origen y su eje a lo largo del eje x, de modo que un extremo se encuentra en x=+10 cm y el otro en x=-10 cm. (a) ¿Cuál es el flujo neto del campo eléctrico que atraviesa la superficie total cerrada del cilindro? (b) ¿Cuál es la carga neta interior al cilindro?



Planteamiento del problema: La superficie cerrada que se describe se compone de tres piezas: dos bases y una superficie curvada. Calcular el flujo de **E** a través de cada pieza por separado.

$$\phi = E \cdot \hat{n}\ \mathrm{A}$$

$$\phi_{neto} = \frac{Q_{interior}}{\varepsilon_o}$$

1. Calcular el flujo que sale de la base derecha del cilindro, cuyo vector unitario es $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{i}$

$$\phi_{der} = \mathbf{E}_{der} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{der} \; A = \mathbf{E}_{der} \cdot \mathbf{i}\pi R^2$$
$$= (200\ N/C)\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}(\pi)(0.05\ m)^2$$
$$= 1.57\ N \cdot m^2 / C$$

2. Calcular el flujo que sale de la base izquierda del cilindro, cuyo vector unitario es $\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{i}$

$$\phi_{izq} = \mathbf{E}_{izq} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{izq} \; A = \mathbf{E}_{izq} \cdot (-\mathbf{i})\pi R^2$$
$$= (-200\ N/C)\mathbf{i} \cdot (-\mathbf{i})(\pi)(0.05\ m)^2$$
$$= 1.57\ N \cdot m^2 / C$$

3. El flujo a través de la superficie curva es cero, ya que $\mathbf{E}$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}$

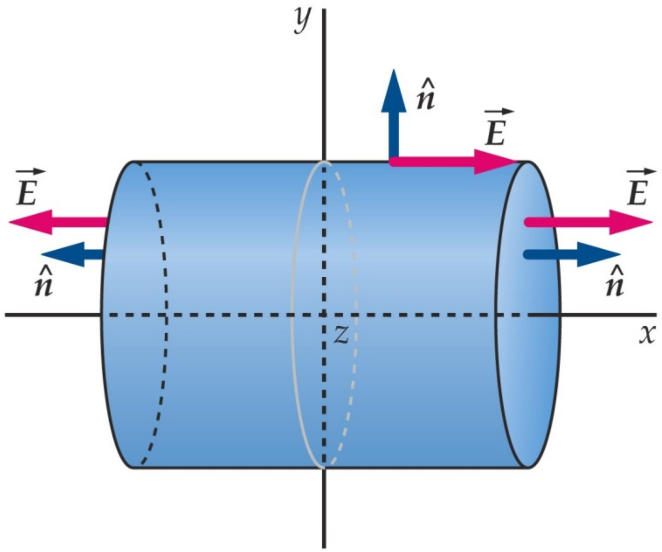
$$\phi_{curva} = \mathbf{E}_{curva} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{curva} \; A = 0$$

4. El flujo total es la suma de flujos a través de todas las superficies

$$\phi_{neto} = \phi_{der} + \phi_{izq} + \phi_{curva}$$
$$= 1.57\ N \cdot m^2 / C + 1.57\ N \cdot m^2 + 0$$
$$= \boxed{3.14\ N \cdot m^2 / C}$$

5. La ley de Gauss relaciona la carga interior con el flujo neto

$$Q_{\text{interior}} = \varepsilon_o \phi_{neto}$$
$$= (8.85 \times 10^{-12}\ C^2 / N \cdot m^2)(3.14\ N \cdot m^2 / C)$$
$$= \boxed{2.78 \times 10^{-11}\ C = 27.8\ pC}$$



Observaciones: El flujo no depende de la longitud del cilindro (20 cm), lo cual significa que la carga se ubica totalmente en el plano *yz*.

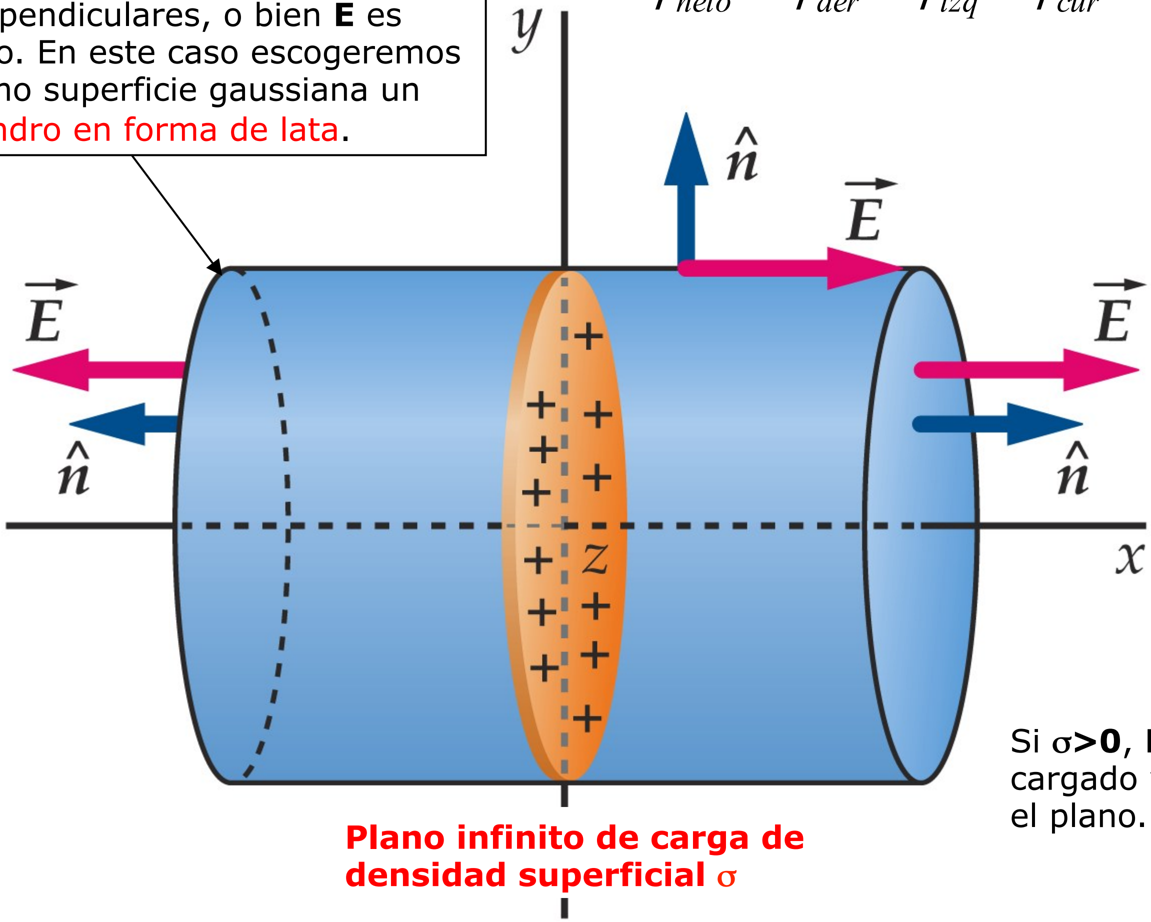
22-3
Cálculo de **E** mediante la Ley de Gauss

Simetría plana

Superficie Gaussiana: superficie cerrada imaginaria en la que en cada una de sus partes, o bien $\mathbf{E_n}$ es constante y **E** y **n** son paralelos o perpendiculares, o bien **E** es cero. En este caso escogeremos como superficie gaussiana un cilindro en forma de lata.

$$Q = \sigma A$$

$$\phi_{neto} = \phi_{der} + \phi_{izq} + \phi_{cur} = E_n A + E_n A + 0 = 2E_n A$$



$$Q_{\text{interior}} = \varepsilon_o \phi_{neto}$$

$$\sigma A = \varepsilon_o 2E_n A$$

$$\boxed{E_n = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} = 2\pi k\sigma}$$

CAMPO ELÉCTRICO **E** PRÓXIMO A UN PLANO INFINITO DE CARGA

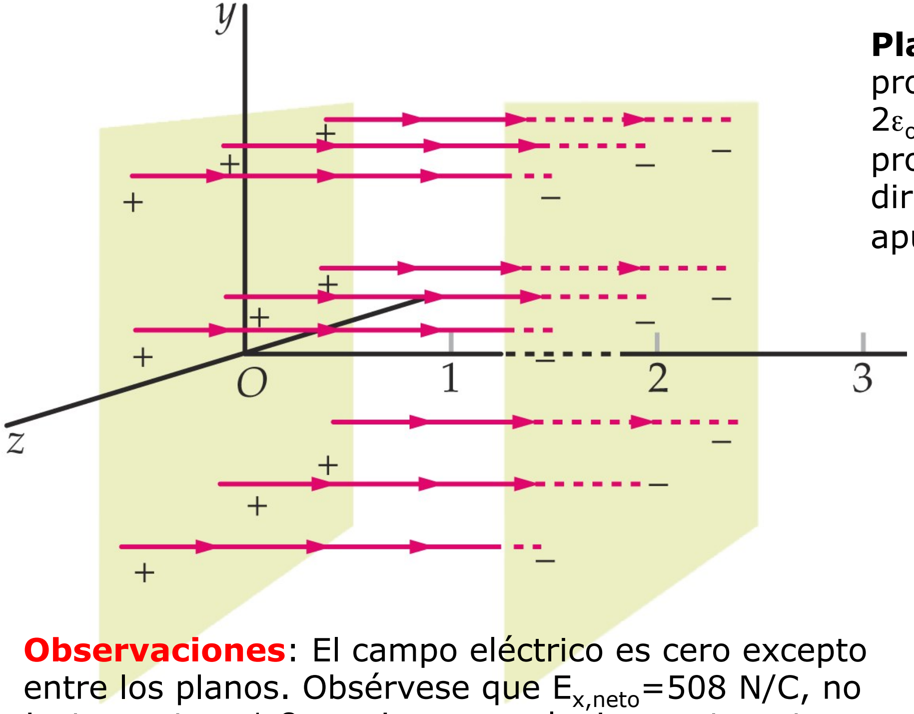
Si σ**>0**, **E** se dirige hacia fuera del plano cargado y si σ**<0** el campo apunta hacia el plano.

Plano infinito de carga de densidad superficial σ

Campo eléctrico debido a dos planos infinitos

EJEMPLO 22.6

En la figura, un plano infinito de densidad de carga superficial σ=+4.5 nC/m^2 coincide con el plano *yz* en el origen, y un segundo plano infinito de densidad de carga superficial σ=-4.5 nC/m^2 se localiza en un plano paralelo al plano *yz* en *x*=2 m. Determinar el campo eléctrico en (*a*) *x*=1.8 m y (*b*) *x*=5 m.



Planteamiento del problema: Cada uno de los planos produce un campo eléctrico uniforme de módulo **E=**$\sigma/2\varepsilon_o$. **(a)** Entre los planos, los campos se suman, produciendo un campo neto de módulo σ/ε_o en la dirección *x* positiva. **(b)** Para *x*>2 m o *x*<0, los campos apuntan en direcciones opuestas y se cancelan.

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} = \frac{4.5\times10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}}{2\left(8.85\times10^{-12}\ C^2/N\cdot m^2\right)} = 254\ \mathrm{N/C}$$

$$x = 1.8\ m$$

$$E_{x,\ neto} = E_1 + E_2 = 254\ \mathrm{N/C} + 254\ \mathrm{N/C} = \boxed{508\ \mathrm{N/C}}$$

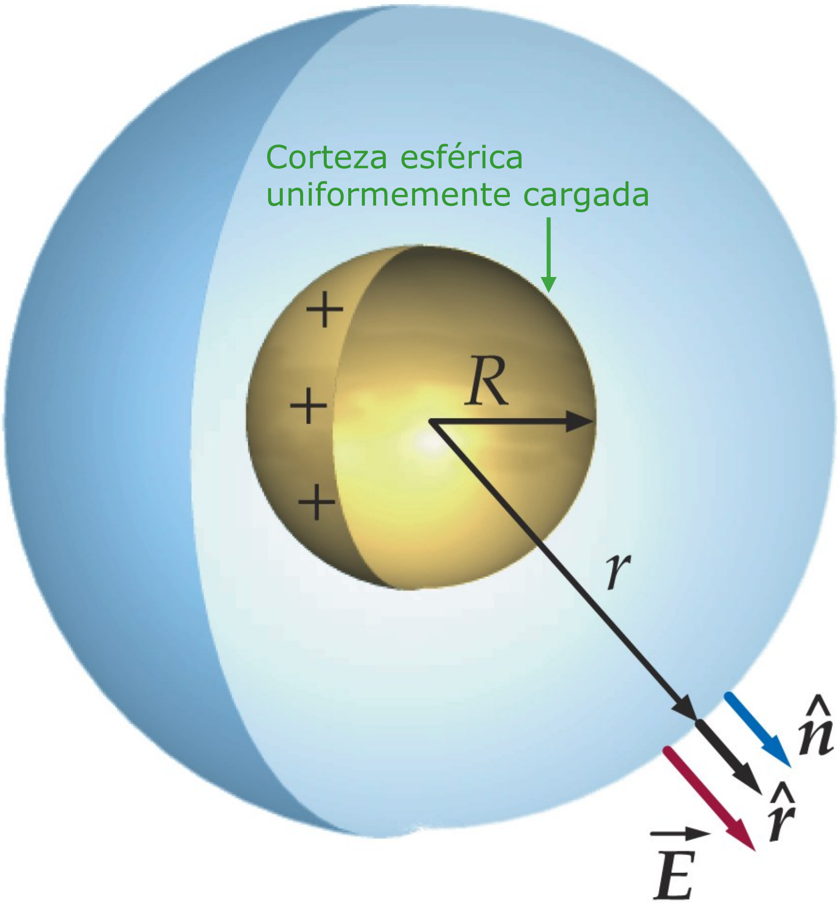
$$x = 5.0\ m$$

$$E_{x,\ neto} = E_1 - E_2 = \boxed{0}$$

Observaciones: El campo eléctrico es cero excepto entre los planos. Obsérvese que $E_{x,neto}$=508 N/C, no justamente a 1.8 m, sino en cualquier punto entre los planos.

Simetría esférica

Superficie Gaussiana esférica: por simetría, **E** es *radial* y su módulo depende sólo de la distancia a la carga.



$$\phi_{neto} = \oint_S E \cdot \hat{n}\, dA = \oint_S E_r\, dA = E_r \int_S dA = E_r 4\pi r^2$$

$$\phi_{neto} = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

$$\boxed{E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{r^2}}$$

LEY DE COULOMB

Así pues, **hemos deducido la Ley de Coulomb a partir de la Ley de Gauss**. Ambas leyes son equivalentes para cargas estáticas.

Campo eléctrico debido a una corteza esférica

Si elegimos una superficie gaussiana esférica exterior (**r>R**):

$$\phi_{neto} = \oint_S E_r\, dA = E_r \oint_S dA = E_r 4\pi r^2$$

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$\boxed{E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}, \quad r > R}$$

CAMPO ELÉCTRICO **E** EXTERIOR A UNA CORTEZA ESFÉRICA DE CARGA

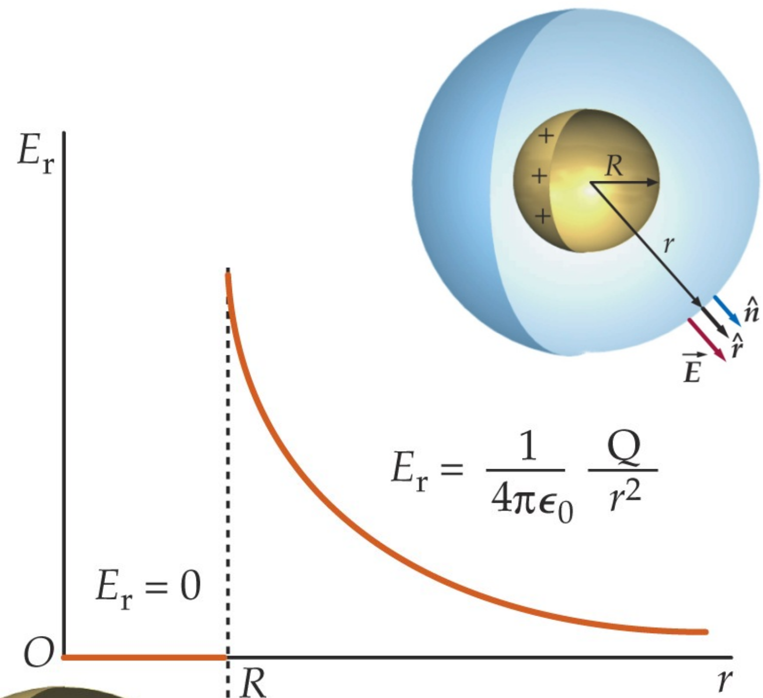
Si elegimos una superficie gaussiana esférica interior (**r<R**):

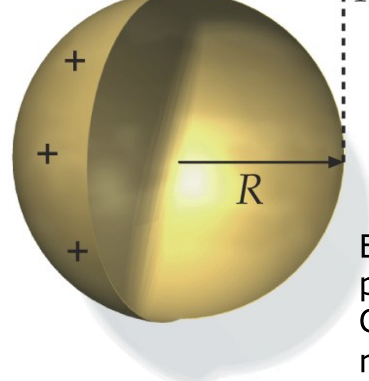
$$\phi_{neto} = \oint_S E_r\, dA = E_r \oint_S dA = E_r 4\pi r^2$$

$$E_r 4\pi r^2 = 0 \longleftarrow$$ La carga total dentro la esfera es cero

$$\boxed{E_r = 0, \quad r < R}$$

CAMPO ELÉCTRICO **E** EN EL INTERIOR DE UNA CORTEZA ESFÉRICA DE CARGADA



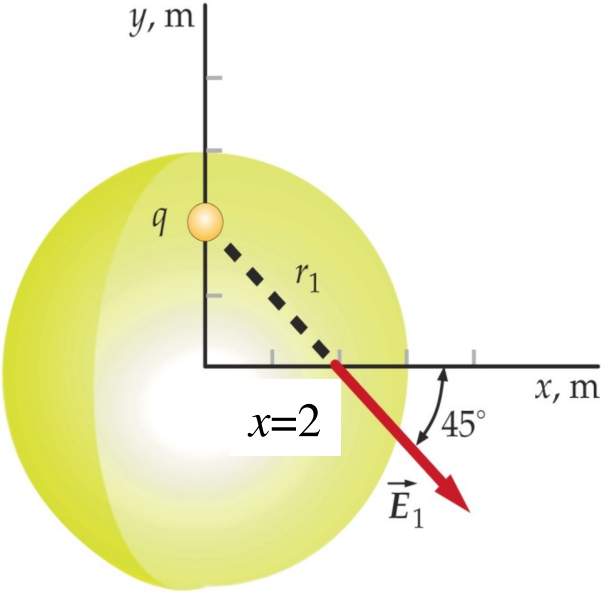


El campo eléctrico es **discontinuo** para ***r=R***.

Estos resultados pueden obtenerse por integración directa de la ley de Coulomb, pero el cálculo es mucho más difícil.

Campo eléctrico debido a una carga puntual y una corteza esférica

EJEMPLO 22.7
Un corteza esférica de radio *R*=3 m tiene su centro en el origen y contiene una densidad de carga superficial σ=3 nC/m². Una carga puntual *q*=250 nC se encuentra sobre el eje *y* en *y*=2 m. Determinar el campo eléctrico en el eje *x* en (a) *x*=2 m y (b) *x*=4 m.



(a) Dentro de la corteza $\mathbf{E_1}$ es debido sólo a la carga puntual *q*:

$$r_1^2 = (2\,m)^2 + (2\,m)^2 = 8\,m^2$$

$$E_1 = \frac{kq}{r_1^2}\hat{r}_1 = \frac{(8.99\times10^9\ \mathrm{N}\cdot m^2/C^2)(250\times10^{-9}\ \mathrm{C})}{8\,m^2} = 281\,\mathrm{N/C}$$

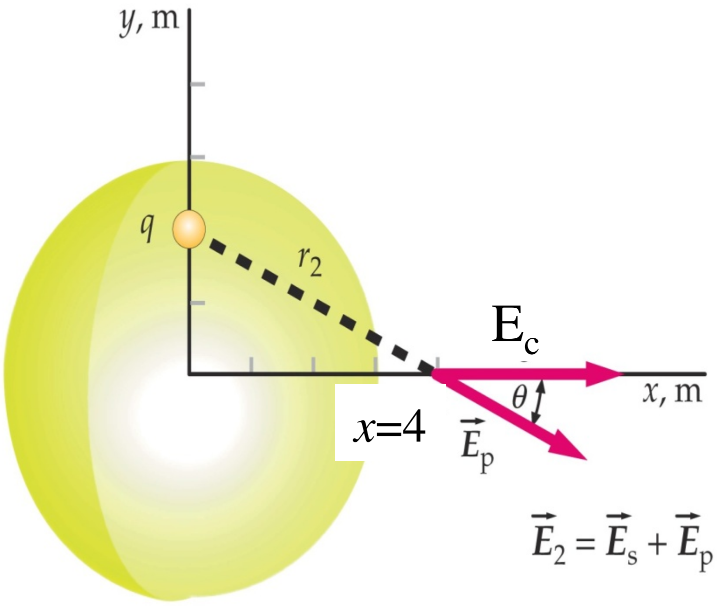
$$\vartheta_1 = 45^\circ$$

$$E = E_{1x}i + E_{1y}j = E_1\cos 45^\circ i - E_1\,\mathrm{sen}\,45^\circ j$$

$$= (281\,N/C)\cos 45^\circ i - (281\,N/C)\,\mathrm{sen}\,45^\circ j$$

$$= \boxed{199(i\text{-}j)N/C}$$

(b) Fuera de su perímetro, la corteza puede considerarse como una carga puntual en el origen y el campo debido a la corteza **E**$_c$ está dirigido a lo largo del eje *x*:



$$\boxed{E_c = \frac{kQ}{x_2^2} i}$$

$$Q = \sigma A = \sigma 4\pi R^2 = \left(3\, nC/m^2\right)4\pi\left(3\, m^2\right) = 339\, nC$$

$$E_c = \frac{\left(8.99\times10^9 \text{ N}\cdot m^2/C^2\right)\left(339\times10^{-9}\text{ C}\right)}{(4\, m)^2} = 190 \text{ N/C}$$

$$\boxed{E_p = \frac{kq}{r_2^2}\hat{r}_2}$$

$$r_2^2 = (2\, m)^2 + (4\, m)^2 = 20\, m^2$$

$$E_p = \frac{\left(8.99\times10^9 \text{ N}\cdot m^2/C^2\right)\left(250\times10^{-9}\text{ C}\right)}{20\, m^2} = 112 \text{ N/C}$$

$$tg\, \vartheta = \frac{2\, m}{4\, m} = \frac{1}{2} \Rightarrow \vartheta = arctg\, \frac{1}{2} = 26.6^\circ$$

$$E_x = E_{px} + E_{cx} = E_p \cos\theta + E_c$$

$$= \left(112 \text{ N/C}\right)\cos 26.6^\circ + 190 \text{ N/C} = 290 \text{ N/C}$$

$$E_y = E_{py} + E_{cy} = -E_p\, \text{sen}\, \theta + 0$$

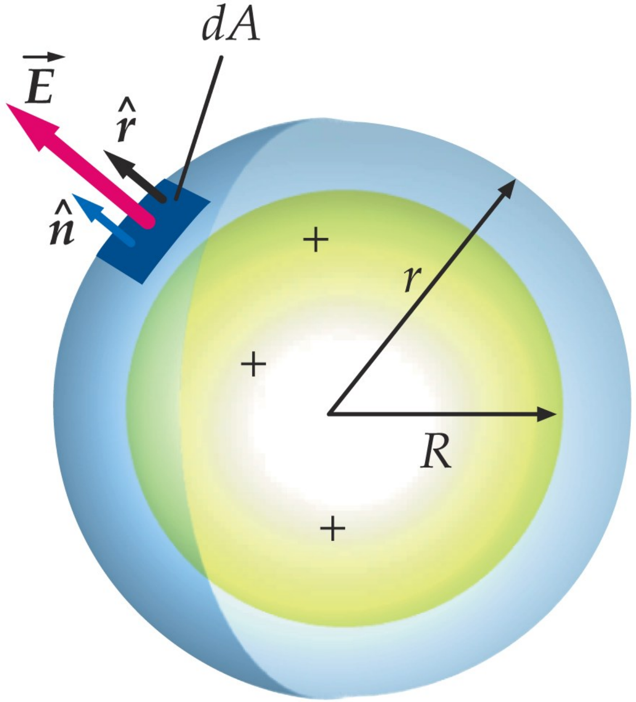
$$= -\left(112 \text{ N/C}\right) sen 26.6^\circ = -50 \text{ N/C}$$

$$E = \left(290i - 50\, j\right) N/C$$

Campo eléctrico debido a una esfera aislante sólida cargada

EJEMPLO 22.8

Determinar el campo eléctrico en (*a*) fuera y (*b*) dentro de una esfera sólida uniformemente cargada de radio *R* portadora de una carga *Q* que está distribuida por todo el volumen de la esfera con densidad de carga $\rho=Q/V$, siendo $V=4/3\pi R^3$ el volumen de la esfera.



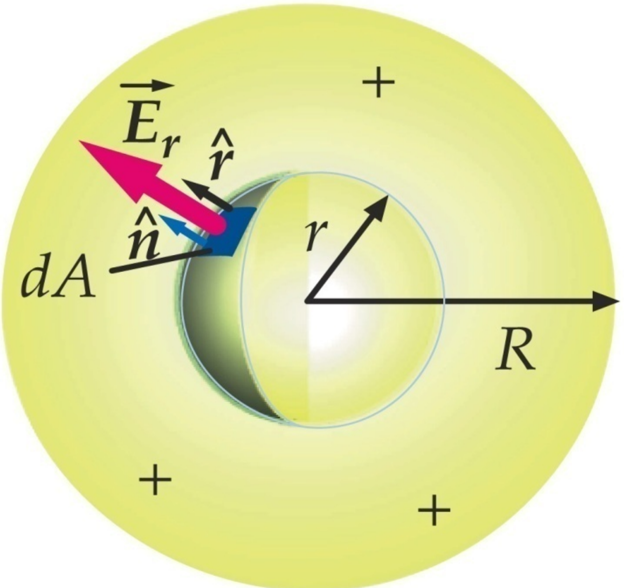
(a) Por simetría, el campo eléctrico debe ser radial. Para determinar $\mathbf{E_r}$ fuera de la esfera cargada, debemos elegir una superficie esférica gaussiana de radio $r>R$:

$$\phi_{neto} = E \cdot \hat{n} A = E \cdot \hat{r} A = E_r 4\pi r^2$$

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_{exterior}}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

LEY DE GAUSS

$$\boxed{E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}, \quad r \geq R}$$



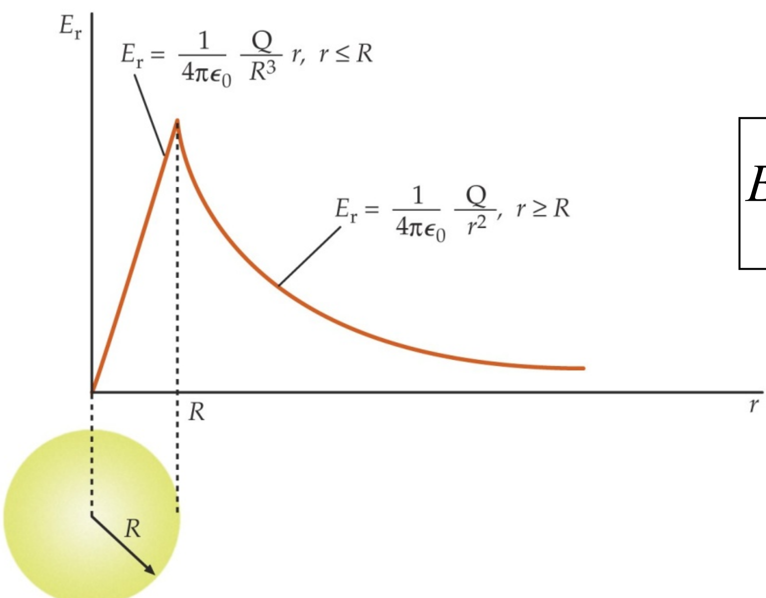
(b) Para determinar $\mathbf{E_r}$ <u>dentro</u> de la esfera cargada, debemos elegir una superficie esférica gaussiana de radio $r<R$:

$$\phi_{neto} = E \cdot \hat{n}A = E \cdot \hat{r}A = E_r 4\pi r^2$$

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{interior}}}{\varepsilon_o} \qquad \text{LEY DE GAUSS}$$

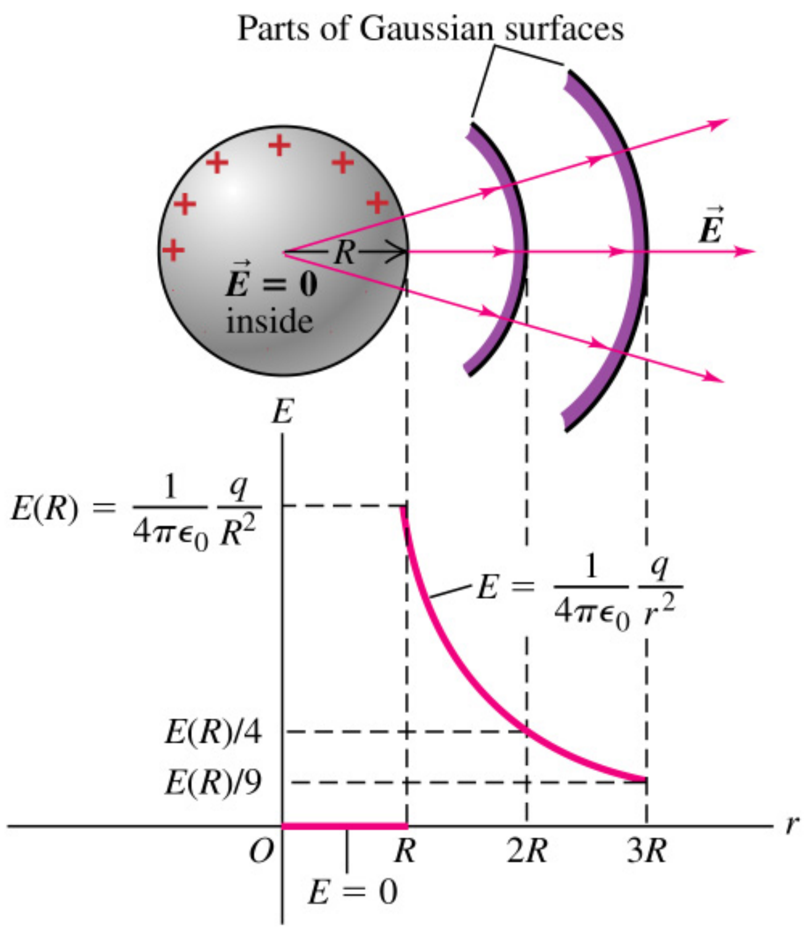
$$Q_{\text{interior}} = \rho V' = \left(\frac{Q}{V}\right)V' = \left(\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = Q\frac{r^3}{R^3}$$

$$\boxed{E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{R^3}r, \quad r \le R}$$



Observaciones: En el interior de la esfera, E_r aumenta con r. Obsérvese que E_r es continuo en $r=R$. A veces se utiliza una esfera uniformemente cargada para describir el campo eléctrico de un **núcleo atómico**.

Campo eléctrico debido a una esfera conductora sólida cargada

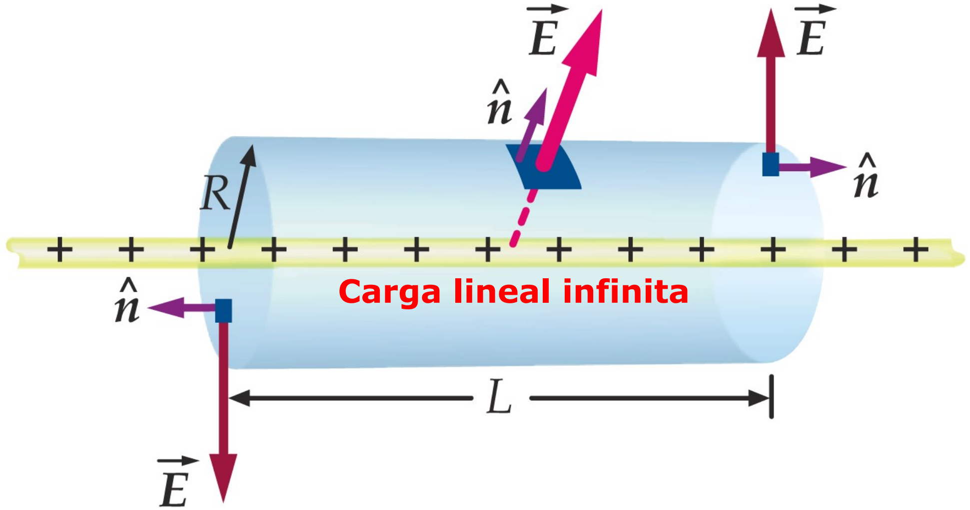


En condiciones electrostáticas el campo eléctrico adentro de un esfera conductora sólida es cero. Afuera de la esfera el campo eléctrico decae con $1/r^2$, como si todo el exceso de carga de la esfera estuviese concentrado en su centro.

Simetría cilíndrica

EJEMPLO 22.9

Utilizar la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico a una distancia *r* de una carga lineal infinitamente larga de densidad de carga uniforme λ.



En las proximidades del extremo de una **carga lineal de longitud finita** no podemos suponer que **E** es perpendicular a la superficie cilíndrica o que E_n es constante en todos los puntos de la misma y, por lo tanto, no puede utilizarse la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico.

$$\phi_{sl} = E \cdot \hat{n}\, A_{sl} = E \cdot \hat{R}\, A_{sl} = E_R 2\pi RL$$

$$\phi_{izquierda} = E \cdot \hat{n}\, A_{izquierda} = 0$$

$$\phi_{derecha} = E \cdot \hat{n}\, A_{derecha} = 0$$

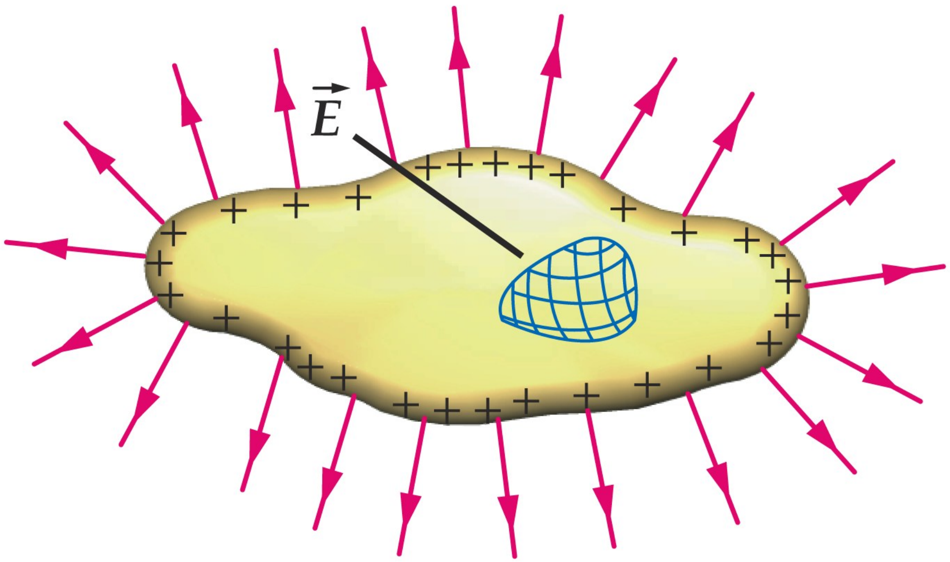
$$\phi_{neto} = \frac{Q_{interior}}{\varepsilon_o}$$

$$E_r 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_o}$$

$$\boxed{E_r = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \frac{\lambda}{r}} = \frac{2k\lambda}{R}$$

22-5
Carga y campo en la superficie de los conductores

Equilibrio electrostático



Todos los conductores poseen cargas con libertad de movimiento en el volumen que limita la superficie.

Si hubiera un campo eléctrico que actuase en el interior del conductor se produciría una fuerza que daría lugar a una corriente eléctrica momentánea.

Sin embargo, la carga libre del conductor se redistribuye de tal modo que se anula cualquier campo externo dentro del conductor:

$$E_{dentro} = 0$$

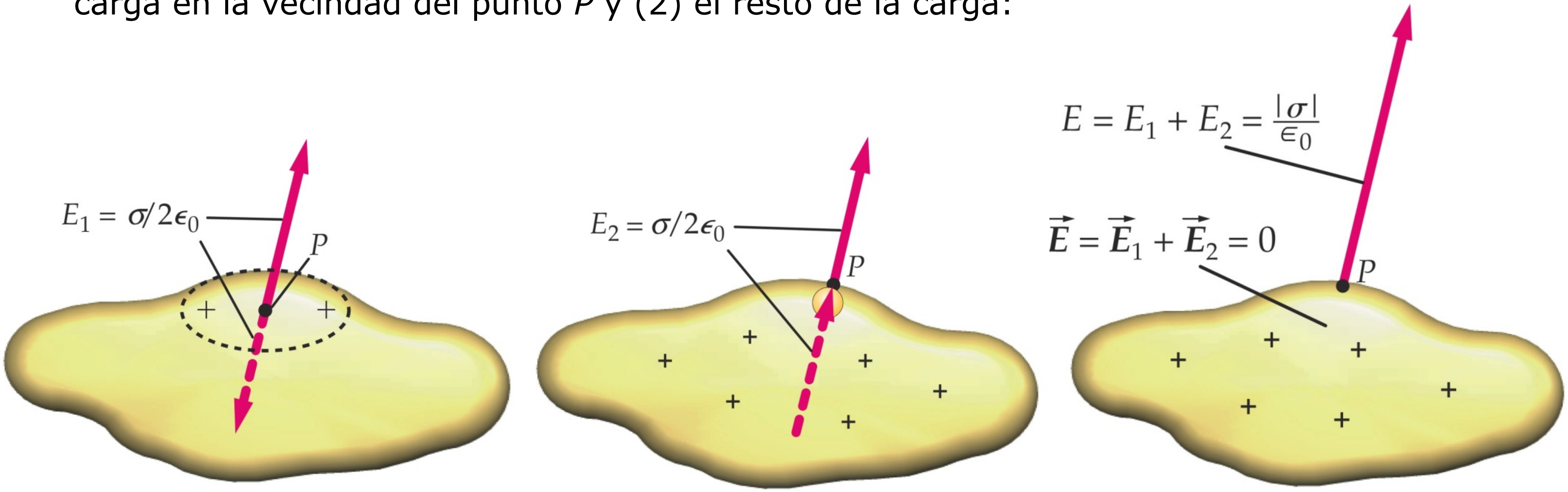
$$\phi_{neto} = 0$$

$$\rho_{neta} = 0$$

Se dice entonces que el conductor se encuentra en **equilibrio electrostático**.

Si existe alguna carga neta en el conductor, ésta debe residir sobre la superficie del propio conductor y el campo eléctrico que origina debe ser perpendicular a la misma superficie. Si existiera una componente tangencial de **E**, la carga libre sería acelerada tangencialmente hasta que se anulara dicha componente.

La carga sobre el conductor está compuesta por dos partes: (1) la carga en la vecindad del punto *P* y (2) el resto de la carga:



La carga que hay en la vecindad del punto *P* se asemeja a un disco circular uniformemente cargado. Esta carga produce un campo eléctrico de valor $\sigma/(2\varepsilon_o)$ tanto en el interior como en el exterior del conductor.

Puesto que el campo resultante en el interior debe ser cero, el resto de la carga debe producir un campo de igual valor $\sigma/(2\varepsilon_o)$ en dirección hacia arriba. Dentro del conductor estos campos se anulan, pero fuera, en el punto *P* se suman, resultando $E_n=\sigma/\varepsilon_o$.

$$\boxed{E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}}$$

E_n JUSTAMENTE FUERA DE LA SUPERFICIE DE UN CONDUCTOR

La carga del planeta Tierra

EJEMPLO 22.10

Consultando algún tratado acerca de la atmósfera, podemos averiguar que el valor medio del campo eléctrico de nuestro planeta es de aproximadamente de 100 N/C y está dirigido verticalmente hacia abajo. Con lo estudiado acerca del campo eléctrico, una pregunta que podemos hacernos es si se puede determinar cuál es la carga total en la superficie de la Tierra.

Planteamiento del problema: La Tierra es un conductor, por lo que su carga neta estará distribuida en la superficie terrestre. La carga total *Q* que estamos buscando será $\sigma\mathbf{A}$, siendo *A* la superficie de la Tierra.

1. La componente normal del campo y la densidad de carga superficial se relacionan mediante la relación :

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

2. En la superficie de la Tierra, los vectores campo eléctrico y vector unitario de la misma forman un ángulo de 180°, y por lo tanto, E_n es negativo :

$$E_n = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = E \times 1 \times \cos 180^\circ = -E = -100\ N/C$$

3. Consideramos los dos pasos previos y que Q es la densidad de carga multiplicado por el área de la superficie terrestre :

$$Q = \sigma A = \varepsilon_o E_n \mathrm{A} = -\varepsilon_o E \mathrm{A}$$

4. Consideramos que la superficie de la Tierra es esférica, de radio r, y así tenemos que $A = 4\pi r^2$

$$Q = -\varepsilon_o E \mathrm{A} = -\varepsilon_o E 4\pi R_T^2 = -4\pi\varepsilon_o E R_T^2$$

5. El radio de la Tierra es $6.38 \times 10^6\ m$

$$\begin{aligned} Q &= -4\pi\varepsilon_o E R_T^2 \\ &= -4\pi \left(8.85 \times 10^{-12}\ C^2/N \cdot m^2\right)\left(100\ N/C\right)\left(6.38 \times 10^6\ m\right)^2 \\ &= \boxed{-4.53 \times 10^5\ C} \end{aligned}$$

PROBLEMA 43

Una esfera no conductora de radio R=0.1 m posee una carga volúmica uniforme de densidad ρ=2.0 nC/m^3. Determinar el módulo del campo eléctrico en r=0.5R.