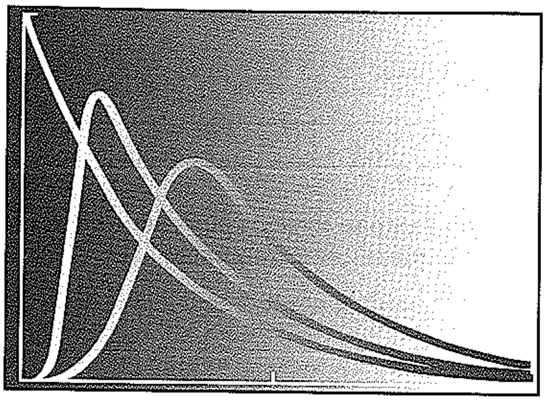
p. 74 - 176

2

SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO



2.0 INTRODUCCIÓN

En la sección 1.6 presentamos y analizamos varias de las propiedades básicas de los sistemas. Dos de ellas, la linealidad y la invariancia en el tiempo, juegan un papel fundamental en el análisis de señales y sistemas por dos razones principales. La primera, muchos procesos físicos poseen estas propiedades por lo que pueden modelarse como sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI). Además, los sistemas LTI se pueden analizar con suficiente detalle para proporcionar tanto el conocimiento de sus propiedades como un conjunto de poderosas herramientas que conforman el núcleo del análisis de señales y sistemas.

Un objetivo esencial de este libro consiste en desarrollar la comprensión de estas propiedades y herramientas así como proporcionar una introducción a varias de las muy importantes aplicaciones en las cuales se usan estas herramientas. En este capítulo iniciamos el desarrollo mediante la deducción y examen de una representación fundamental y extremadamente útil para los sistemas LTI, así como con la introducción de una clase importante de estos sistemas.

Una de las principales razones por la que los sistemas LTI son accesibles al análisis es que todos estos sistemas poseen la propiedad de superposición descrita en la sección 1.6.6. Como consecuencia, si podemos representar la entrada a un sistema LTI en términos de una combinación lineal de un conjunto de señales básicas, entonces podemos utilizar la superposición para calcular la salida del sistema en términos de sus respuestas a estas señales básicas.

Como veremos en las siguientes secciones, una de las características importantes del impulso unitario, tanto discreto como continuo, es que las señales muy generales se pueden representar como la combinación lineal de impulsos retardados. Este hecho, junto con las propiedades de superposición e invariancia en el tiempo, nos permiten realizar impulso unitario. Esta representación, conocida como suma de convolución en el caso discreto, e integral de convolución en el continuo, proporciona una considerable comodidad analítica al tratar con sistemas LTI. Siguiendo con nuestro desarrollo de la suma de convolución y la integral de convolución, usamos estas caracterizaciones para examinar algunas otras propiedades de los sistemas LTI. Posteriormente, consideramos la clase de continuos descritos mediante ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, así como su contraparte discreta, la clase de sistemas descritos por ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes. Volveremos a examinar estas dos clases muy importantes de sistemas en diversas ocasiones en los capítulos subsecuentes. Por último, echaremos un vistazo nuevamente a la función del impulso unitario de tiempo continuo y a otras señales que están muy relacionadas con ésta, de modo que podamos proporcionar algún conocimiento adicional sobre estas señales idealizadas y, de manera particular, sobre su uso e interpretación en el contexto del análisis de sistemas LTI.

2.1 SISTEMAS LTI DISCRETOS: LA SUMA DE CONVOLUCIÓN

2.1.1 La representación de señales discretas en términos de los impulsos

La idea fundamental de visualizar cómo el impulso unitario discreto se puede usar para construir cualquier señal discreta consiste en pensar en una señal discreta como una secuencia de impulsos individuales. Para ver la forma en que esta idea intuitiva puede transformarse en una representación matemática, considere la señal $x[n]$ mostrada en la figura 2.1(a). En las partes restantes de esta figura hemos dibujado cinco secuencias de impulso unitario desplazadas en el tiempo y escaladas, donde el escalamiento de cada impulso es igual al valor de $x[n]$ en el instante particular en que ocurre la muestra unitaria. Por ejemplo,

$$x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1], & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases},$$

$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases},$$

$$x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1], & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}.$$

Por tanto, la suma de las cinco secuencias en la figura es igual a $x[n]$ para $-2 \leq n \leq 2$. De manera más general, si incluimos impulsos adicionales desplazados y escalados, podemos escribir

$$\begin{aligned} x[n] = \ldots &+ x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] \\ &+ x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \ldots . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Para cualquier valor de n, sólo uno de los términos del miembro derecho de la ecuación (2.1) es diferente de cero, y el escalamiento asociado con ese término es precisamente $x[n]$. Al escribir esta sumatoria en una forma más compacta, tenemos

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]. \tag{2.2}$$

Esto corresponde a la representación de una secuencia arbitraria como una combinación li-

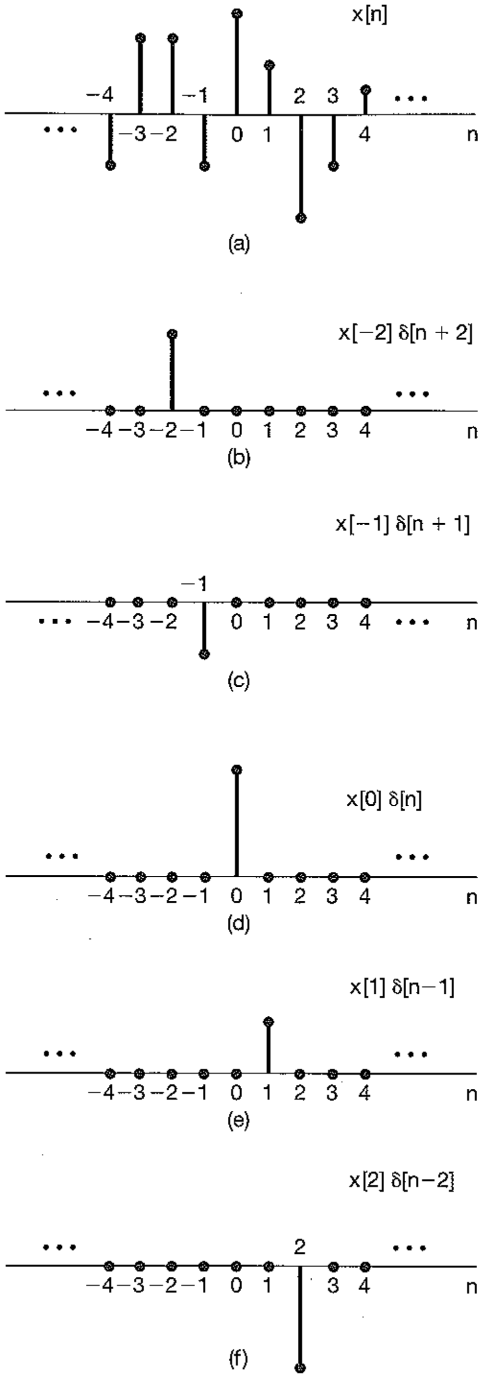


Figura 2.1 Descomposición de una señal discreta en una suma ponderada de impulsos desplazados.

que $u[k] = 0$ para $k < 0$ y $u[k] = 1$ para $k \geq 0$, la ecuación (2.2) se convierte en

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k],$$

la cual es idéntica a la expresión deducida en la sección 1.4. [Vea la ecuación (1.67).]

La ecuación (2.2) se llama *propiedad de selección* del impulso unitario discreto. Puesto que la secuencia $\delta[n-k]$ es diferente de cero sólo cuando $k = n$, la sumatoria del lado derecho de la ecuación (2.2) "selecciona" a través de la secuencia de valores de $x[k]$ y mantiene únicamente el valor que corresponde a $k = n$. En la siguiente subsección explotaremos esta representación de las señales discretas con el fin de desarrollar la representación de la suma de convolución para un sistema LTI discreto.

2.1.2 La respuesta al impulso unitario discreto y la representación de la suma de convolución de sistemas LTI

La importancia de la propiedad de selección de las ecuaciones (2.1) y (2.2) reside en el hecho de que representa a $x[n]$ como una superposición de versiones escaladas de un conjunto muy sencillo de funciones elementales, o sea, los impulsos unitarios desplazados $\delta[n-k]$, cada uno de los cuales es diferente de cero (con valor 1) en un solo punto en el tiempo, especificado por el correspondiente valor de k. La respuesta de un sistema lineal a $x[n]$ será la superposición de las respuestas escaladas del sistema a cada uno de estos impulsos desplazados. Además, la propiedad de invariancia en el tiempo nos dice que las respuestas de un sistema invariante en el tiempo a los impulsos unitarios desplazados en el tiempo son simplemente versiones desplazadas en el tiempo una de otra. La representación de la suma de convolución para sistemas discretos que son *tanto* lineales *como* invariantes en el tiempo resulta de poner juntos estos dos hechos básicos.

De manera más específica, considere la respuesta de un sistema lineal (pero posiblemente variante en el tiempo) a una entrada arbitraria $x[n]$. Podemos representar la entrada mediante la ecuación (2.2) como una combinación lineal de impulsos unitarios desplazados. Designemos a $h_k[n]$ como la respuesta del sistema lineal al impulso unitario desplazado $\delta[n-k]$. Entonces, a partir de la propiedad de superposición de un sistema lineal [ecuaciones (1.123) y (1.124)], la respuesta $y[n]$ del sistema lineal a la entrada $x[n]$ en la ecuación (2.2) es simplemente la combinación lineal ponderada de estas respuestas básicas. Es decir, con la entrada $x[n]$ a un sistema lineal expresado en la forma de la ecuación (2.2), la salida $y[n]$ se expresa como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]. \tag{2.3}$$

Entonces, de acuerdo con la ecuación (2.3), si conocemos la respuesta de un sistema lineal al conjunto de impulsos unitarios desplazados, podemos construir la respuesta a una entrada arbitraria. Una interpretación de la ecuación (2.3) se ilustra en la figura 2.2. La señal $x[n]$ se aplica como la entrada a un sistema lineal cuyas respuestas $h_{-1}[n]$, $h_0[n]$ y $h_1[n]$ a las señales $\delta[n+1]$, $\delta[n]$ y $\delta[n-1]$, respectivamente, están representadas en la figura 2.2(b). Ya que $x[n]$ se puede escribir como una combinación lineal de $\delta[n+1]$, $\delta[n]$ y $\delta[n-1]$, la superposición nos permite escribir la respuesta a $x[n]$ como una combinación lineal de respuestas a impulsos individuales desplazados. Los impulsos indivi-

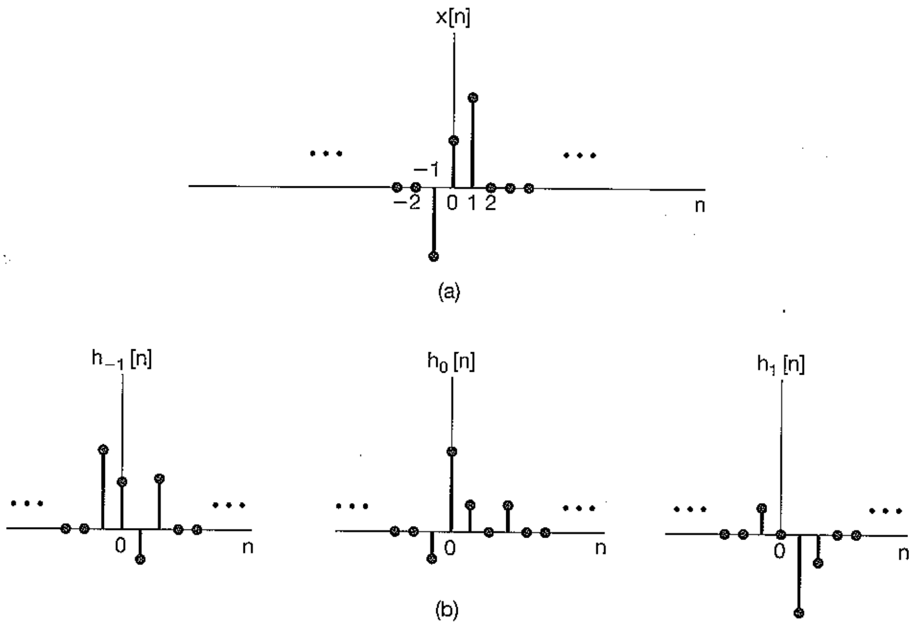


Figura 2.2 Interpretación gráfica de la respuesta de un sistema lineal discreto expresado en la ecuación (2.3).

de los componentes del lado izquierdo de la figura 2.2(c) con la salida real $y[n]$, la que, por superposición, es la suma de los componentes del lado derecho de la figura 2.2(c). De este modo, la respuesta al tiempo n de un sistema lineal, es de manera simple, la superposición de las respuestas debidas al valor de entrada en cada punto en el tiempo.

En general, por supuesto, las respuestas $h_k[n]$ no necesitan estar relacionadas una con otra para diferentes valores de k. Sin embargo, si el sistema lineal también es *invariante en el tiempo*, entonces estas respuestas a impulsos unitarios desplazados en el tiempo son todas versiones desplazadas en el tiempo unas de otras. Específicamente, ya que $\delta[n-k]$ es una versión desplazada en tiempo de $\delta[n]$, la respuesta $h_k[n]$ es una versión desplazada en tiempo de $h_0[n]$; es decir,

$$h_k[n] = h_0[n-k]. \tag{2.4}$$

Para facilitar la notación, eliminaremos el subíndice en $h_0[n]$ y definiremos la *respuesta al impulso (muestra) unitario*

$$h[n] = h_0[n]. \tag{2.5}$$

Esto es, $h[n]$ es la salida del sistema LTI cuando $\delta[n]$ es la entrada. Entonces, para un sistema LTI, la ecuación (2.3) se vuelve

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k].} \tag{2.6}$$

Este resultado se conoce como la *suma de convolución* o *suma de superposición*, y a la operación del miembro derecho de la ecuación (2.6) se le llama *convolución* de las secuencias $x[n]$ y $h[n]$. Representaremos la operación de convolución de manera sim-

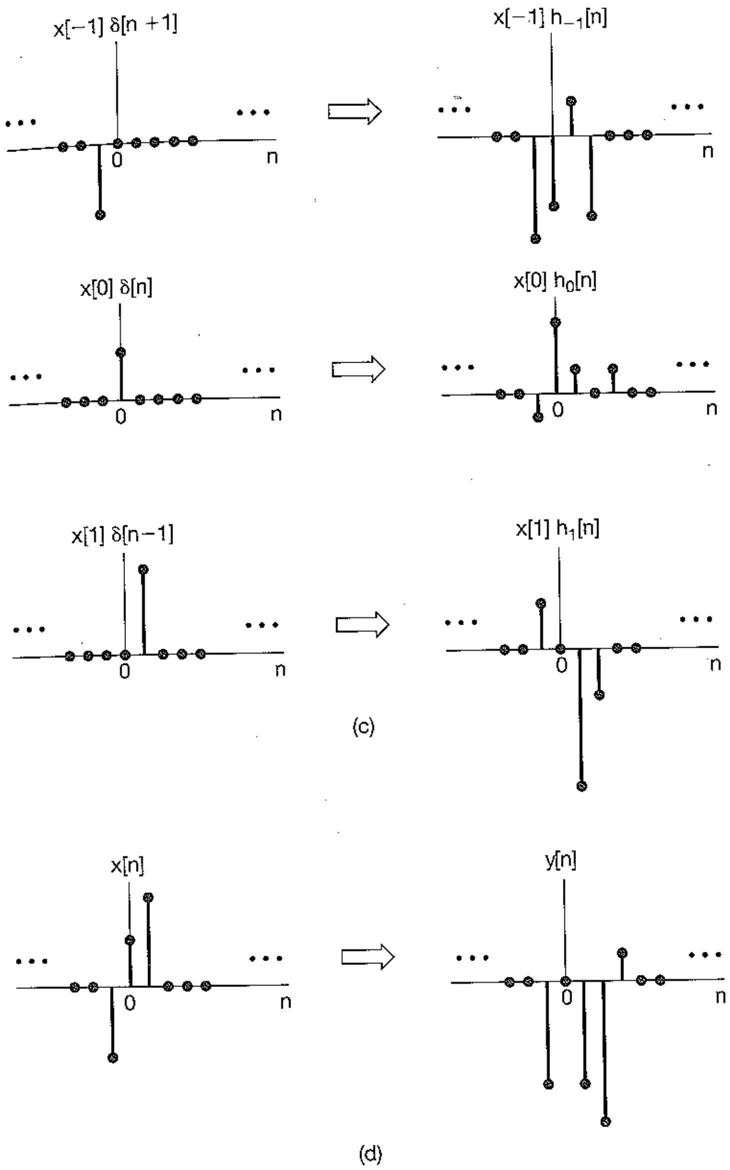


Figura 2.2 *Continuación*

Note que la ecuación (2.6) expresa la respuesta de un sistema LTI a una entrada arbitraria en términos de la respuesta del sistema al impulso unitario. De aquí se desprende que un sistema LTI se caracteriza completamente por su respuesta a una sola señal, es decir, su respuesta al impulso unitario.

La interpretación de la ecuación (2.6) es similar a la que dimos para la ecuación (2.3), donde, en el caso de un sistema LTI, la respuesta debida a la entrada $x[k]$ aplicada

Ejemplo 2.1

Considere un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ y entrada $x[n]$, como se ilustra en la figura 2.3(a). Para este caso, ya que sólo $x[0]$ y $x[1]$ son diferentes de cero, la ecuación (2.6) se simplifica hasta la expresión

$$y[n] = x[0]h[n-0] + x[1]h[n-1] = 0.5h[n] + 2h[n-1]. \tag{2.8}$$

Las secuencias $0.5h[n]$ y $2h[n-1]$ son los dos ecos de la respuesta al impulso necesarios para la superposición involucrada en la generación de $y[n]$. Estos ecos se presentan en la figura 2.3(b). Sumando los dos ecos para cada valor de n obtenemos $y[n]$, la cual se muestra en la figura 2.3(c).

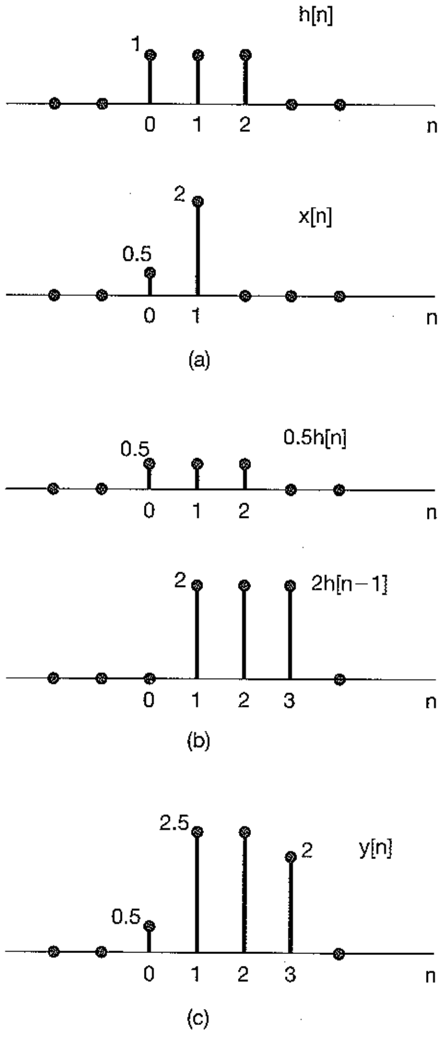


Figura 2.3 (a) La respuesta al impulso $h[n]$ de un sistema LTI y una entrada $x[n]$ al sistema; (b) las respuestas o "ecos" $0.5h[n]$ y

Si tomamos en cuenta el efecto de la suma de superposición en cada muestra de salida individual, obtenemos otro método muy útil de visualizar el cálculo de $y[n]$ mediante la suma de convolución. En particular, considere la evaluación del valor de salida en algún tiempo específico n. Una manera particularmente conveniente de presentar este cálculo de forma gráfica se inicia con las dos señales $x[k]$ y $h[n-k]$ vistas como funciones de k. Multiplicando estas dos funciones, obtenemos una secuencia $g[k] = x[k]h[n-k]$, la cual, en cada tiempo k, se ve que representa la contribución de $x[k]$ a la salida en el tiempo n. Concluimos así que el sumar todas las muestras en la secuencia $g[k]$ produce el valor de salida en el tiempo seleccionado n. De este modo, para calcular $y[n]$ para todos los valores de n es necesario repetir este procedimiento para cada valor de n. Afortunadamente, cambiar el valor de n tiene una interpretación gráfica muy sencilla para las dos señales $x[k]$ y $h[n-k]$, vistas como funciones de k. Los siguientes ejemplos muestran esto, así como el uso del punto de vista antes mencionado al evaluar las sumas de convolución.

Ejemplo 2.2

Consideremos de nuevo el problema de convolución presentado en el ejemplo 2.1. La secuencia $x[k]$ se muestra en la figura 2.4(a), en tanto que la secuencia $h[n-k]$, vista como una función de k y con n fija, se muestra en la figura 2.4(b) para diferentes valores de n. Al dibujar estas secuencias, nos hemos valido del hecho de que $h[n-k]$ (vista como una función de k con n fija) es una versión invertida en el tiempo y desplazada de la respuesta al impulso $h[k]$. En particular, conforme k se incrementa, el argumento $n-k$ disminuye, explicando así la necesidad de realizar una inversión en el tiempo de $h[k]$. Si sabemos esto, entonces, para dibujar la señal $h[n-k]$, sólo necesitamos determinar su valor para algún valor particular de k. Por ejemplo, el argumento $n-k$ será igual a 0 en el valor $k = n$. De este modo, si dibujamos la señal $h[-k]$, podemos obtener la señal $h[n-k]$ simplemente desplazando a la derecha (por n) si n es positiva o a la izquierda si n es negativa. El resultado para nuestro ejemplo, para valores de $n < 0$, $n = 0, 1, 2, 3$ y $n > 3$, se muestra en la figura 2.4(b).

Habiendo dibujado $x[k]$ y $h[n-k]$ para cualquier valor particular de n, multiplicamos estas dos señales y sumamos todos los valores de k. En el caso de nuestro ejemplo, para $n < 0$, vemos de la figura 2.4 que $x[k]h[n-k] = 0$ para toda k, ya que los valores diferentes de cero de $x[k]$ y $h[n-k]$ no se traslapan. En consecuencia, $y[n] = 0$ para $n < 0$. Para $n = 0$, puesto que el producto de la secuencia $x[k]$ con la secuencia $h[0-k]$ tiene sólo una muestra diferente de cero cuyo valor es 0.5, concluimos que

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k] = 0.5. \tag{2.9}$$

El producto de la secuencia $x[k]$ con la secuencia $h[1-k]$ tiene dos muestras diferentes de cero, las cuales se pueden sumar para obtener

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k] = 0.5 + 2.0 = 2.5. \tag{2.10}$$

De manera similar,

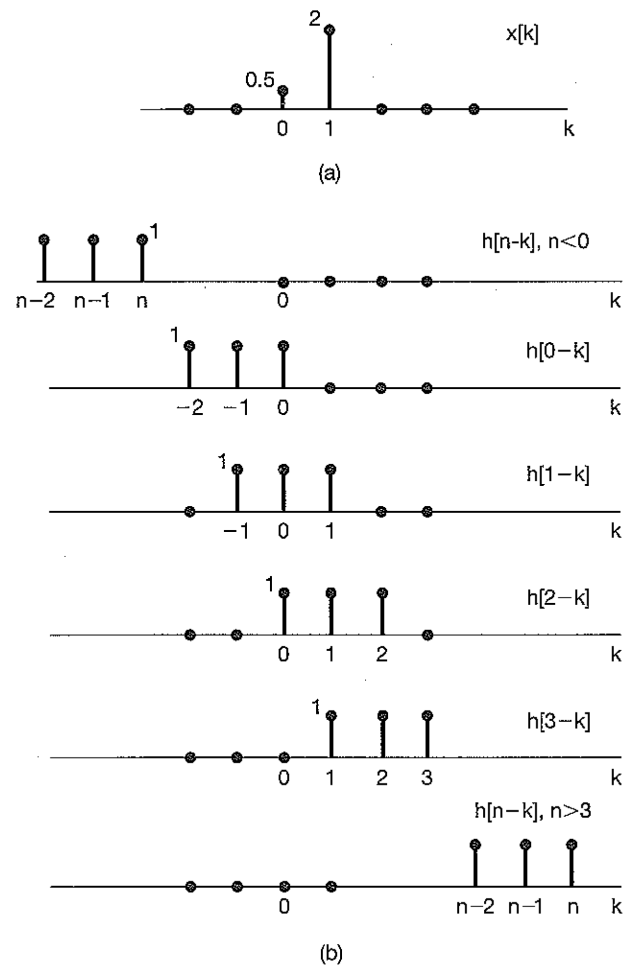


Figura 2.4 Interpretación de la ecuación (2.6) para las señales $h[n]$ y $x[n]$ en la figura 2.3: (a) la señal $x[k]$, y (b) la señal $h[n-k]$ como una función de k con n fijo) para diversos valores de n ($n < 0$; $n = 0, 1, 2, 3$; $n > 3$). Cada señal se obtiene mediante el reflejo y el corrimiento de la respuesta al impulso unitario $h[k]$. La respuesta $y[n]$ para cada valor de n se obtiene multiplicando las señales $x[k]$ y $h[n-k]$ en (b) y (c) y sumando después los productos sobre todos los valores de k. El cálculo de este ejemplo se detalla en el ejemplo 2.2.

$$y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k] = 2.0. \tag{2.12}$$

Ejemplo 2.3

Considere una entrada $x[n]$ y una respuesta al impulso unitario $h[n]$ dada por

$$x[n] = \alpha^n u[n],$$
$$h[n] = u[n],$$

con $0 < \alpha < 1$. Estas señales se ilustran en la figura 2.5. Además, para ayudarnos a visualizar y calcular la convolución de las señales, en la figura 2.6 hemos dibujado la señal $x[k]$ seguida por $h[-k]$, $h[-1-k]$ y $h[1-k]$ (es decir, $h[n-k]$ para $n = 0, -1$ y $+1$) y, finalmente, $h[n-k]$ para un valor positivo arbitrario de n y un valor negativo arbitrario de n. De esta figura podemos observar que, para $n < 0$, no hay traslape entre puntos diferentes de cero en $x[k]$ y $h[n-k]$. Entonces, para $n < 0$, $x[k]h[n-k] = 0$ para todos los valores de k, y en consecuencia, de la ecuación (2.6) vemos que $y[n] = 0, n < 0$. Para $n \geq 0$,

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

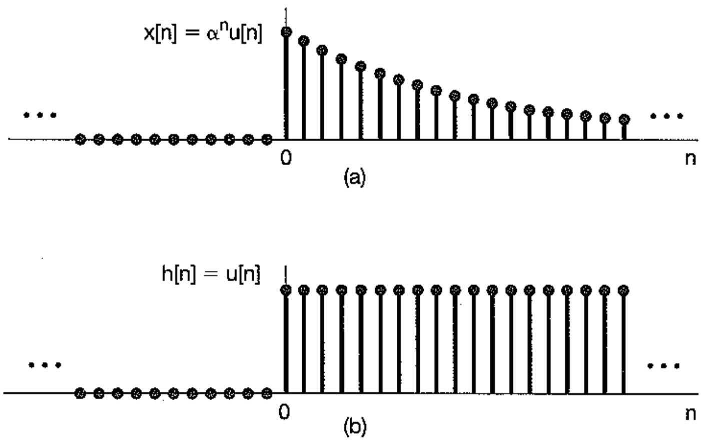


Figura 2.5 Las señales $x[n]$ y $h[n]$ del ejemplo 2.3.

Así, para $n \geq 0$,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k,$$

y usando el resultado del problema 1.54 se puede escribir como

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \quad \text{para } n \geq 0. \tag{2.13}$$

Entonces, para toda n,

$$y[n] = \left(1-\alpha^{n+1}\right)u[n]$$

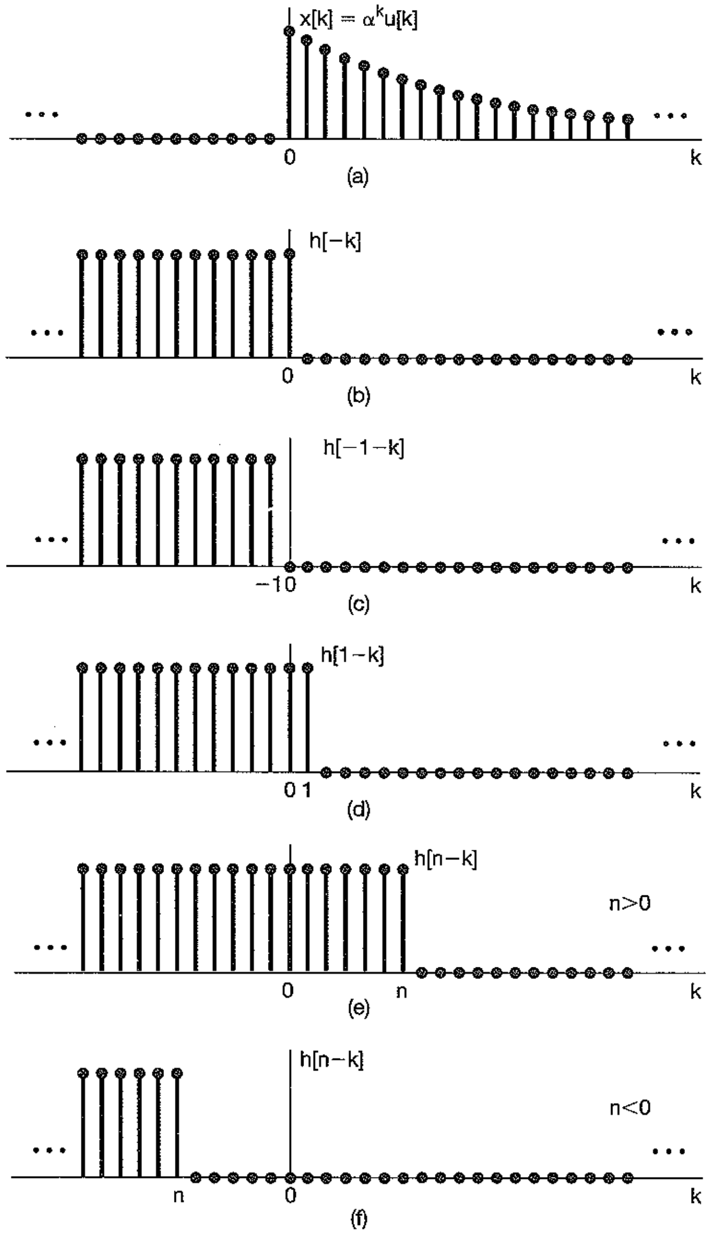


Figura 2.6 Interpretación gráfica del cálculo de la suma de convolución del ejemplo 2.3.

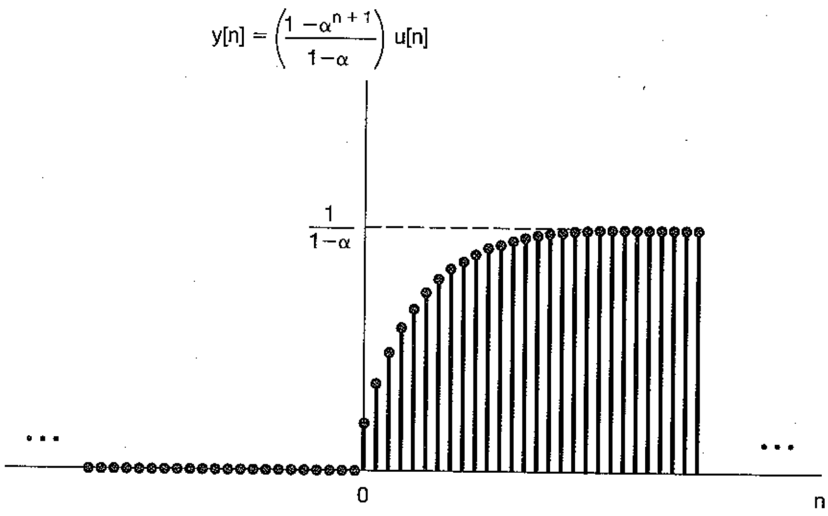


Figura 2.7 Salida para el ejemplo 2.3.

La operación de convolución algunas veces se describe en términos de "deslizar" la secuencia $h[n-k]$ sobre $x[k]$. Por ejemplo, suponga que hemos evaluado $y[n]$ para algún valor particular de n, digamos, $n = n_0$. Esto es, hemos dibujado la señal $h[n_0 - k]$, la hemos multiplicado por la señal $x[k]$ y sumado el resultado con todos los valores de k. Para evaluar $y[n]$ en el siguiente valor de n —es decir, $n = n_0 + 1$—, necesitamos dibujar la señal $h[(n_0 + 1) - k]$. Sin embargo, esto se puede hacer tomando simplemente la señal $h[n_0 - k]$ y desplazándola un punto a la derecha. Para cada valor sucesivo de n, continuamos con el proceso de desplazar $h[n-k]$ un punto a la derecha, multiplicarla por $x[k]$ y sumar el resultado sobre k.

Ejemplo 2.4

Como un ejemplo adicional, considere las dos secuencias

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

y

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Estas señales están representadas en la figura 2.8 para un valor positivo de $\alpha > 1$. Para calcular la convolución de las dos señales, resulta conveniente considerar cinco intervalos separados para n. Esto se ilustra en la figura 2.9.

Intervalo 1. Para $n < 0$, no hay traslape entre las porciones diferentes de cero de $x[k]$ y $h[n-k]$, y en consecuencia, $y[n] = 0$.

Intervalo 2. Para $0 \leq n \leq 4$,

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq n \end{cases}$$

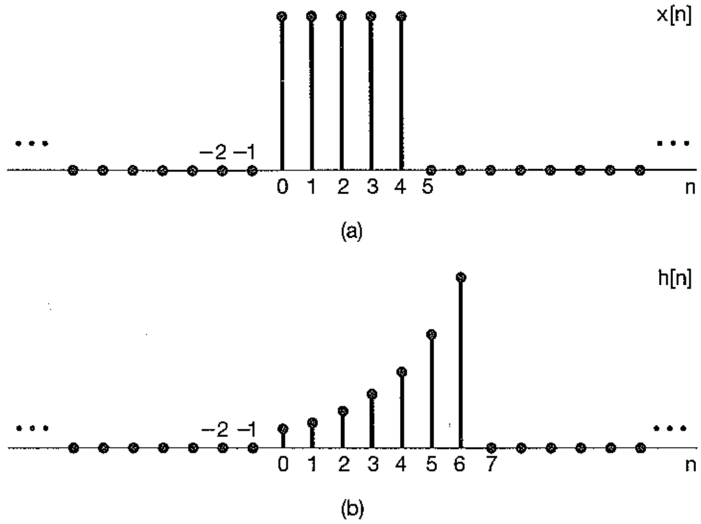


Figura 2.8 Las señales a convolucionarse en el ejemplo 2.4.

Así, en este intervalo,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k}. \tag{2.14}$$

Podemos evaluar esta suma mediante el uso de la fórmula de suma finita, ecuación (2.13). Específicamente, cambiando la variable de la sumatoria en la ecuación (2.14) de k a $r = n - k$, obtenemos

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{r} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}.$$

Intervalo 3. Para $n > 4$ pero $n - 6 \leq 0$ (es decir, $4 < n \leq 6$),

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

Así, en este intervalo,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{4} \alpha^{n-k}. \tag{2.15}$$

De nueva cuenta podemos usar la fórmula de suma geométrica en la ecuación (2.13) para evaluar la ecuación (2.15). Específicamente, separando el factor constante α^n de la sumatoria en la ecuación (2.15) se obtiene

$$y[n] = \alpha^{n}\sum_{k=0}^{4}(\alpha^{-1})^{k} = \alpha^{n}\frac{1-(\alpha^{-1})^{5}}{1-\alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}. \tag{2.16}$$

Intervalo 4. Para $n > 6$ pero $n - 6 \leq 4$ (es decir, para $6 < n \leq 10$),

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & (n-6) \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases},$$

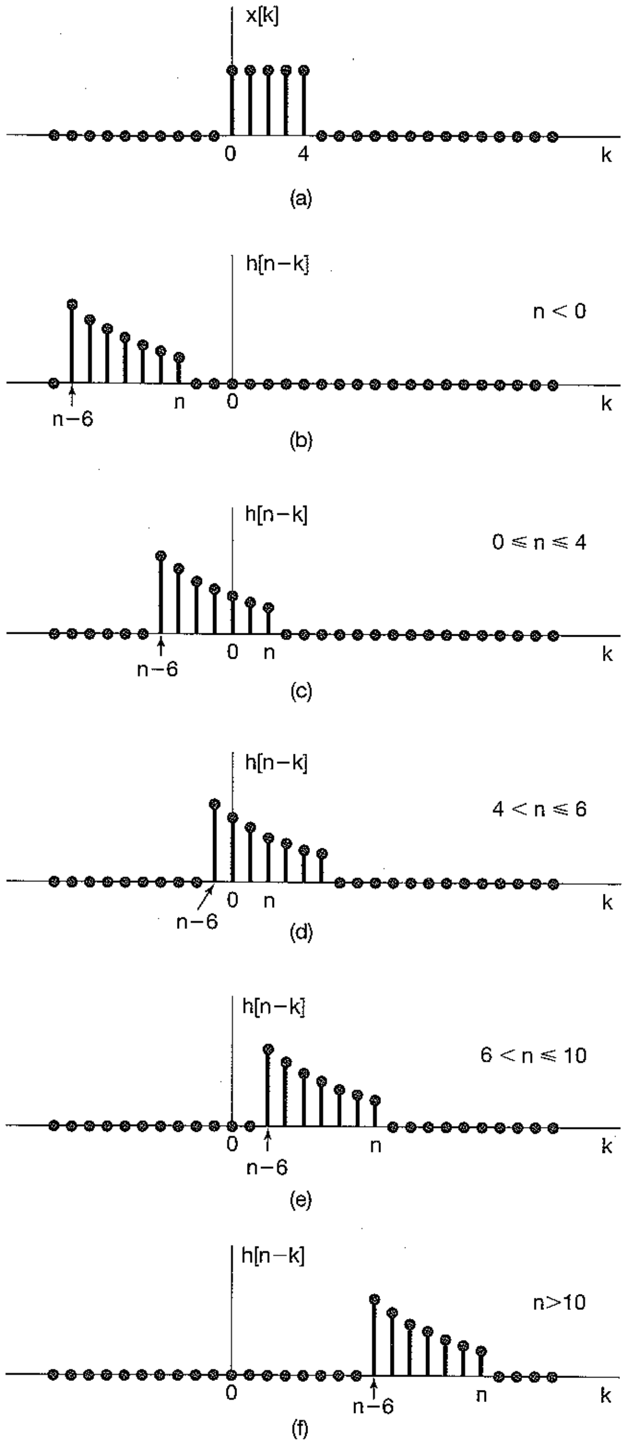


Figura 2.9 Interpretación gráfica de la convolución realizada en el ejemplo 2.4.

de manera que

$$y[n] = \sum_{k=n-6}^{4} \alpha^{n-k}.$$

Podemos usar de nuevo la ecuación (2.13) para evaluar esta sumatoria. Haciendo que $r = k - n + 6$, obtenemos

$$y[n] = \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{6-r} = \alpha^6 \sum_{r=0}^{10-n} (\alpha^{-1})^r = \alpha^6 \frac{1 - \alpha^{n-11}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}.$$

Intervalo 5. Para $n - 6 > 4$, o de manera equivalente, $n > 10$, no hay traslape entre las porciones diferentes de cero de $x[k]$ y $h[n-k]$, y por consiguiente

$$y[n] = 0.$$

Resumiendo entonces, obtenemos

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \dfrac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, & 0 \leq n \leq 4 \\ \dfrac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, & 4 < n \leq 6, \\ \dfrac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}, & 6 < n \leq 10 \\ 0, & 10 < n \end{cases}$$

lo cual se ilustra en la figura 2.10.

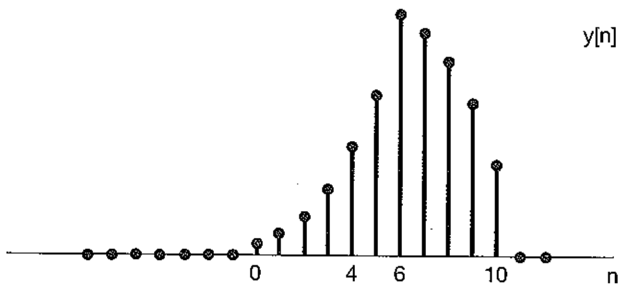


Figura 2.10 Resultado de llevar a cabo la convolución del ejemplo 2.4.

Ejemplo 2.5

Considere un sistema LTI con entrada $x[n]$ y respuesta al impulso $h[n]$ especificadas como sigue:

$$x[n] = 2^n u[-n], \tag{2.17}$$

$$h[n] = u[n]. \tag{2.18}$$

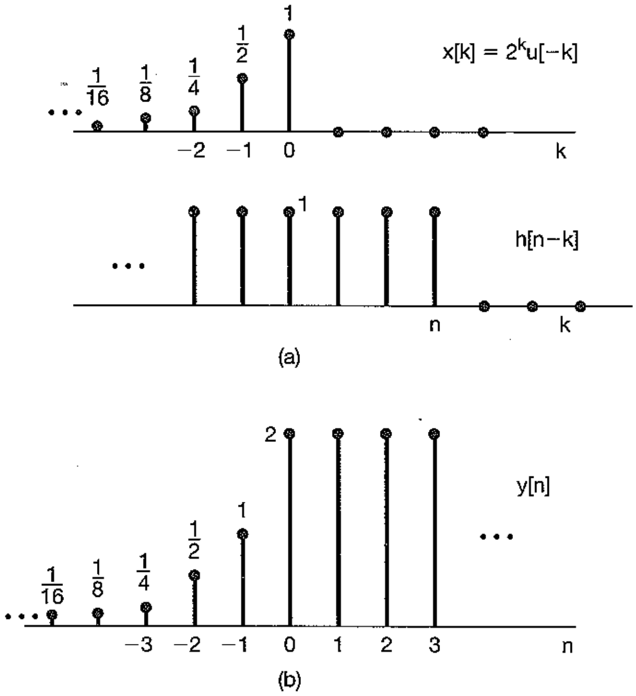


Figura 2.11 (a) Las secuencias $x[k]$ y $h[n-k]$ para el problema de la convolución considerado en el ejemplo 2.5; (b) la señal de salida resultante $y[n]$.

Las secuencias $x[k]$ y $h[n-k]$ están dibujadas en la figura 2.11(a) como funciones de k. Observe que $x[k]$ es cero para $k > 0$ y $h[n-k]$ es cero para $k > n$. Observe también que, sin importar el valor de n, la secuencia $x[k]h[n-k]$ siempre tiene muestras diferentes de cero a lo largo del eje k. Cuando $n \geq 0$, $x[k]h[n-k]$ tiene muestras en el intervalo $k \leq 0$. De ello se desprende que para $n \geq 0$,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{0} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k. \tag{2.19}$$

Para evaluar la suma infinita en la ecuación (2.19), podemos usar la *fórmula de la suma infinita*,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, \quad 0 < |\alpha| < 1. \tag{2.20}$$

Cambiando la variable de la sumatoria en la ecuación (2.19) de k a $r = -k$, obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{0} 2^k = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-(1/2)} = 2. \tag{2.21}$$

De este modo, $y[n]$ toma un valor constante de 2 para $n \geq 0$.

Cuando $n < 0, x[k]h[n-k]$ tiene muestras diferentes de cero para $k \leq n$. En consecuencia, para $n < 0$,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^k. \tag{2.22}$$

Realizando un cambio de variable $l = -k$ y entonces $m = l + n$, nuevamente podemos hacer uso de la fórmula de la suma infinita, ecuación (2.20), para evaluar la suma de la ecuación (2.22). El resultado es el siguiente para $n < 0$:

$$y[n] = \sum_{l=-n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}. \tag{2.23}$$

La secuencia completa de $y[n]$ está dibujada en la figura 2.11(b).

Estos ejemplos ilustran la utilidad de visualizar los cálculos de la suma de convolución de manera gráfica. No sólo esto, además de proporcionar un método útil mediante el cual se pueda calcular la respuesta de un sistema LTI, la suma de convolución también ofrece una representación en extremo útil para los sistemas LTI que nos permite examinar sus propiedades con gran detalle. En particular, en la sección 2.3 describiremos algunas de las propiedades de la convolución, y además analizaremos algunas de las propiedades introducidas en el capítulo anterior de modo que podamos ver cómo estas propiedades se pueden caracterizar para los sistemas LTI.

2.2 SISTEMAS LTI CONTINUOS: LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

De manera análoga con los resultados deducidos y analizados en la sección anterior, el objetivo de esta sección es obtener una caracterización completa de un sistema LTI continuo en términos de su respuesta al impulso unitario. En el sistema discreto, la clave para nuestro desarrollo de la suma de convolución fue la propiedad de selección del impulso unitario discreto, esto es, representar matemáticamente de una señal como la superposición de funciones impulso unitario escaladas y desplazadas. Por tanto, de manera intuitiva podemos imaginar que estos sistemas discretos responden a una secuencia de impulsos individuales. En el caso continuo, de hecho, no tenemos una secuencia discreta de valores de entrada. No obstante, como analizamos en la sección 1.4.2, si pensamos en el impulso unitario como la idealización de un pulso el cual es tan corto que su duración no tiene consecuencias en un sistema físico real, podemos desarrollar una representación para señales continuas arbitrarias en términos de estos pulsos idealizados con una duración pequeña que tiende a desaparecer o, de forma equivalente, en términos de impulsos. Esta representación se desarrolla en la siguiente subsección, y después procederemos como en la sección 2.1 para desarrollar la representación de la integral de convolución para sistemas LTI continuos.

2.2.1 La representación de señales continuas en términos de los impulsos

Para desarrollar la contraparte de tiempo continuo de la propiedad de selección en tiem-

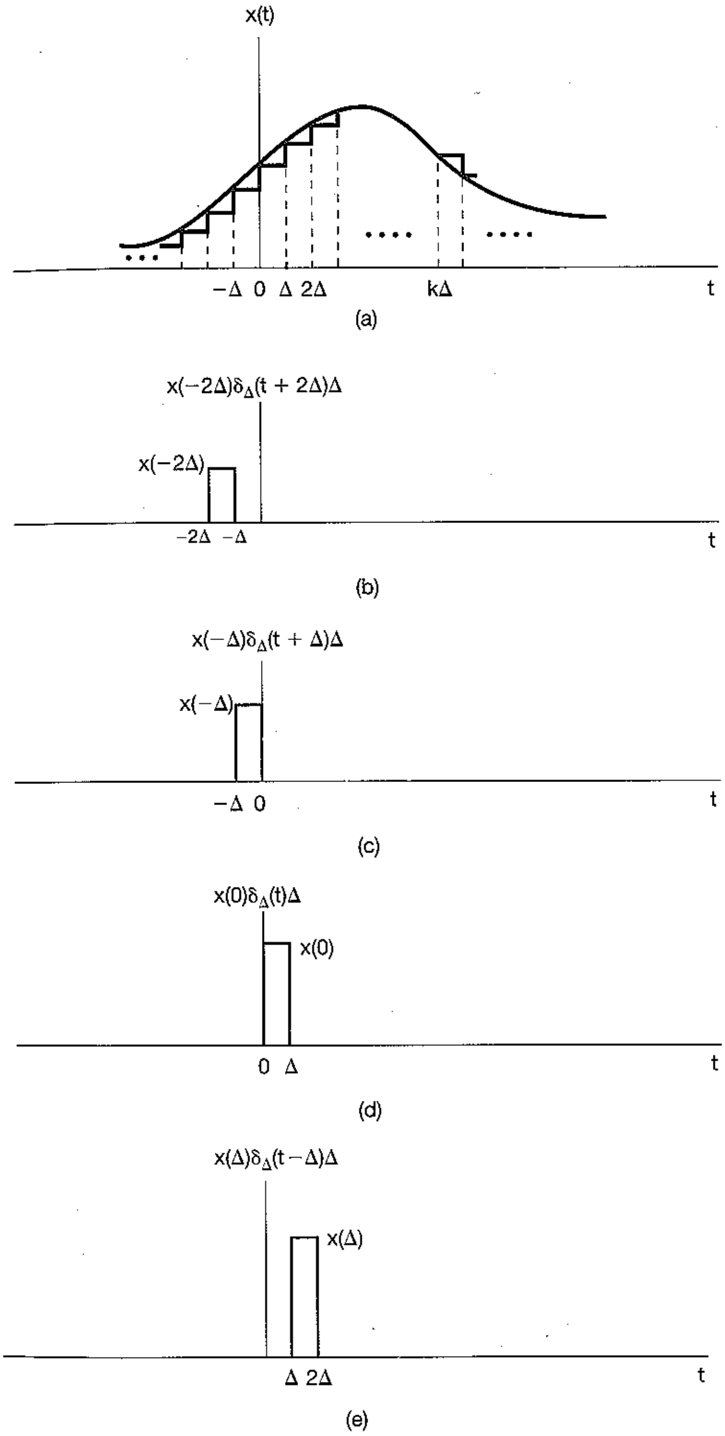


Figura 2.12 Aproximación en escalera a una señal continua.

puede expresar como una combinación lineal de pulsos retrasados, lo cual se muestra en la figura 2.12(a)-(e). Si definimos

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t < \Delta \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}, \tag{2.24}$$

entonces, ya que $\Delta\delta_\Delta(t)$ tiene una amplitud unitaria, tenemos la expresión

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta. \tag{2.25}$$

A partir de la figura 2.12, vemos que, como en el caso discreto [ecuación (2.2)], para cualquier valor de t, sólo un término de la sumatoria en el miembro derecho de la ecuación (2.25) es diferente de cero.

Conforme Δ se aproxima a 0, la aproximación $\hat{x}(t)$ mejora cada vez más, y en el límite es igual a $x(t)$. Por tanto,

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta. \tag{2.26}$$

Asimismo, a medida que $\Delta \to 0$, la sumatoria en la ecuación (2.26) se aproxima a una integral. Esto se puede ver al considerar la interpretación gráfica de la ecuación, la cual se ilustra en la figura 2.13. Aquí hemos mostrado las señales $x(\tau)$, $\delta_\Delta(t - \tau)$, y sus productos. También hemos indicado una región sombreada cuya área se aproxima al área bajo $x(\tau)\delta_\Delta(t - \tau)$ conforme $\Delta \to 0$. Nótese que la región sombreada tiene un área igual a $x(m\Delta)$ donde $t - \Delta < m\Delta < t$. Además, para este valor de t, sólo el término con $k = m$ es diferente de cero en la sumatoria en la ecuación (2.26) y, por tanto, el lado derecho de esta ecuación también es igual a $x(m\Delta)$. En consecuencia, de la ecuación (2.26) y del argumento anterior se desprende que $x(t)$ es igual al límite conforme $\Delta \to 0$ del área bajo $x(\tau)\delta_\Delta(t - \tau)$. Más aún, de la ecuación (1.74) sabemos que el límite cuando $\Delta \to 0$ de $\delta_\Delta(t)$ es la función impulso unitario $\delta(t)$. En consecuencia,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau. \tag{2.27}$$

Al igual que en el caso discreto, la ecuación (2.27) se conoce como la *propiedad de selección* del impulso de tiempo continuo. Podemos observar que, para el ejemplo específico de $x(t) = u(t)$, la ecuación (2.27) se convierte en

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t - \tau)d\tau, \tag{2.28}$$

ya que $u(\tau) = 0$ para $\tau < 0$ y $u(\tau) = 1$ para $\tau > 0$. La ecuación (2.28) es idéntica a la ecuación (1.75) deducida en la sección 1.4.2.

De nueva cuenta, la ecuación (2.27) se debe ver como una idealización en el sentido de que, para una Δ "lo suficientemente pequeña", la aproximación de $x(t)$ en la ecuación (2.25) es en esencia exacta para cualquier propósito práctico. Entonces, la ecuación (2.27) representa simplemente una idealización de la ecuación (2.25) al considerar

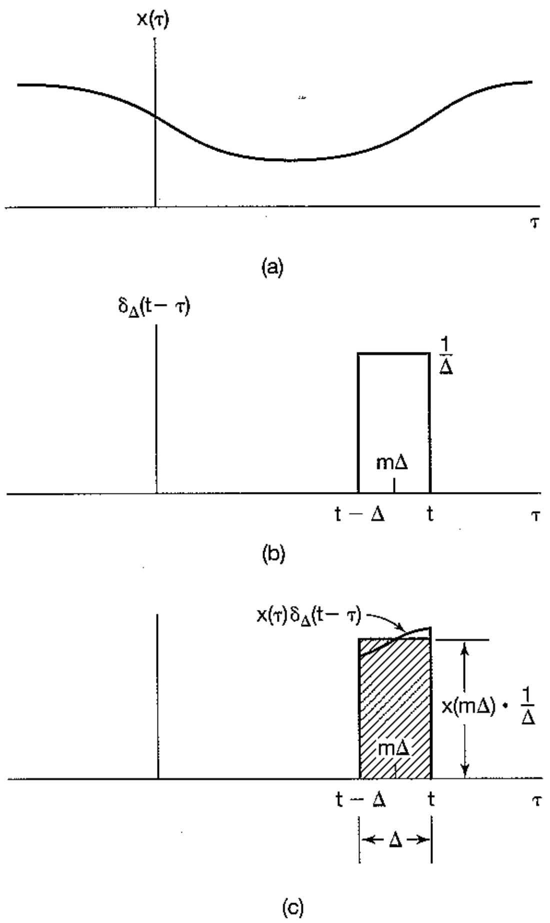


Figura 2.13 Interpretación gráfica de la ecuación (2.26).

Específicamente, como se ilustra en la figura 2.14(b), la señal $\delta(t-\tau)$ (vista como una función de τ con t fija) es un impulso unitario localizado en $\tau = t$. Por tanto, como se muestra en la figura 2.14(c), la señal $x(\tau)\delta(t-\tau)$ (de nuevo vista como una función de τ) es igual a $x(t)\delta(t-\tau)$ [es decir, es un impulso escalado en $\tau = t$ con un área igual al valor de $x(t)$]. En consecuencia, la integral de esta señal a partir de $\tau = -\infty$ a $\tau = +\infty$ es igual a $x(t)$; esto es,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau = x(t).$$

Aunque esta deducción surge directamente de la sección 1.4.2, hemos incluido la deducción proporcionada en las ecuaciones (2.24)-(2.27) para comparar las similitudes con el

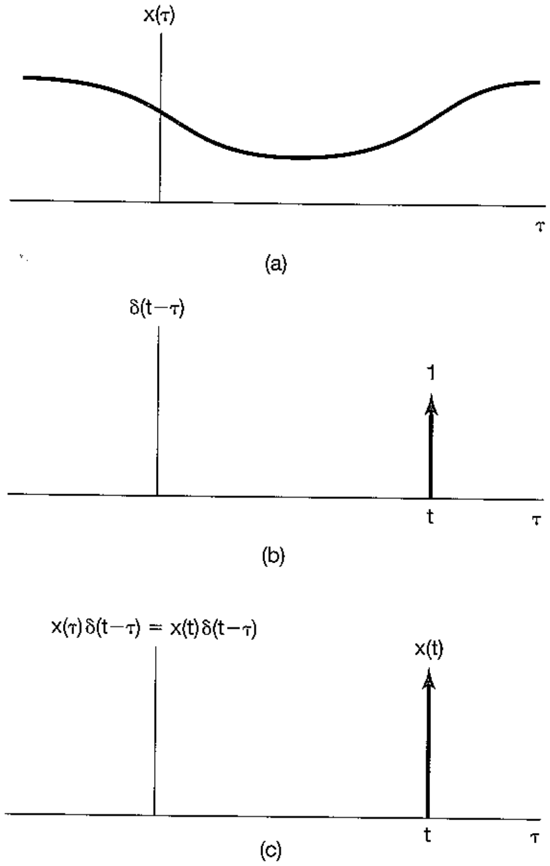


Figura 2.14 (a) Señal arbitraria $x(\tau)$; (b) impulso $\delta(t-\tau)$ como una función de τ con t fija; (c) producto de estas dos señales.

2.2.2 La respuesta al impulso unitario continuo y la representación de la integral de convolución de sistemas LTI

Al igual que en el caso discreto, la representación desarrollada en la sección anterior nos proporciona un método con el cual se puede ver una señal arbitraria continua como la superposición de pulsos escalados y desplazados. En particular, la representación aproximada en la ecuación (2.25) representa la señal $\hat{x}(t)$ como una suma de versiones escaladas y desplazadas de la señal pulso básico $\delta_\Delta(t)$. En consecuencia, la respuesta $\hat{y}(t)$ de un sistema lineal a esta señal será la superposición de las respuestas a las versiones escaladas y desplazadas de $\delta_\Delta(t)$. Específicamente, definamos $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ como la respuesta de un sistema LTI a la entrada $\delta_\Delta(t-k\Delta)$. Entonces, de la ecuación (2.25) y la propiedad de superposición, para sistemas lineales de tiempo continuo, vemos que

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta. \tag{2.29}$$

La interpretación de la ecuación (2.29) es similar a aquella de la ecuación (2.3) para el caso discreto. En particular, considere la figura 2.15, la cual es la contraparte continua

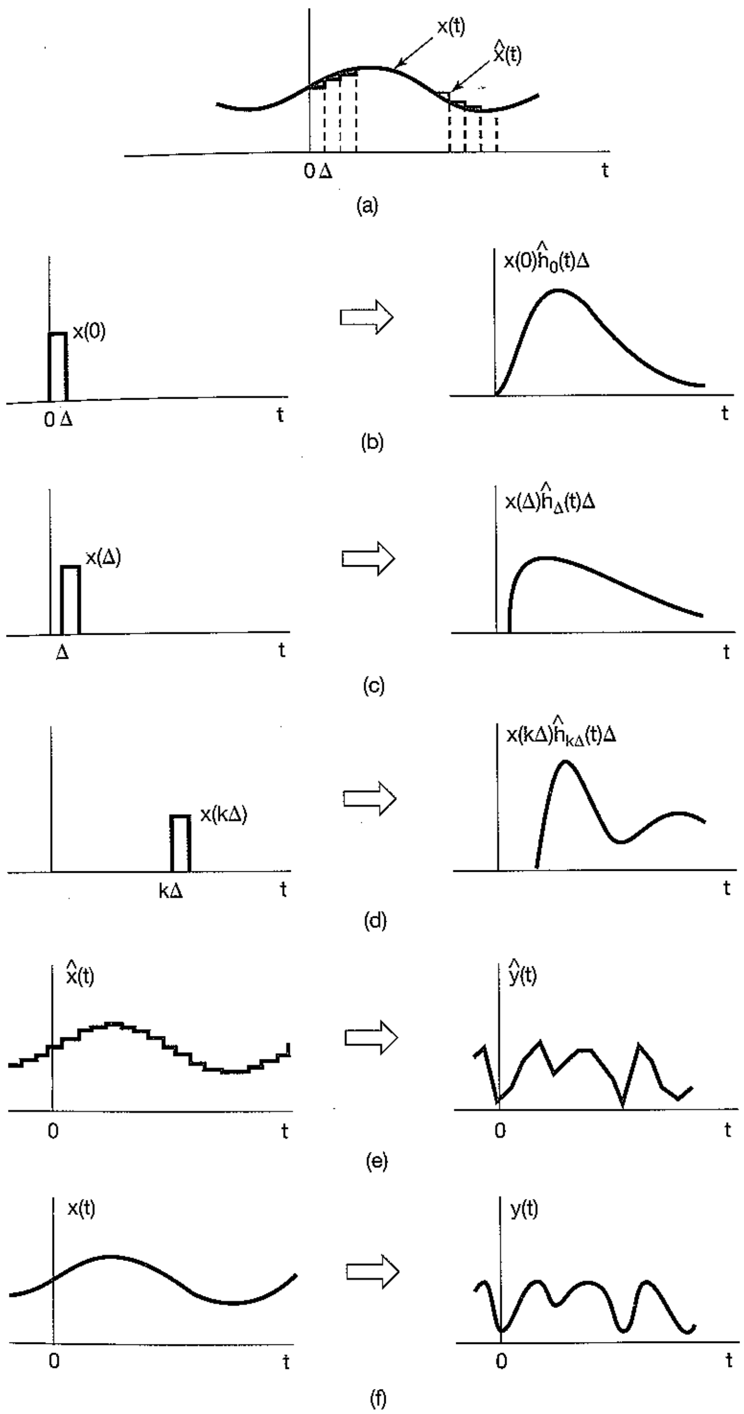


Figura 2.15 Interpretación gráfica de la respuesta de un sistema lineal continuo como el expresado en las ecuación (2.29) y (2.30).

$\hat{x}(t)$, mientras que en la figura 2.15(b)-(d) hemos mostrado las respuestas del sistema a tres de los pulsos ponderados de la expresión para $\hat{x}(t)$. Entonces la salida $\hat{y}(t)$ correspondiente a $\hat{x}(t)$ es la superposición de todas estas respuestas, como se indica en la figura 2.15(e).

Lo que falta, entonces, es preguntarse qué pasa conforme Δ se hace muy pequeño, es decir, conforme $\Delta \to 0$. En particular, con $x(t)$ expresada como en la ecuación (2.26), $\hat{x}(t)$ se vuelve cada vez mejor aproximación a $x(t)$ y, de hecho, las dos coinciden a medida que $\Delta \to 0$. En consecuencia, la respuesta a $\hat{x}(t)$, es decir, $\hat{y}(t)$ en la ecuación (2.29), debe converger hacia $y(t)$, la respuesta a la entrada real $x(t)$, como se ilustra en la figura 2.15(f). Además, como hemos dicho, para una Δ "lo suficientemente pequeña", la duración del pulso $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ no es significativa, en cuanto que, en lo concerniente al sistema, la respuesta a este pulso es en esencia la misma que la respuesta a un impulso unitario en el mismo punto en el tiempo. Esto es, puesto que el pulso $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ corresponde a un impulso unitario desplazado conforme $\Delta \to 0$, la respuesta $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ a este pulso de entrada se convierte en la respuesta a un impulso en el límite. Por tanto, si hacemos que $h_\tau(t)$ denote la respuesta en el tiempo t a un impulso unitario $\delta(t - \tau)$ localizado en el tiempo τ, entonces

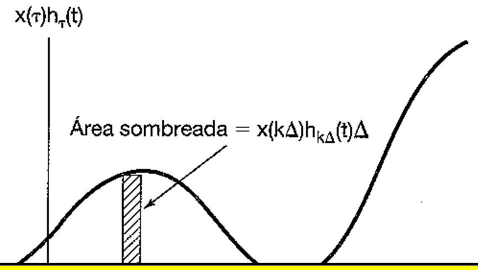
$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) h_{k\Delta}(t)\Delta. \tag{2.30}$$

Conforme $\Delta \to 0$, la sumatoria del lado derecho pasa a ser una integral, como se puede ver gráficamente en la figura 2.16. En forma específica, en la figura 2.16 el rectángulo sombreado representa un término en la sumatoria del lado derecho de la ecuación (2.30) y a medida que $\Delta \to 0$ la sumatoria se aproxima al área bajo $x(\tau)h_\tau(t)$ vista como una función de τ. Por tanto,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_\tau(t) d\tau. \tag{2.31}$$

La interpretación de la ecuación (2.31) es análoga a la de la ecuación (2.29). Como demostramos en la sección 2.2.1, cualquier entrada $x(t)$ se puede representar como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau.$$



Esto es, podemos pensar intuitivamente en $x(t)$ como una "suma" de impulsos ponderados desplazados, donde el peso en el impulso $\delta(t - \tau)$ es $x(\tau)d\tau$. Con esta interpretación, la ecuación (2.31) representa la superposición de las respuestas a cada una de estas entradas, y por linealidad, el peso en la respuesta $h_\tau(t)$ al impulso desplazado $\delta(t - \tau)$ también es $x(\tau)d\tau$.

La ecuación (2.31) representa la forma general de la respuesta de un sistema lineal en el caso continuo. Si además de ser lineal, el sistema también es invariante en el tiempo, entonces $h_\tau(t) = h_0(t - \tau)$; es decir, la respuesta de un sistema LTI al impulso unitario $\delta(t - \tau)$, el cual está desplazado τ segundos desde el origen, es una versión de la respuesta a la función impulso unitario $\delta(t)$ desplazada en forma semejante. Nuevamente por comodidad de notación, quitaremos el subíndice y definiremos la *respuesta al impulso unitario* $h(t)$ como

$$h(t) = h_0(t); \tag{2.32}$$

es decir, $h(t)$ es la respuesta a $\delta(t)$. En este caso, la ecuación (2.31) se vuelve

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau.} \tag{2.33}$$

La ecuación (2.33), conocida como la *integral de convolución* o la *integral de superposición*, es la contraparte continua de la suma de convolución de la ecuación (2.6) y corresponde a la representación de un sistema LTI continuo en términos de su respuesta a un impulso unitario. La convolución de dos señales $x(t)$ y $h(t)$ será representada simbólicamente como

$$y(t) = x(t) * h(t). \tag{2.34}$$

Aun cuando hemos decidido usar el símbolo $*$ para denotar tanto la convolución discreta como la continua, por lo general el contexto será suficiente para distinguir el caso de que se trate.

Al igual que en el caso discreto, podemos ver que un sistema LTI continuo está completamente caracterizado por su respuesta al impulso, es decir, por su respuesta a una sola señal elemental, el impulso unitario $\delta(t)$. En la siguiente sección exploraremos las implicaciones que esto conlleva conforme examinamos varias de las propiedades de la convolución y de los sistemas LTI tanto en el caso continuo como en tiempo discreto.

El procedimiento para evaluar la integral de convolución es bastante similar al de su contraparte de tiempo discreto, la suma de convolución. Específicamente, en la ecuación (2.33) vemos que para cualquier valor de t, la salida $y(t)$ es una integral ponderada de la entrada, donde el peso sobre $x(\tau)$ es $h(t - \tau)$. Para evaluar esta integral para un valor específico de t, primero debemos obtener la señal $h(t - \tau)$ (considerada como una función de τ con t fija) a partir de $h(\tau)$ mediante un reflejo alrededor del origen y un corrimiento a la derecha en un valor t si $t > 0$, o hacia la izquierda por $|t|$ para $t < 0$. En seguida multiplicamos las señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ y se obtiene $y(t)$ al integrar el producto

Ejemplo 2.6

Sea $x(t)$ la entrada a un sistema LTI con respuesta al impulso unitario $h(t)$, donde

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

y

$$h(t) = u(t).$$

En la figura 2.17 hemos representado las funciones $h(\tau)$, $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ para un valor negativo y uno positivo de t. Gracias a la figura, vemos que para $t < 0$ el producto de $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$ es cero, y en consecuencia, $y(t)$ es cero. Para $t > 0$,

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau}, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}.$$

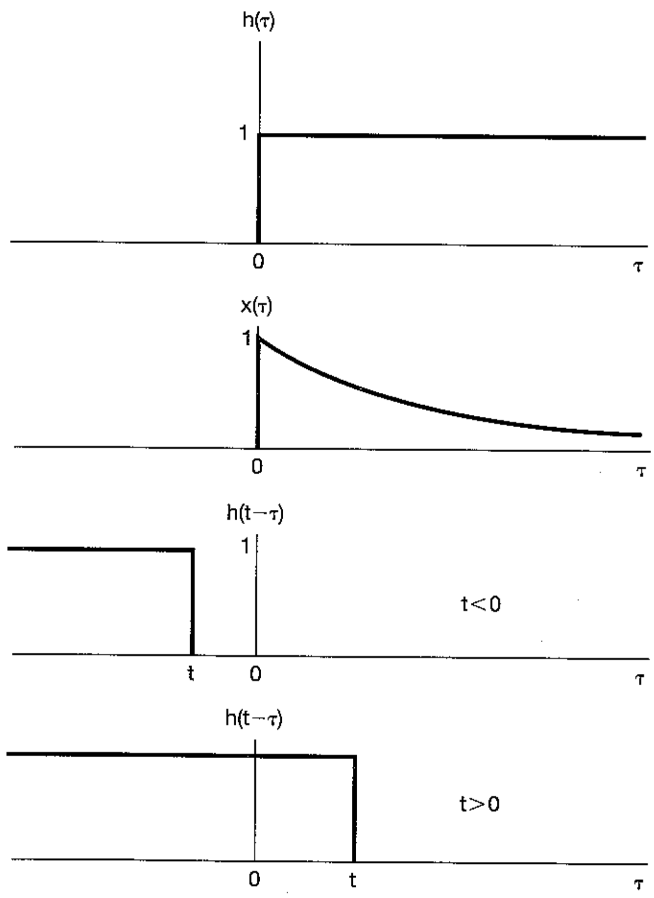


Figura 2.17 Cálculo de la integral de convolución para el

De esta expresión podemos calcular $y(t)$ para $t > 0$:

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau}\Big|_0^t$$
$$= \frac{1}{a}(1 - e^{-a\tau}).$$

Por consiguiente, para toda t, $y(t)$ es

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t),$$

la cual se muestra en la figura 2.18.

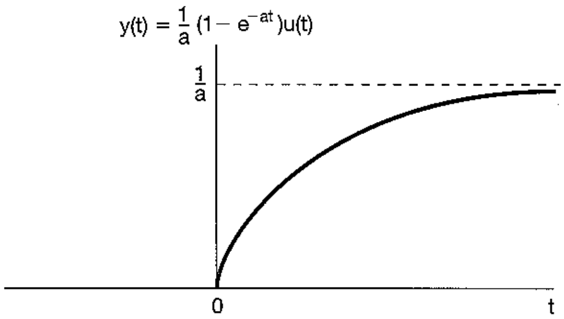


Figura 2.18 Respuesta del sistema en el ejemplo 2.6 con respuesta al impulso $h(t) = u(t)$ a la entrada $x(t) = e^{-at}u(t)$.

Ejemplo 2.7

Considere la convolución de las siguientes dos señales:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases},$$
$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}.$$

Al igual que en el ejemplo 2.4 para la convolución discreta, es conveniente considerar la evaluación de $y(t)$ en intervalos separados. En la figura 2.19 hemos dibujado $x(\tau)$ e ilustrado $h(t - \tau)$ en cada uno de los intervalos de interés. Para $t < 0$ y para $t > 3T$, $x(\tau)h(t - \tau) = 0$ para todos los valores de τ, y en consecuencia, $y(t) = 0$. Para los otros intervalos, el producto $x(\tau)h(t - \tau)$ es como se indica en la figura 2.20. Así, para estos tres intervalos, la integración puede realizarse de forma gráfica con el siguiente resultado:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 < t < T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2, & T < t < 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T < t < 3T \\ 0, & 3T < t \end{cases},$$

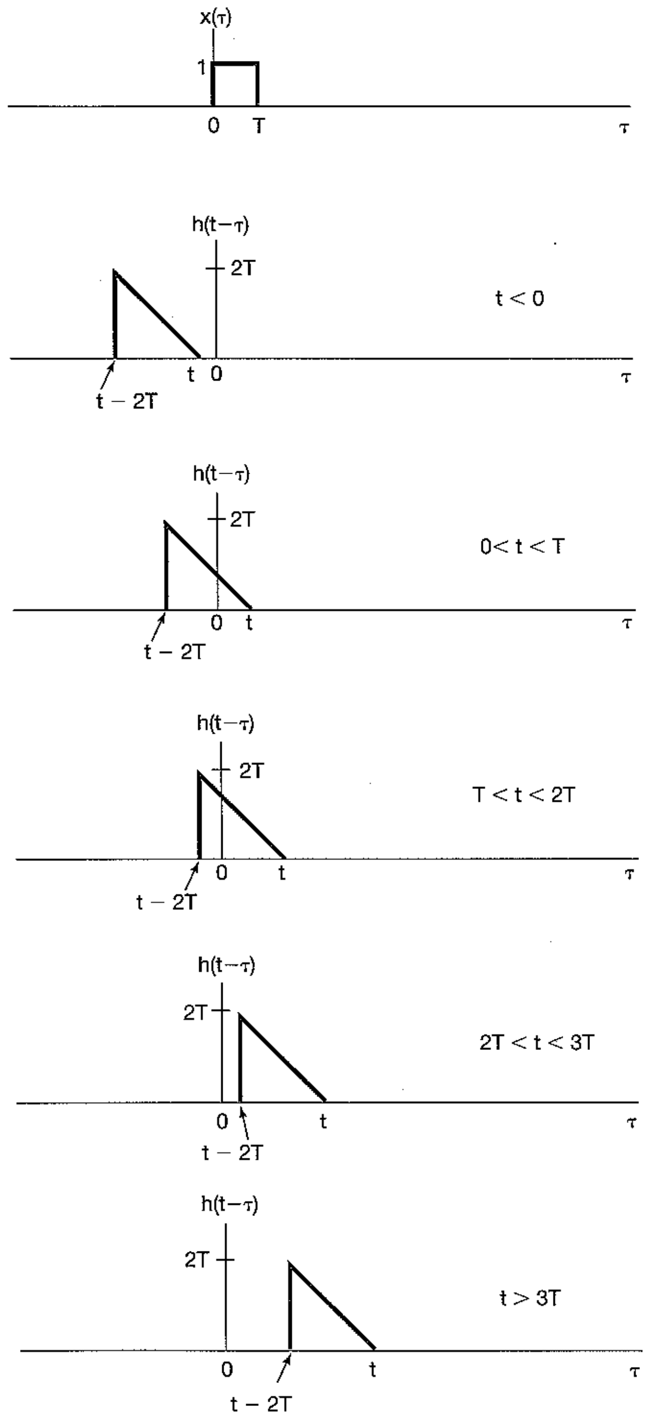


Figura 2.19 Señales $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ para diferentes valores de t del ejemplo 2.7.

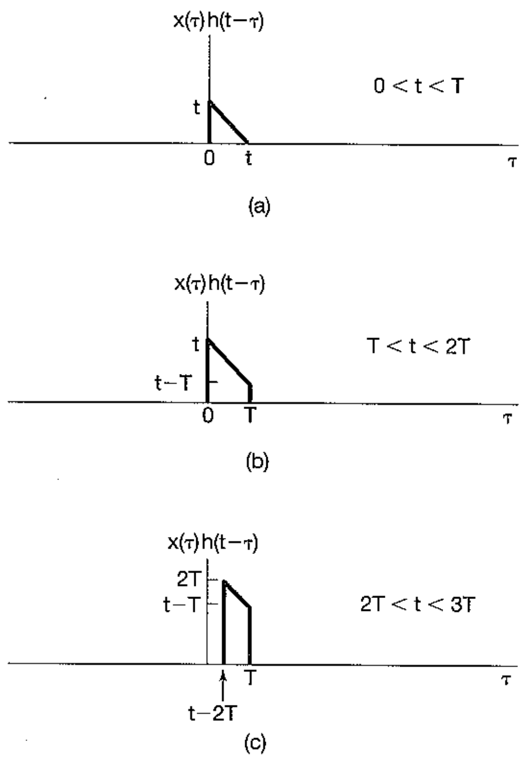


Figura 2.20 Producto $x(\tau)h(t-\tau)$ del ejemplo 2.7 para los tres intervalos de valores de t en los cuales el producto no es idéntico a cero. (Vea la figura 2.19.)

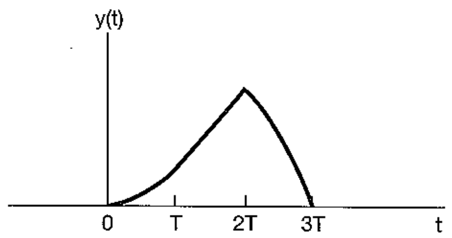


Figura 2.21 Señal $y(t) = x(t) * h(t)$ para el ejemplo 2.7.

Ejemplo 2.8

Sea que $y(t)$ denota la convolución de las siguientes dos señales:

$$x(t) = e^{2t}u(-t), \tag{2.35}$$

$$h(t) = u(t-3). \tag{2.36}$$

Las señales $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ están trazadas como funciones de τ en la figura 2.22(a). Observamos primero que estas dos señales tienen regiones diferentes de cero que se

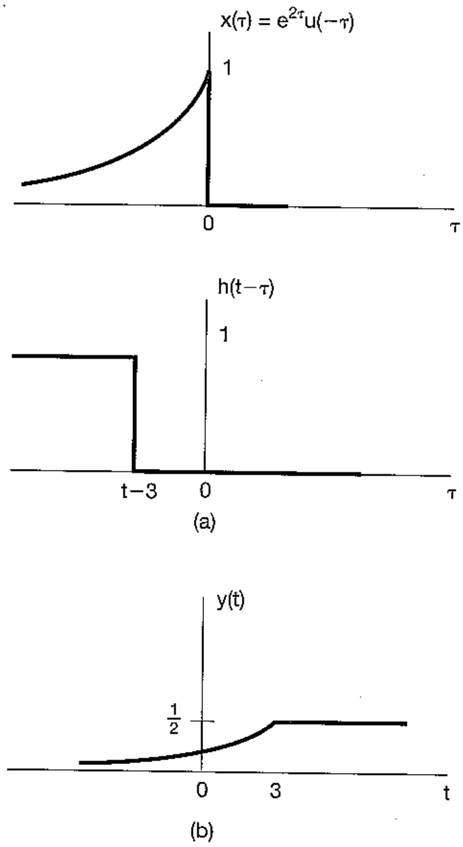


Figura 2.22 El problema de convolución considerado en el ejemplo 2.8.

traslapan, sin importar el valor de t. Cuando $t-3 \le 0$, el producto de $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ es diferente de cero para $-\infty < \tau < t-3$, y la integral de convolución se convierte en

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2}e^{2(t-3)}. \tag{2.37}$$

Para $t-3 \ge 0$, el producto $x(\tau)h(t-\tau)$ es diferente de cero para $-\infty < \tau < 0$, de manera que la integral de convolución es

$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2}. \tag{2.38}$$

La señal resultante $y(t)$ está trazada en la figura 2.22(b).

Como ilustran estos ejemplos y los presentados en la sección 2.1, la interpretación gráfica de la convolución continua y la discreta es de un valor considerable para visualizar la evaluación de las integrales y sumas de convolución.

2.3 PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

En las dos secciones anteriores desarrollamos las representaciones, en extremo importantes, de los sistemas LTI continuos y discretos en términos de sus respuestas al impulso unitario. En el caso discreto esta representación toma la forma de la suma de convolución, mientras que su contraparte continua es la integral de convolución, las cuales repetimos aquí por conveniencia:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \tag{2.39}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) \tag{2.40}$$

Como ya hemos enfatizado, una consecuencia de estas representaciones es que las características de un sistema LTI están determinadas completamente por su respuesta al impulso. Es importante enfatizar que esta propiedad se cumple en general *sólo* para sistemas LTI. En particular, como se ilustra en los siguientes ejemplos, la respuesta al impulso unitario de un sistema no lineal *no* caracteriza por completo el comportamiento del sistema.

Ejemplo 2.9

Considere un sistema discreto con respuesta al impulso unitario

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}. \tag{2.41}$$

Si el sistema es LTI, entonces la ecuación (2.41) determina por completo su comportamiento entrada-salida. En particular, sustituyendo la ecuación (2.41) por la suma de convolución, es decir, la ecuación (2.39), encontramos la siguiente ecuación explícita que describe cómo están relacionadas la entrada y la salida de este sistema LTI:

$$y[n] = x[n] + x[n-1]. \tag{2.42}$$

Por otro lado, hay *muchos* sistemas no lineales con la misma respuesta [es decir, la proporcionada por la ecuación (2.41)] a la entrada $\delta[n]$. Por ejemplo, los siguientes sistemas tienen esta propiedad:

$$y[n] = (x[n] + x[n-1])^2,$$

$$y[n] = \text{máx}(x[n], x[n-1]).$$

En consecuencia, si el sistema no es lineal, no está caracterizado por completo por la respuesta al impulso presentada en la ecuación (2.41).

El ejemplo anterior ilustra el hecho de que los sistemas LTI tienen varias propiedades que no poseen otros sistemas, empezando por la muy especial representación que tienen en términos de las integrales y sumas de convolución. En lo que queda de esta sección exploraremos algunas de las más importantes y básicas de estas propiedades.

2.3.1 Propiedad conmutativa

Una propiedad básica de la convolución tanto continua como discreta consiste en que es una operación *conmutativa*. Es decir,

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k], \tag{2.43}$$

y en el caso continuo,

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \tag{2.44}$$

Estas expresiones se pueden verificar de una forma directa mediante la sustitución de variables en las ecuaciones (2.39) y (2.40). Por ejemplo, en el discreto, si consideramos que $r = n - k$ o, de manera equivalente, $k = n - r$, la ecuación (2.39) se convierte en

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-r]h[r] = h[n] * x[n]. \tag{2.45}$$

Con esta sustitución de variables, los papeles de $x[n]$ y $h[n]$ se intercambian. De acuerdo con la ecuación (2.45), la salida de un sistema LTI con entrada $x[n]$ y respuesta al impulso unitario $h[n]$ es idéntica a la salida de un sistema LTI con entrada $h[n]$ y respuesta al impulso unitario $x[n]$. Por ejemplo, pudimos haber calculado la convolución en el ejemplo 2.4, reflejando y desplazando primero $x[k]$, multiplicando después las señales $x[n-k]$ y $h[k]$ y sumando finalmente los productos para todos los valores de k.

De manera similar, la ecuación (2.44) se puede verificar mediante un cambio de variables, y las implicaciones de este resultado en el caso continuo son las mismas: la salida de un sistema LTI con entrada $x(t)$ y respuesta al impulso unitario $h(t)$ es idéntica a la salida de un sistema LTI con entrada $h(t)$ y respuesta al impulso unitario $x(t)$. Por tanto, pudimos haber calculado la convolución en el ejemplo 2.7 mediante el reflejo y corrimiento de $x(t)$, multiplicando las señales $x(t-\tau)$ y $h(\tau)$, e integrando sobre $-\infty < \tau < +\infty$. En casos específicos, una de las dos formas para calcular las convoluciones [es decir, la ecuación (2.39) o la (2.43) en el caso discreto y la ecuación (2.40) o la (2.44) en el caso continuo] se puede visualizar más fácilmente, pero ambas formas siempre dan la misma respuesta.

2.3.2 Propiedad distributiva

Otra propiedad básica de la convolución en la propiedad *distributiva*. Específicamente, la convolución se distribuye a través de la adición, de manera que en el caso discreto

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n], \tag{2.46}$$

y en el continuo

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t). \tag{2.47}$$

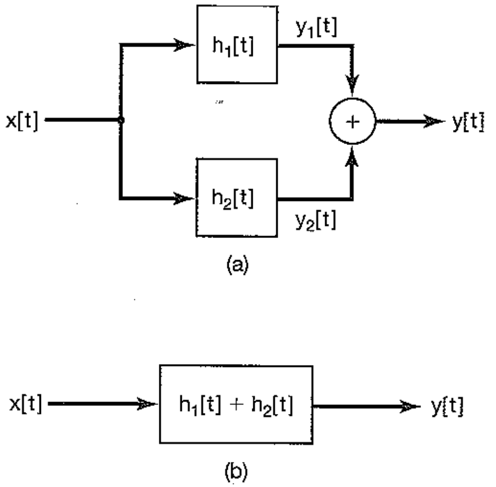


Figura 2.23 Interpretación de la propiedad distributiva de la convolución para una interconexión en paralelo de los sistemas LTI.

La propiedad distributiva posee una interpretación útil en términos de interconexiones de los sistemas. Considere dos sistemas LTI continuos en paralelo, como se indica en la figura 2.23(a). Los sistemas mostrados en el diagrama de bloque son sistemas LTI con las respuestas al impulso unitario indicadas. Esta representación gráfica es una forma particularmente conveniente para denotar los sistemas LTI en diagramas de bloque, y también enfatiza nuevamente el hecho de que la respuesta al impulso de un sistema LTI caracteriza por completo su comportamiento.

Los dos sistemas con respuestas al impulso $h_1(t)$ y $h_2(t)$, tienen idénticas entradas y sus salidas se suman. Puesto que

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$$

y

$$y_2(t) = x(t) * h_2(t),$$

el sistema de la figura 2.23(a) tiene una salida

$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t), \tag{2.48}$$

que corresponde al miembro derecho de la ecuación (2.47). El sistema de la figura 2.23(b) tiene una salida

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)], \tag{2.49}$$

que corresponde al miembro izquierdo de la ecuación (2.47). Al aplicar la ecuación (2.47) a la ecuación (2.49) y comparar el resultado con la ecuación (2.48) vemos que los sistemas en las figuras 2.23(a) y (b) son idénticos.

Existe una interpretación idéntica en el caso discreto, en la cual cada una de las señales en la figura 2.23 es reemplazada por su contraparte discreta (es decir, $x(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ y $y(t)$ son reemplazadas por $x[n]$, $h_1[n]$, $h_2[n]$, $y_1[n]$, $y_2[n]$ y $y[n]$, respectivamente). Entonces, resumiendo, en virtud de la propiedad distributiva de la convolución, una combinación en paralelo de sistemas LTI se puede reemplazar con un solo sis-

Asimismo, como una consecuencia de las propiedades conmutativa y distributiva, tenemos

$$[x_1[n] + x_2[n]] * h[n] = x_1[n] * h[n] + x_2[n] * h[n] \tag{2.50}$$

y

$$[x_1(t) + x_2(t)] * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t), \tag{2.51}$$

lo cual establece simplemente que la respuesta de un sistema LTI a la suma de dos entradas debe ser igual a la suma de las respuestas a esas señales de manera individual.

Como se ilustra en el siguiente ejemplo, la propiedad distributiva de la convolución también puede explotarse para descomponer una convolución complicada en varias más sencillas.

Ejemplo 2.10

Sea $y[n]$ que denota la convolución de las siguientes dos secuencias:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[-n], \tag{2.52}$$

$$h[n] = u[n]. \tag{2.53}$$

Observe que la secuencia $x[n]$ es diferente de cero en todo el eje de tiempo. La evaluación directa de dicha convolución es algo tediosa. En su lugar, podemos hacer uso de la propiedad distributiva para expresar $y[n]$ como la suma de los resultados de dos problemas de convolución más simples. En particular, si determinamos que $x_1[n] = (1/2)^n u[n]$ y $x_2[n] = 2^n u[-n]$, se sigue que

$$y[n] = (x_1[n] + x_2[n]) * h[n]. \tag{2.54}$$

Usando la propiedad distributiva de la convolución, podemos rescribir la ecuación (2.54) como

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n], \tag{2.55}$$

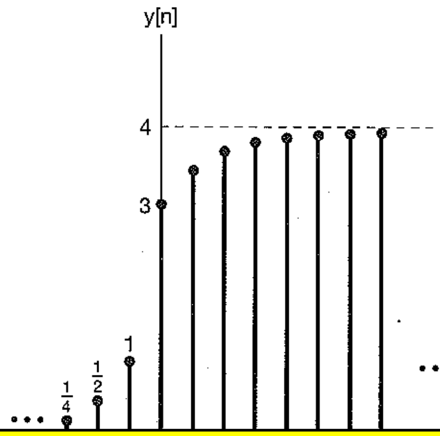
donde

$$y_1[n] = x_1[n] * h[n] \tag{2.56}$$

y

$$y_2[n] = x_2[n] * h[n]. \tag{2.57}$$

La convolución en la ecuación (2.56) para $y_1[n]$ se puede obtener del ejemplo 2.3 (con $\alpha = 1/2$), mientras que $y_2[n]$ se evaluó en el ejemplo 2.5. La suma de ambas es $y[n]$, la cual se muestra en la figura 2.24.



2.3.3 Propiedad asociativa

Otra propiedad importante y útil de la convolución es la asociativa. Esto es, en el caso discreto

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n], \tag{2.58}$$

y en el continuo

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t). \tag{2.59}$$

Esta propiedad se prueba mediante manipulaciones directas de las sumatorias e integrales involucradas. Los ejemplos que lo verifican se dan en el problema 2.43.

Como una consecuencia de la propiedad asociativa, las expresiones

$$y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n] \tag{2.60}$$

y

$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t) \tag{2.61}$$

no son ambiguas. Es decir, de acuerdo con las ecuación (2.58) y (2.59), no importa en qué orden convolucionemos estas señales.

Una interpretación de la propiedad asociativa se ilustra para sistemas discretos en las figuras 2.25(a) y (b). En la figura 2.25(a),

$$\begin{aligned} y[n] &= w[n] * h_2[n] \\ &= (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]. \end{aligned}$$

En la figura 2.25(b),

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= x[n] * (h_1[n] * h_2[n]). \end{aligned}$$

De acuerdo con la propiedad asociativa, la interconexión en serie de los dos sistemas en la figura 2.25(a) es equivalente al sistema individual en la figura 2.25(b). Esto se puede generalizar a un número arbitrario de sistemas LTI en cascada, y la interpretación y conclusión análogas también se cumplen en el caso continuo.

Si usamos la propiedad conmutativa junto con la propiedad asociativa, podremos encontrar otra propiedad muy importante de los sistemas LTI. Específicamente, gracias a las figuras 2.25(a) y (b), podemos concluir que la respuesta al impulso de los dos sistemas LTI en cascada es la convolución de sus respuestas individuales al impulso. Puesto que la convolución es conmutativa, podemos calcular esta convolución de $h_1[n]$ y $h_2[n]$ en cualquier orden. Por tanto, las figuras 2.25(b) y (c) son equivalentes, y a causa de la propiedad asociativa, éstas son a su vez equivalentes al sistema de la figura 2.25(d), la cual notamos que es una combinación en cascada de dos sistemas como en la figura 2.25(a), pero con el orden de la cascada invertido. En consecuencia, la respuesta al impulso unitario de dos sistemas LTI en cascada no depende del orden en el cual estén conectados. De hecho, la misma situación se repite para un número arbitrario de sistemas LTI en cascada: el orden en que se conecten no importa en lo que concierne a la respuesta al

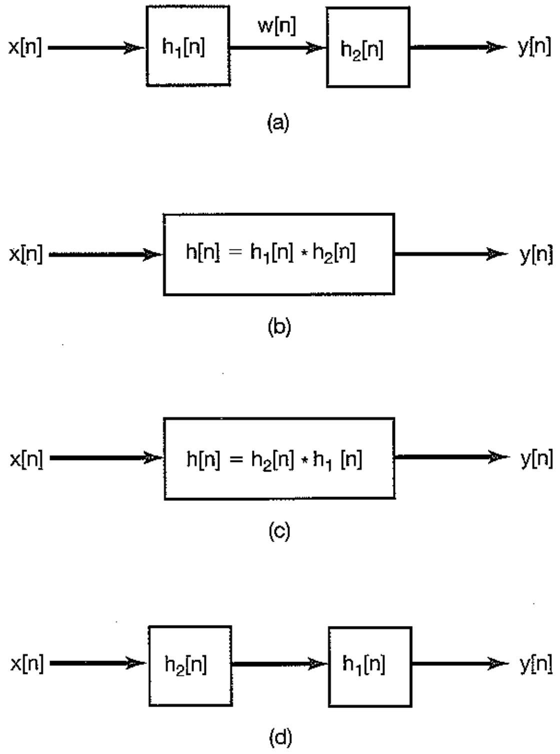


Figura 2.25 Propiedad asociativa de la convolución y su implicación, y la propiedad conmutativa de la interconexión en serie de los sistemas LTI.

Es importante subrayar que el comportamiento de los sistemas LTI en cascada (y, en particular, el hecho de que la respuesta del sistema completo no depende del orden de los sistemas en cascada) es muy especial para esos sistemas. En contraste, por lo general el orden en el cual están conectados en cascada los sistemas no lineales no se puede cambiar sin que cambie la respuesta total. Por ejemplo, si tenemos dos sistemas sin memoria, uno que sea la multiplicación por dos y el otro el cuadrado de la entrada, entonces si multiplicamos primero y elevamos al cuadrado después, obtenemos

$$y[n] = 4x^2[n].$$

Sin embargo, si multiplicamos por dos después de elevar al cuadrado, tenemos

$$y[n] = 2x^2[n].$$

Por tanto, el poder intercambiar el orden de los sistemas en cascada es una característica particular de los sistemas LTI. De hecho, como se muestra en el problema 2.51, para que esta propiedad sea válida en general, necesitamos tanto la linealidad como la invariancia en el tiempo.

2.3.4 Sistemas LTI con y sin memoria

creto es que $h[n] = 0$ para $n \neq 0$. En este caso la respuesta al impulso tiene la forma

$$h[n] = K\delta[n], \tag{2.62}$$

donde $K = h[0]$ es una constante y la suma de convolución se reduce a la relación

$$y[n] = Kx[n]. \tag{2.63}$$

Si un sistema LTI discreto tiene una respuesta al impulso $h[n]$ que no es idéntica a cero para $n \neq 0$, entonces el sistema tiene memoria. Un ejemplo de un sistema LTI con memoria es el sistema proporcionado por la ecuación (2.42). La respuesta al impulso para este sistema, ofrecida en la ecuación (2.41), es diferente de cero para $n = 1$.

De la ecuación (2.40) podemos deducir propiedades similares de los sistemas LTI continuos con y sin memoria. En particular, un sistema LTI continuo es sin memoria si $h(t) = 0$ para $t \neq 0$, y dicho sistema LTI sin memoria tiene la forma

$$y(t) = Kx(t) \tag{2.64}$$

para alguna constante K y tiene la respuesta al impulso

$$h(t) = K\delta(t). \tag{2.65}$$

Note que si $K = 1$ en las ecuaciones (2.62) y (2.65), entonces estos sistemas llegan a ser sistemas identidad, con salida igual a la entrada y con respuesta al impulso unitario igual al impulso unitario. En este caso, las fórmulas de suma e integral de convolución implican que

$$x[n] = x[n] * \delta[n]$$

y

$$x(t) = x(t) * \delta(t),$$

las cuales se reducen a las propiedades de selección de los impulsos unitarios continuos y discretos:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau.$$

2.3.5 Invertibilidad de sistemas LTI

Considere un sistema LTI continuo con respuesta al impulso $h(t)$. Con base en el análisis de la sección 1.6.2, este sistema es invertible únicamente si existe un sistema inverso que, cuando está conectado en serie con el sistema original, produce una salida igual a la entrada del primer sistema. Más aún, si un sistema LTI es invertible, entonces tiene un inverso LTI. (Véase el problema 2.50.) Por tanto, tenemos el dibujo mostrado en la figu-

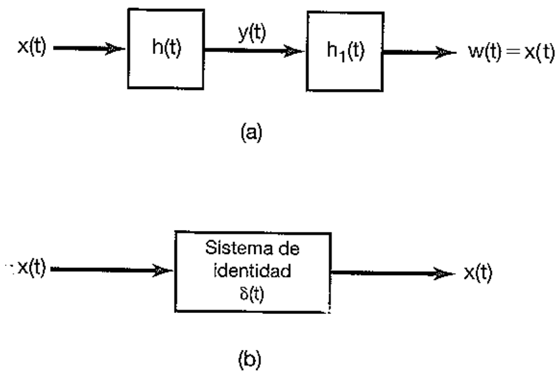


Figura 2.26 Concepto de un sistema inverso para los sistemas LTI continuos. El sistema con respuesta al impulso $h_1(t)$ es el inverso del sistema con respuesta al impulso $h(t)$ si $h(t) * h_1(t) = \delta(t)$.

total al impulso en la figura 2.26(a) es $h(t) * h_1(t)$, tenemos la condición de que, para satisfacerla, $h_1(t)$ debe ser la respuesta al impulso del sistema inverso, o sea:

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t). \tag{2.66}$$

De manera similar, en el caso discreto la respuesta al impulso $h_1[n]$ del sistema inverso para un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ debe cumplir con

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n]. \tag{2.67}$$

Los siguientes dos ejemplos ilustran la invertibilidad y la construcción de un sistema inverso.

Ejemplo 2.11

Considere el sistema LTI que consiste en un puro corrimiento en el tiempo

$$y(t) = x(t - t_0). \tag{2.68}$$

Este sistema está *retrasado* si $t_0 > 0$ y *adelantado* si $t_0 < 0$. Por ejemplo, si $t_0 > 0$, entonces la salida en el tiempo t es igual al valor de la entrada en el tiempo anterior $t - t_0$. Si $t_0 = 0$, el sistema en la ecuación (2.68) es el sistema identidad y es por tanto sin memoria. Para cualquier otro valor de t_0, este sistema tiene memoria, ya que responde al valor de la entrada en un tiempo diferente al tiempo actual.

La respuesta al impulso para el sistema se puede obtener de la ecuación (2.68) tomando la entrada igual a $\delta(t)$, es decir,

$$h(t) = \delta(t - t_0). \tag{2.69}$$

Por tanto,

$$x(t - t_0) = x(t) * \delta(t - t_0). \tag{2.70}$$

Esto es, la convolución de una señal con un impulso desplazado, simplemente desplaza la señal.

Para recuperar la entrada a partir de la salida, es decir, para invertir el sistema, tomamos

$$h_1(t) = \delta(t + t_0),$$

entonces

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t).$$

De manera similar, un mero corrimiento en el tiempo en tiempo discreto tiene la respuesta al impulso unitario $\delta[n - n_0]$, de manera que el convolucionar una señal con un impulso desplazado es lo mismo que desplazar la señal. Además, el inverso del sistema LTI con respuesta la impulso $\delta[n - n_0]$ es el sistema LTI que desplaza la señal en la dirección opuesta por la misma cantidad, es decir, el sistema LTI con respuesta al impulso $\delta[n + n_0]$.

Ejemplo 2.12

Considere un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h[n] = u[n]. \tag{2.71}$$

Usando la suma de convolución, podemos calcular la respuesta de este sistema a una entrada arbitraria:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[n-k]. \tag{2.72}$$

Ya que $u[n-k]$ es igual a 0 para $n - k < 0$ y 1 para $n - k \geq 0$, la ecuación (2.72) se convierte en

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]. \tag{2.73}$$

Es decir, este sistema, el cual encontramos primero en la sección 1.6.1 [vea la ecuación (1.92)], es un sumador o acumulador que calcula la sumatoria consecutiva de todos los valores de la entrada hasta el tiempo presente. Como ya vimos en la sección 1.6.2, este sistema es invertible, y su inverso, como se obtuvo por la ecuación (1.99), es

$$y[n] = x[n] - x[n-1], \tag{2.74}$$

el cual es simplemente una operación de *primera diferencia*. Si escogemos $x[n] = \delta[n]$, encontraremos que la respuesta al impulso del sistema inverso es

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]. \tag{2.75}$$

Como una comprobación de que $h[n]$ en la ecuación (2.71) y $h_1[n]$ en la ecuación (2.75) son realmente las respuestas al impulso de los sistemas LTI que son inversos uno de otro, podemos verificar la ecuación (2.67) por cálculo directo:

$$\begin{aligned} h[n] * h_1[n] &= u[n] * \{\delta[n] - \delta[n-1]\} \\ &= u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n-1] \end{aligned} \tag{2.76}$$

2.3.6 Causalidad para los sistemas LTI

En la sección 1.6.3 presentamos la propiedad de causalidad: la salida de un sistema causal depende sólo de los valores presentes y pasados de la entrada al mismo. Si usamos la suma y la integral de convolución, podemos relacionar esta propiedad con una propiedad correspondiente de la respuesta al impulso de un sistema LTI. En concreto, para que un sistema LTI discreto sea causal, $y[n]$ no debe depender de $x[k]$ para $k > n$. De la ecuación (2.39) sabemos que, para que esto sea válido, todos los coeficientes $h[n-k]$ que multiplican valores de $x[k]$ para $k > n$ deben ser cero. Entonces, esto requiere que la respuesta al impulso de un sistema LTI causal discreto satisfaga la condición

$$h[n] = 0 \quad \text{para } n < 0. \tag{2.77}$$

De acuerdo con la ecuación (2.77), la respuesta al impulso de un sistema LTI causal debe ser cero antes de que ocurra el impulso, lo cual es consistente con el concepto intuitivo de causalidad. De manera más general, como se muestra en el problema 1.44, la causalidad para un sistema lineal es equivalente a la condición de *reposo inicial*; es decir, si la entrada a un sistema causal es 0 hasta algún punto en el tiempo, entonces la salida también debe ser 0 hasta ese tiempo. Es importante subrayar que la equivalencia entre la causalidad y la condición de reposo inicial se aplica sólo a sistemas lineales. Por ejemplo, como se analizó en la sección 1.6.6, el sistema $y[n] = 2x[n] + 3$ no es lineal. Sin embargo, es causal, y de hecho sin memoria. Por otro lado, si $x[n] = 0$, $y[n] = 3 \neq 0$, de modo que no satisface la condición de reposo inicial.

Para un sistema LTI causal discreto, la condición en la ecuación (2.77) implica que la representación de la suma de convolución en la ecuación (2.39) se convierta en

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k], \tag{2.78}$$

y la forma equivalente alternativa, la ecuación (2.43), es ahora

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]. \tag{2.79}$$

De manera análoga, un sistema LTI continuo es causal si

$$h(t) = 0 \quad \text{para } t < 0, \tag{2.80}$$

y en este caso la integral de convolución está dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \tag{2.81}$$

Tanto el acumulador ($h[n] = u[n]$) como su inverso ($h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$), descritos en el ejemplo 2.12, satisfacen la ecuación (2.77) y por tanto son causales. El puro corrimiento en el tiempo con respuesta al impulso $h(t) = \delta(t - t_0)$ es causal para $t_0 \geq 0$ (cuando el corrimiento en el tiempo es un retardo), pero es no causal para $t_0 < 0$ (en cuyo caso el corrimiento en el tiempo es un adelanto, de modo que la salida anticipa valores futuros de la entrada).

Finalmente, mientras que la causalidad es una propiedad de los sistemas, es terminología común referirse a una señal como causal si es cero para $n < 0$ o $t < 0$. La motivación para esta terminología surge de las ecuaciones (2.77) y (2.80): la causalidad de un sistema LTI es equivalente a su respuesta al impulso cuando ésta es una señal causal.

2.3.7 Estabilidad para los sistemas LTI

Recordemos de la sección 1.6.4 que un sistema es *estable* si cada entrada limitada produce una salida limitada. Para determinar las condiciones bajo las cuales los sistemas LTI son estables, considere una entrada $x[n]$ que está limitada en magnitud:

$$|x[n]| < B \quad \text{para toda } n. \tag{2.82}$$

Suponga que aplicamos esta entrada a un sistema LTI con respuesta al impulso unitario $h[n]$. Entonces, usando la suma de convolución, obtenemos una expresión para la magnitud de la salida

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \right|. \tag{2.83}$$

Ya que la magnitud de la suma de un conjunto de números no es mayor que la suma de las magnitudes de los números, deducimos de la ecuación (2.83) que

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]||x[n-k]|. \tag{2.84}$$

A partir de la ecuación (2.82), $|x[n-k]| < B$ para todos los valores de k y n. Junto con la ecuación (2.84), esto implica que

$$|y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \quad \text{para toda } n. \tag{2.85}$$

De la ecuación (2.85) podemos concluir que si la respuesta al impulso unitario es *absolutamente sumable*, esto es, si

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty, \tag{2.86}$$

entonces $y[n]$ está limitada en magnitud y por consiguiente el sistema es estable. En consecuencia, la ecuación (2.86) es una condición suficiente para garantizar la estabilidad de un sistema LTI discreto. De hecho, ésta es también una condición necesaria, ya que, como se muestra en el problema 2.49, si la ecuación (2.86) no se satisface, hay entradas limitadas que producen salidas no limitadas. Así, la estabilidad de un sistema LTI discreto es por completo equivalente a la ecuación (2.86).

En el caso continuo obtenemos una caracterización análoga de estabilidad en términos de la respuesta al impulso de un sistema LTI. Concretamente, si $|x(t)| < B$ para toda t, entonces, en analogía con las ecuaciones (2.83)-(2.85), encontramos que

$$\begin{aligned}|y(t)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau \\ &\leq B\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau.\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema es estable si la respuesta al impulso es *absolutamente integrable*; es decir, si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty. \tag{2.87}$$

Como en el caso discreto, si la ecuación (2.87) no se satisface, habrá entradas limitadas que producirán salidas no limitadas. Por consiguiente, la estabilidad de un sistema LTI de tiempo continuo es equivalente a la ecuación (2.87). El uso de las ecuación (2.86) y (2.87) para probar la estabilidad se muestra en los dos siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.13

Considere un sistema que es un puro corrimiento en el tiempo, ya sea continuo o discreto. Entonces en el caso discreto

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\delta[n-n_0]| = 1, \tag{2.88}$$

mientras que en el caso continuo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(\tau-t_0)|d\tau = 1, \tag{2.89}$$

y concluimos que ambos sistemas son estables. Esto no debería sorprendernos, ya que si una señal está limitada en magnitud, también lo estará cualquier versión desplazada en el tiempo de esa misma señal.

Ahora considere el acumulador descrito en el ejemplo 2.12. Como analizábamos en la sección 1.6.4, éste es un sistema inestable ya que si aplicamos una entrada constante al acumulador, la salida crece sin límite. También puede verse que este sistema es inestable por el hecho de que su respuesta al impulso $u[n]$ no es absolutamente sumable:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] = \infty.$$

De manera parecida, considere el integrador, la contraparte continua del acumulador:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau. \tag{2.90}$$

en cuyo caso

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(\tau)|d\tau = \int_{0}^{+\infty} d\tau = \infty.$$

Puesto que la respuesta al impulso no es absolutamente integrable, el sistema no es estable.

2.3.8 Respuesta al escalón unitario de un sistema LTI

Hasta ahora hemos visto que la representación de un sistema LTI en términos de su respuesta al impulso nos permite obtener caracterizaciones muy explícitas de las propiedades de los sistemas. En pocas palabras, ya que $h[n]$ o $h(t)$ determinan por completo el comportamiento de un sistema LTI, hemos podido relacionar las propiedades de los sistemas, como la estabilidad y la causalidad, con las propiedades de la respuesta al impulso.

Hay otra señal que también se usa con bastante frecuencia para describir el comportamiento de sistemas LTI: la *respuesta al escalón unitario*, $s[n]$ o $s(t)$, que corresponde a la salida cuando $x[n] = u[n]$ o $x(t) = u(t)$. La encontraremos útil cuando llegue la ocasión de referirse a la respuesta al escalón y, por tanto, vale la pena relacionarla con la respuesta al impulso. A partir de la representación de la suma de convolución, sabemos que la respuesta al escalón de un sistema LTI discreto es la convolución del escalón unitario con la respuesta al impulso; esto es,

$$s[n] = u[n] * h[n].$$

Sin embargo, por la propiedad conmutativa de la convolución, $s[n] = h[n] * u[n]$, y por tanto $s[n]$ puede verse como la respuesta a la entrada $h[n]$ de un sistema LTI discreto con respuesta al impulso unitario $u[n]$. Como hemos visto en el ejemplo 2.12, $u[n]$ es la respuesta al impulso unitario del acumulador. Entonces,

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]. \tag{2.91}$$

A partir de esta ecuación y del ejemplo 2.12, resulta claro que $h[n]$ se puede recuperar a partir de $s[n]$ usando la relación

$$h[n] = s[n] - s[n-1]. \tag{2.92}$$

Esto es, la respuesta al escalón de un sistema LTI discreto es la sumatoria consecutiva de su respuesta al impulso [ecuación (2.91)]. Por el contrario, la respuesta al impulso de un sistema LTI discreto es la primera diferencia de su respuesta al escalón [ecuación (2.92)].

De manera similar, en el caso continuo la respuesta al escalón de un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ está dada por $s(t) = u(t) * h(t)$, la cual también es igual a la respuesta de un integrador [con respuesta al impulso $u(t)$] a la entrada $h(t)$. Es decir, la respuesta al escalón unitario de un sistema LTI de tiempo continuo es la integral consecutiy a partir de la ecuación (2.93), la respuesta al impulso unitario es la primera derivada de la respuesta al escalón unitario,[1] o

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t). \tag{2.94}$$

Por consiguiente, tanto en el caso continuo como en el discreto, la respuesta al escalón unitario también se puede usar para caracterizar a un sistema LTI, ya que podemos calcular la respuesta al impulso unitario a partir de ella. En el problema 2.45 se derivan las expresiones análogas a la suma de convolución y a la integral de convolución para la representación de un sistema LTI en términos de su respuesta al escalón unitario.

2.4 SISTEMAS LTI CAUSALES DESCRITOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES Y DE DIFERENCIAS

Una clase en extremo importante de sistemas continuos es aquella para la cual la entrada y la salida están relacionadas a través de una *ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes*. Las ecuaciones de este tipo surgen de la descripción de una amplia variedad de sistemas y fenómenos físicos. Por ejemplo, como explicábamos en el capítulo 1, la respuesta del circuito *RC* en la figura 1.1, así como el movimiento de un vehículo sujeto a entradas de aceleración y fuerzas de fricción representado en la figura 1.2, se pueden describir mediante ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Este tipo de ecuaciones diferenciales surgen en la descripción de sistemas mecánicos que contienen fuerzas de restauración y de amortiguamiento, en la cinética de reacciones químicas y en muchos otros contextos.

En forma correspondiente, una clase importante de sistemas discretos es aquella en la cual la entrada y la salida están relacionadas a través de una *ecuación de diferencias lineal con coeficientes constantes*. Las ecuaciones de este tipo se utilizan para describir el comportamiento secuencial de procesos muy diferentes. Veamos una muestra de ello: en el ejemplo 1.10 vimos cómo las ecuaciones de diferencias surgen de la descripción de la acumulación de ahorros en una cuenta de banco, y en el ejemplo 1.11 vimos la forma en que se pueden usar para describir una simulación digital de un sistema continuo descrito por una ecuación diferencial. Las ecuaciones de diferencias también surgen con frecuencia en la especificación de sistemas discretos diseñados para realizar operaciones particulares en la señal de entrada. Por ejemplo, el sistema que calcula la diferencia entre valores sucesivos de entrada, como en la ecuación (1.99), y el sistema descrito por la ecuación (1.104) que calcula el valor promedio de la entrada sobre un intervalo, son descritos mediante ecuaciones de diferencias.

A lo largo de todo este libro habrá muchas ocasiones en las cuales consideraremos y examinaremos sistemas descritos mediante ecuaciones lineales y con coeficientes constantes diferenciales y de diferencias. En esta sección vemos de manera general estos sistemas para introducir algunas de las ideas básicas involucradas en la solución de las ecuaciones diferenciales y de diferencias, y para descubrir y explorar algunas de las propiedades de los sistemas descritos por dichas ecuaciones. En los capítulos siguientes desarrollaremos herramientas adicionales para el análisis de señales y sistemas que aumentarán en forma considerable tanto nuestra habilidad para analizar los sistemas descritos por esas ecua-

2.4.1 Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Para introducir algunas de las ideas más importantes referentes a sistemas especificados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, consideremos una ecuación diferencial de primer orden como en la ecuación (1.85):

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t), \tag{2.95}$$

donde $y(t)$ denota la salida del sistema y $x(t)$ es la entrada. Por ejemplo, al comparar la ecuación (2.95) con la ecuación diferencial (1.84) para la velocidad de un vehículo sujeto a fuerzas aplicadas y de fricción, vemos que la ecuación (2.95) correspondería exactamente a este sistema si $y(t)$ estuviera identificada con la velocidad $v(t)$ del vehículo, si $x(t)$ fuera tomada como la fuerza aplicada $f(t)$, y si los parámetros en la ecuación (1.84) estuvieran normalizados en unidades tales que $b/m = 2$ y $1/m = 1$.

Un punto muy importante acerca de ecuaciones diferenciales como la ecuación (2.95) es que proporcionan una especificación implícita del sistema. Es decir, describen una relación entre la entrada y la salida antes que una expresión explícita para la salida del sistema como una función de la entrada. Para obtener una expresión explícita, debemos resolver la ecuación diferencial. Para encontrar una solución, necesitamos más información que la proporcionada por la ecuación diferencial sola. Por ejemplo, para determinar la velocidad de un automóvil al final de un intervalo de 10 segundos cuando ha estado sujeto a una aceleración constante de 1 m/s^2 durante 10 segundos, necesitaríamos también conocer qué tan rápido se estuvo moviendo el vehículo al *inicio* del intervalo. De manera similar, si se nos dice que se aplica un voltaje constante de 1 volt de la fuente al circuito *RC* de la figura 1.1 durante 10 segundos, no podemos determinar cuál es el voltaje del capacitor al final de ese intervalo si no sabemos cuál es el voltaje inicial del capacitor.

De manera más general, para resolver una ecuación diferencial, debemos especificar una o más condiciones auxiliares y, una vez que son especificadas, podemos entonces, en principio, obtener una expresión explícita para la salida en términos de la entrada. En otras palabras, una ecuación diferencial tal como la ecuación (2.95) describe una limitante entre la entrada y la salida de un sistema, pero para caracterizar por completo el sistema debemos además especificar las condiciones auxiliares. Diferentes selecciones de estas condiciones auxiliares conducen por tanto a relaciones diferentes entre la entrada y la salida. En la mayor parte de este libro nos enfocaremos en el uso de ecuaciones diferenciales para describir los sistemas LTI causales, para los cuales las condiciones auxiliares toman una forma particular y simple. Como una forma de ilustrar esto y descubrir además algunas de las propiedades básicas de las soluciones a las ecuaciones diferenciales, veamos la solución de la ecuación (2.95) para una señal de entrada específica $x(t)$.[2]

[2]Nuestro análisis de la solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes es breve, ya que damos por hecho que el lector está familiarizado con esta materia. Como un repaso, recomendamos algún texto sobre la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, tal como *Ordinary Differential Equations* (3a. edición), de G. Birkhoff y G.-C. Rota (Nueva York: John Wiley and Sons, 1978); o *Elementary Differential Equations* (3a. edición), de W.E. Boyce y R.C. DiPrima (Nueva York: John Wiley and Sons, 1977). Asimismo, hay muchos textos que analizan las ecuaciones diferenciales en el contexto de la teoría de circuitos. Vea, por ejemplo, *Basic Circuit Theory* de L.O. Chua, C.A. Desoer y E.S. Kuh (Nueva York: McGraw-Hill Book Com-

Ejemplo 2.14

Considere la solución de la ecuación (2.95) cuando la señal de entrada es

$$x(t) = Ke^{3t}u(t), \tag{2.96}$$

donde K es un número real.

La solución completa de la ecuación (2.96) consiste en la suma de una *solución particular* $y_p(t)$ y una *solución homogénea*, $y_h(t)$, es decir,

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t), \tag{2.97}$$

donde la solución particular satisface la ecuación (2.95) y $y_h(t)$ es una solución de la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0. \tag{2.98}$$

Un método común para encontrar la solución particular para una señal de entrada exponencial como la ecuación (2.96) es buscar la llamada *respuesta forzada*, es decir, una señal de la misma forma que la entrada. Con respecto a la ecuación (2.95), puesto que $x(t) = Ke^{3t}$ para $t > 0$, planteamos una solución hipotética para $t > 0$ de la forma

$$y_p(t) = Ye^{3t}, \tag{2.99}$$

donde Y es un número que debemos determinar. Sustituyendo las ecuaciones (2.96) y (2.99) con la ecuación (2.95) para $t > 0$, obtenemos

$$3Ye^{3t} + 2Ye^{3t} = Ke^{3t}. \tag{2.100}$$

Cancelando el factor e^{3t} en ambos miembros de la ecuación (2.100), obtenemos

$$3Y + 2Y = K, \tag{2.101}$$

o

$$Y = \frac{K}{5}, \tag{2.102}$$

de modo que

$$y_p(t) = \frac{K}{5}e^{3t}, \qquad t > 0. \tag{2.103}$$

Para determinar $y_h(t)$ planteamos una solución hipotética de la forma

$$y_h(t) = Ae^{st}. \tag{2.104}$$

Sustituyéndola con la ecuación (2.98) da

$$Ase^{st} + 2Ae^{st} = Ae^{st}(s + 2) = 0. \tag{2.105}$$

A partir de esta ecuación, nos damos cuenta de que debemos tomar $s = -2$ y que Ae^{-2t} es una solución de la ecuación (2.98) para *cualquier* selección de A. Utilizando este hecho y la ecuación (2.103) en la ecuación (2.97), encontramos que la solución de la ecuación diferencial para $t > 0$ es

Como hicimos notar antes, la ecuación diferencial (2.95) por sí misma no especifica de manera única la respuesta $y(t)$ a la entrada $x(t)$ en la ecuación (2.96). En particular, la constante A en la ecuación (2.106) aún no ha sido determinada. Para que el valor de A sea determinado, necesitamos especificar una condición auxiliar además de la ecuación diferencial (2.95). Como exploramos en el problema 2.34, diferentes selecciones para esta condición auxiliar conducen a diferentes soluciones de $y(t)$ y, en consecuencia, a diferentes relaciones entre la entrada y la salida. Como ya se ha indicado, en la mayor parte de este libro nos enfocaremos en las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones de diferencias usadas para describir los sistemas que son LTI y causales, y en este caso la condición auxiliar toma la forma de la condición de reposo inicial. Es decir, como se muestra en el problema 1.44, para un sistema LTI causal, si $x(t) = 0$ para $t < t_0$, entonces $y(t)$ también debe ser igual a 0 para $t < t_0$. De la ecuación (2.96) vemos que, para nuestro ejemplo, $x(t) = 0$ para $t < 0$ y, por tanto, la condición de reposo inicial implica que $y(t) = 0$ para $t < 0$. Al evaluar la ecuación (2.106) en $t = 0$ y estableciendo $y(0) = 0$ se obtiene

$$0 = A + \frac{K}{5},$$

o

$$A = -\frac{K}{5}.$$

Entonces, para $t > 0$,

$$y(t) = \frac{K}{5}\left[e^{3t} - e^{-2t}\right], \tag{2.107}$$

mientras que para $t < 0$, $y(t) = 0$, debido a la condición de reposo inicial. Combinando estos dos casos, obtenemos la solución completa

$$y(t) = \frac{K}{5}\left[e^{3t} - e^{-2t}\right]u(t). \tag{2.108}$$

El ejemplo 2.14 ilustra varios puntos muy importantes que conciernen a las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y a los sistemas que éstas representan. Primero, la respuesta a una entrada $x(t)$ consistirá, por lo general, en la suma de una solución particular a la ecuación diferencial y a una solución homogénea, es decir, una solución a la ecuación diferencial fijando la entrada a cero. A la solución homogénea con frecuencia se le conoce como la *respuesta natural* del sistema. Las respuestas naturales de circuitos eléctricos y sistemas mecánicos sencillos se exploran en los problemas 2.61 y 2.62.

En el ejemplo 2.14 también vimos que, para determinar por completo la relación entre la entrada y la salida de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial como la ecuación (2.95), debemos especificar las condiciones auxiliares. Una implicación de este hecho, el cual se ilustra en el problema 2.34, es que las selecciones diferentes de las condiciones auxiliares conducen a diferentes relaciones entre la entrada y la salida. Como se mostró en el ejemplo, en la mayor parte usaremos la condición de reposo inicial condición de reposo inicial el sistema descrito mediante la ecuación (2.95) es LTI y causal.[3] Por ejemplo, si en la ecuación (2.96) multiplicamos la entrada por dos, la salida resultante será el doble de la salida en la ecuación (2.108).

Es importante enfatizar que la condición de reposo inicial no especifica una condición inicial de cero en un punto específico en el tiempo, sino que más bien ajusta dicho punto en el tiempo de modo que la respuesta sea cero *hasta* que la entrada se vuelva diferente de cero. Por tanto, si $x(t) = 0$ para $t \leq t_0$ para el sistema LTI causal descrito por la ecuación (2.95), entonces $y(t) = 0$ para $t \leq t_0$, y usaríamos la condición inicial $y(t_0) = 0$ para resolver para la salida en $t > t_0$. Como un ejemplo físico, considere de nuevo el circuito en la figura 1.1, también analizado en el ejemplo 1.8. El reposo inicial para este ejemplo corresponde al planteamiento de que, hasta no conectar una fuente de voltaje diferente de cero al circuito, el voltaje del capacitor será de cero. Entonces, si empezamos a usar el circuito al mediodía de hoy, el voltaje inicial del capacitor será de cero al momento de conectar la fuente de voltaje el mediodía de hoy. De manera similar, si en vez de ello empezamos a usar el circuito al mediodía de mañana, el voltaje inicial del capacitor será cero al momento de conectar la fuente de voltaje el mediodía de mañana.

Este ejemplo también nos proporciona una idea intuitiva de por qué la condición de reposo inicial hace un sistema, descrito por una ecuación diferencial lineal con coeficiente constante, invariante en el tiempo. Por ejemplo, si realizamos un experimento en el circuito, empezando con reposo inicial y considerando después que los coeficientes R y C no cambian con el tiempo, esperaríamos obtener los mismos resultados ya fuera que hiciéramos el experimento hoy o mañana. Esto es, si realizamos experimentos idénticos en los dos días, en donde el circuito empiece a operar a partir del reposo inicial al mediodía de cada día, entonces esperaríamos observar idénticas respuestas (es decir, respuestas que están simplemente desplazadas en el tiempo por un día una con respecto de la otra).

Así como hemos usado la ecuación diferencial de primer orden (2.95) como el medio para el análisis de estos temas, las mismas ideas se extienden de forma directa a los sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales de mayor orden. Una ecuación diferencial general lineal de orden N con coeficiente constante está dada por

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \tag{2.109}$$

El orden se refiere a la derivada de mayor orden de la salida $y(t)$ que aparece en la ecuación. En el caso cuando $N = 0$, la ecuación (2.109) se reduce a

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \tag{2.110}$$

En este caso $y(t)$ es una función explícita de la entrada $x(t)$ y sus derivadas. Para $N \geq 1$, la ecuación (2.109) especifica la salida en forma implícita en términos de la entrada. En este caso, el análisis de la ecuación procede de manera análoga a nuestro análisis de la ecuación diferencial de primer orden en el ejemplo 2.14. La solución $y(t)$ consiste de dos partes, una solución particular a la ecuación (2.109) más una solución a la ecuación

[3]De hecho, como también se muestra en el problema 2.34, si la condición inicial de la ecuación (2.95) es diferente de cero, el sistema resultante es incrementalmente lineal. Esto es, la respuesta total puede verse como

diferencial homogénea

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0. \tag{2.111}$$

Las soluciones a esta ecuación se conocen como las *respuestas naturales* del sistema.

Al igual que en el caso de primer orden, la ecuación diferencial (2.109) no especifica por completo la salida en términos de la entrada, por lo que necesitamos identificar las condiciones auxiliares para determinar por completo la relación entrada-salida del sistema. De nueva cuenta, las diferentes selecciones para estas condiciones auxiliares dan como resultado diferentes relaciones entrada-salida, pero en la mayor parte de este libro usaremos la condición de reposo inicial cuando se trate de sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales. Esto es, si $x(t) = 0$ para $t \leq t_0$, suponemos que $y(t) = 0$ para $t \leq t_0$ y, por tanto, la respuesta para $t > t_0$ se puede calcular a partir de la ecuación diferencial (2.109) con las condiciones iniciales

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \ldots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0. \tag{2.112}$$

Bajo la condición de reposo inicial, el sistema descrito por la ecuación (2.109) es causal y LTI. Dadas las condiciones iniciales en la ecuación (2.112), la salida $y(t)$ puede, en principio, determinarse resolviendo la ecuación diferencial de la forma en que se hizo en el ejemplo 2.14 y se explica más tarde en varios problemas al final del capítulo. Sin embargo, en los capítulos 4 y 9 desarrollaremos algunas herramientas para el análisis de sistemas LTI continuos que facilitarán enormemente la solución de las ecuaciones diferenciales y, en particular, nos proporcionarán métodos poderosos para analizar y caracterizar las propiedades de los sistemas descritos por esas ecuaciones.

2.4.2 Ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes

La contraparte en tiempo discreto de la ecuación (2.109) es la ecuación de diferencias lineal de orden N con coeficientes constantes

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]. \tag{2.113}$$

Una ecuación de este tipo se puede resolver de manera exactamente análoga a la de las ecuaciones diferenciales (véase el problema 2.32).[4] En concreto, la solución $y[n]$ puede escribirse como la suma de una solución particular de la ecuación (2.113) y de una solución de la ecuación homogénea

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0. \tag{2.114}$$

[4]Para un tratamiento detallado de los métodos para resolver ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes, vea *Finite Difference Equations* de H. Levy y F. Lessman (Nueva York, Macmillan, Inc., 1961), o *Finite Difference Equations and Simulations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1968) de F. B. Hildebrand. En

Las soluciones a esta ecuación homogénea se conocen como la respuesta natural del sistema descrito por la ecuación (2.113).

Como en el caso continuo, la ecuación (2.113) no especifica por completo la salida en términos de la entrada. Para hacer esto, debemos también especificar algunas condiciones auxiliares. Puesto que hay muchas posibles selecciones para las condiciones auxiliares que conducen a diferentes relaciones entrada-salida, nos enfocaremos en su mayor parte en la condición de reposo inicial, es decir, si $x[n] = 0$ para $n < n_0$, entonces $y[n] = 0$ también para $n < n_0$. Con reposo inicial, el sistema descrito por la ecuación (2.113) es LTI y causal.

Aunque todas estas propiedades se pueden desarrollar siguiendo un planteamiento que es directamente paralelo a nuestro análisis para ecuaciones diferenciales, el caso discreto ofrece un camino alternativo. Éste surge de la observación de que la ecuación (2.113) se puede reacomodar de la siguiente forma:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}. \tag{2.115}$$

La ecuación (2.115) expresa de forma directa la salida en el tiempo n en términos de los valores previos de la entrada y de la salida. De aquí podemos ver de manera inmediata la necesidad de condiciones auxiliares. Para poder calcular $y[n]$, necesitamos conocer $y[n-1], \ldots, y[n-N]$. Por tanto, si nos dan la entrada para toda n y un conjunto de condiciones auxiliares tales como $y[-N]$, $y[-N+1], \ldots, y[-1]$, la ecuación (2.115) puede resolverse para valores sucesivos de $y[n]$.

Una ecuación de la forma de la ecuación (2.113) o (2.115) se llama *ecuación recursiva*, ya que especifica un procedimiento recursivo para determinar la salida en términos de la entrada y de las salidas previas. En el caso especial cuando $N = 0$, la ecuación (2.115) se reduce a

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M}\left(\frac{b_k}{a_0}\right)x[n-k]. \tag{2.116}$$

Ésta es la contraparte en tiempo discreto del sistema continuo dado en la ecuación (2.110). En este caso $y[n]$ es una función explícita de los valores presentes y previos de la entrada. Por esta razón, la ecuación (2.116) se conoce como *ecuación no recursiva*, ya que no usamos de forma recursiva los valores de la salida calculados previamente para determinar el valor presente de la salida. Por tanto, al igual que en el caso del sistema dado en la ecuación (2.110), no necesitamos condiciones auxiliares para determinar $y[n]$. Además, la ecuación (2.116) describe un sistema LTI y, por cálculo directo se encuentra que la respuesta al impulso de este sistema es

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}. \tag{2.117}$$

Esto es, la ecuación (2.116) no es más que la suma de convolución. Observe que la respuesta al impulso para este sistema tiene duración finita; es decir, es diferente de cero sólo dentro de un intervalo finito de tiempo. Debido a esta propiedad el sistema especificado por la ecuación (2.116) es a menudo denominado *sistema de respuesta finita al impulso (FIR)*.

Aunque no requerimos condiciones auxiliares para el caso de $N = 0$, tales condiciones

Ejemplo 2.15

Considere la ecuación de diferencias

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n], \tag{2.118}$$

la cual también se puede expresar en la forma

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1], \tag{2.119}$$

resaltando el hecho de que necesitamos los valores previos de la salida, $y[n-1]$, para calcular el valor actual. Así, para empezar la recursión, necesitamos una condición auxiliar.

Por ejemplo, suponga que imponemos la condición de reposo inicial y consideramos la entrada

$$x[n] = K\delta[n]. \tag{2.120}$$

En este caso, ya que $x[n] = 0$ para $n \leq -1$, la condición de reposo inicial implica que $y[n] = 0$ para $n \leq -1$, así que tenemos una condición inicial $y[-1] = 0$. Partiendo de esta condición inicial, podemos resolver para valores sucesivos de $y[n]$ para $n \geq 0$ como sigue:

$$y[0] = x[0] + \frac{1}{2}y[-1] = K, \tag{2.121}$$

$$y[1] = x[1] + \frac{1}{2}y[0] = \frac{1}{2}K, \tag{2.122}$$

$$y[2] = x[2] + \frac{1}{2}y[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 K, \tag{2.123}$$

$$\vdots$$

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n K. \tag{2.124}$$

Ya que el sistema especificado por la ecuación (2.118) y la condición de reposo inicial es LTI, su comportamiento entrada-salida se caracteriza por completo por su respuesta al impulso. Haciendo $K = 1$, vemos que la respuesta al impulso para el sistema considerado en este ejemplo es

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]. \tag{2.125}$$

Observe que el sistema LTI causal en el ejemplo 2.15 tiene una respuesta al impulso de duración infinita. De hecho, si $N \geq 1$ en la ecuación (2.113), de manera que la ecuación de diferencias sea recursiva, por lo general se da el caso de que el sistema LTI correspondiente a esta ecuación, junto con la condición de reposo inicial, tendrán una respuesta al impulso de duración infinita. Estos sistemas se conocen como *sistemas de respuesta infinita al impulso (IIR)*.

Como hemos indicado antes, en su mayor parte usaremos ecuaciones recursivas de diferencias en el contexto de describir y analizar los sistemas que son lineales, invariantes ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes y para analizar las propiedades de los sistemas que éstas describen.

2.4.3 Representación en diagrama de bloque de sistemas de primer orden descritos mediante ecuaciones diferenciales y de diferencias

Una importante propiedad de los sistemas descritos por ecuaciones de diferencias y diferenciales lineales con coeficientes constantes es que se pueden representar en formas muy sencillas y naturales en términos de interconexiones en diagrama de bloque de operaciones elementales. Esto es significativo por varias razones. Una es que proporciona una representación gráfica que nos facilita el comprender el comportamiento y las propiedades de estos sistemas. Además, dicha representación es de considerable valor para la simulación o instrumentación de los sistemas. Por ejemplo, la representación en diagrama de bloque que será mostrada en esta sección para sistemas continuos, es la base de las simulaciones en las primitivas computadoras analógicas de los sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales, y también se puede transferir directamente a un programa para la simulación de esos sistemas en una computadora digital. Por añadidura, la representación correspondiente para las ecuaciones de diferencias discretas plantea formas sencillas y eficientes en las cuales los sistemas descritos por estas ecuaciones se pueden construir con circuitos digitales. En esta sección, ilustramos las ideas básicas detrás de estas representaciones en diagrama de bloque mediante su construcción para los sistemas causales de primer orden presentados en los ejemplos 1.8-1.11. En los problemas 2.57-2.60 y en los capítulos 9 y 10, consideramos los diagramas de bloques para sistemas descritos mediante otras ecuaciones diferenciales y en diferencias más complejas.

Empezaremos con un caso discreto y, en particular, con el sistema causal descrito por la ecuación de diferencias de primer orden

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]. \tag{2.126}$$

Para desarrollar una representación en diagrama de bloque de este sistema, observe que la evaluación de la ecuación (2.126) requiere de tres operaciones básicas: suma, multiplicación por un coeficiente y retardo (para capturar la relación entre $y[n]$ y $y[n-1]$). Por tanto, definamos tres elementos de red básicos, como se indica en la figura 2.27. Para ver cómo estos tres elementos básicos se pueden usar para representar el sistema causal descrito por la ecuación (2.126), rescribimos esta ecuación en la forma directa planteada por un algoritmo recursivo para calcular los valores sucesivos de la salida $y[n]$:

$$y[n] = -ay[n-1] + bx[n]. \tag{2.127}$$

Este algoritmo se representa gráficamente en la figura 2.28, la cual es un ejemplo de un sistema retroalimentado, ya que la salida se retroalimenta de regreso a través de un retardo y la multiplicación por un coeficiente y entonces se suma a $bx[n]$. La presencia de la retroalimentación es una consecuencia directa de la naturaleza recursiva de la ecuación (2.127).

El diagrama de bloque de la figura 2.28 pone en claro el requerimiento de memoria en el sistema y la consecuente necesidad de las condiciones iniciales. En particular, un retardo corresponde a un elemento de memoria que debe mantener el valor previo de su entrada. De este modo, el valor inicial de dicho elemento de memoria sirve como una condición inicial necesaria para el cálculo recursivo especificado gráficamente en la figura 2.28 y matemáticamente en la ecuación (2.127). Por supuesto, si el sistema descrito por

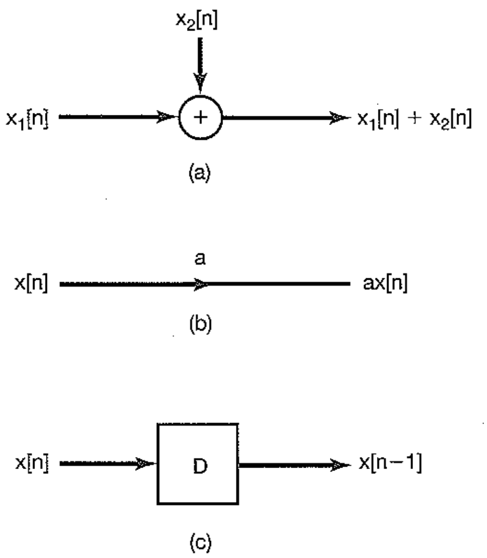


Figura 2.27 Elementos básicos para la representación en diagrama de bloque del sistema causal descrito por la ecuación (2.126): (a) un sumador; (b) multiplicación por un coeficiente; (c) un retardo unitario.

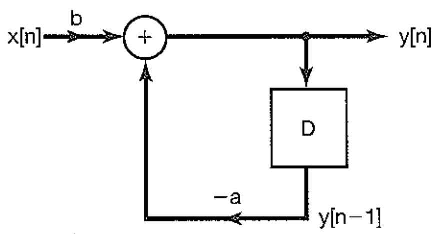


Figura 2.28 Representación en diagrama de bloque del sistema discreto causal descrito por la ecuación (2.126).

Considere ahora el sistema causal continuo descrito mediante una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t). \tag{2.128}$$

Como un primer intento por definir una representación en diagrama de bloque para este sistema, rescribamos la ecuación como

$$y(t) = \frac{1}{a}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{b}{a}x(t). \tag{2.129}$$

El miembro derecho de esta ecuación involucra tres operaciones básicas: suma, multiplicación por un coeficiente y diferenciación. Por tanto, si definimos los tres elementos de red básicos indicados en la figura 2.29, podemos considerar el representar la ecuación (2.129) como una interconexión de estos elementos básicos de una forma análoga a la usada en los sistemas discretos descritos previamente, lo cual da como resultado el diagrama de bloque de la figura 2.30.

Si bien esta figura es una representación válida del sistema causal descrito por la ecuación (2.128), no es la representación que se usa con más frecuencia o la repre-

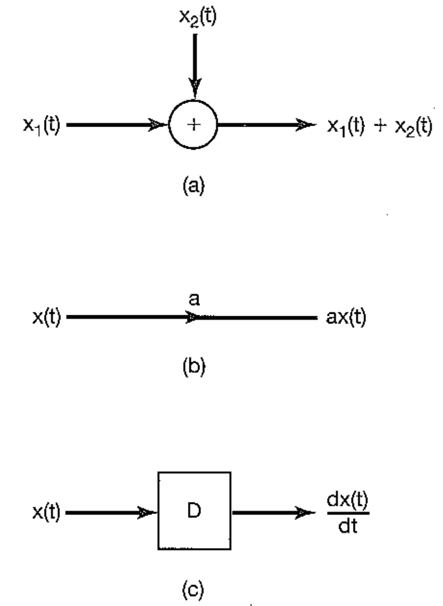


Figura 2.29 Un conjunto posible de elementos básicos para la representación en diagrama de bloque del sistema descrito por la ecuación (2.128): (a) un sumador; (b) multiplicación por un coeficiente; (c) un diferenciador.

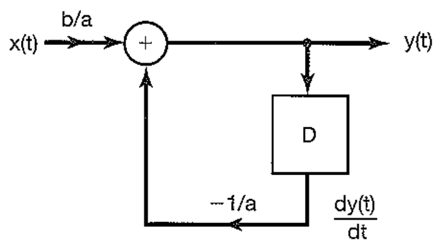


Figura 2.30 Representación en diagrama de bloque del sistema descrito por las ecuaciones (2.128) y (2.129) usando sumadores, multiplicación por coeficientes y diferenciadores.

do primero la ecuación (2.128) como

$$\frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - ay(t) \tag{2.130}$$

e integrando entonces desde $-\infty$ hasta t. Específicamente, si suponemos que el sistema descrito por la ecuación (2.130) está inicialmente en reposo, entonces la integral de $dy(t)/dt$ desde $-\infty$ hasta t es precisamente $y(t)$ (debido a que el valor de $y(-\infty)$ es cero). En consecuencia, obtenemos la ecuación

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} [bx(\tau) - ay(\tau)]\, d\tau. \tag{2.131}$$

En esta forma, nuestro sistema se puede poner en práctica usando el sumador y el multiplicador de coeficiente indicados en la figura 2.29, junto con un *integrador*, como el que

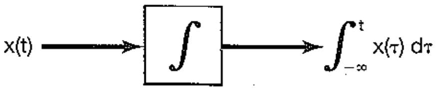


Figura 2.31 Representación gráfica de un integrador.

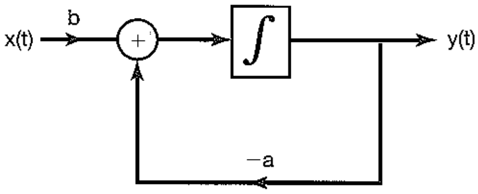


Figura 2.32 Representación en diagrama de bloque del sistema descrito por las ecuaciones (2.128) y (2.131) usando sumadores, multiplicación por coeficientes e integradores.

Ya que los integradores se pueden construir fácilmente usando amplificadores operacionales, representaciones como las de la figura 2.32 conducen de manera directa a las construcciones analógicas, y en realidad ésta es la base de las primitivas computadoras analógicas y los modernos sistemas de computación analógica. Observe que en el caso continuo, el integrador es el que representa el elemento almacenador de memoria del sistema. Esto se observa más fácilmente si consideramos integrar la ecuación (2.130) desde un punto finito en el tiempo t_0, lo que da como resultado la expresión

$$y(t) = y\,(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left[bx(\tau) - ay(\tau)\right] d\tau. \tag{2.132}$$

Esta ecuación pone en claro el hecho de que la especificación de $y(t)$ requiere de una condición inicial, o sea, el valor de $y(t_0)$. Es precisamente este valor el que almacena el integrador en el tiempo t_0.

Si bien hemos ilustrado la construcción de diagramas de bloque solamente para las más sencillas ecuaciones diferenciales y de diferencias de primer orden, dichos diagramas también se pueden desarrollar para sistemas de mayor orden, lo cual proporciona al mismo tiempo un valioso conocimiento y las posibles puestas en práctica de estos sistemas. En los problemas 2.58 y 2.60 se pueden encontrar algunos ejemplos de diagramas de bloques para sistemas de mayor orden.

2.5 FUNCIONES SINGULARES

En esta sección damos otro vistazo a la función impulso unitario continua para obtener mayores conocimientos acerca de esta importante señal idealizada y para introducir un conjunto de señales relacionadas conocidas colectivamente como *funciones singulares*. De manera particular, en la sección 1.4.2 indicamos que un impulso unitario continuo se puede ver como la idealización de un pulso que sea "lo suficientemente corto" como para que su forma y duración no tengan consecuencias prácticas (es decir, de modo que, en lo que a la respuesta de cualquier sistema LTI particular concierne, toda el área bajo el pulso pueda considerarse como aplicada de manera instantánea). En esta sección nos gustaría proporcionar primero un ejemplo concreto de lo que esto significa, y sólo entonces usar la interpretación incluida en el ejemplo para mostrar que la clave para el uso de los impulsos unitarios y otras funciones singulares está en la especificación de cómo los sistemas LTI responden a esas señales idealizadas; en otras palabras, las señales se definen

2.5.1 El impulso unitario como un pulso corto idealizado

A partir de la propiedad de selección, ecuación (2.27), el impulso unitario $\delta(t)$ es la respuesta al impulso del sistema identidad. Esto es,

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \tag{2.133}$$

para cualquier señal $x(t)$. Por tanto, si tomamos $x(t) = \delta(t)$, tenemos

$$\delta(t) = \delta(t) * \delta(t). \tag{2.134}$$

La ecuación (2.134) es una propiedad básica del impulso unitario y también tiene una implicación significativa sobre nuestra interpretación del impulso unitario como un pulso idealizado. Por ejemplo, al igual que en la sección 1.4.2, suponga que concebimos a $\delta(t)$ como la forma límite de un pulso rectangular. En concreto, consideremos que $\delta_\Delta(t)$ corresponde al pulso rectangular definido en la figura 1.34 y que

$$r_\Delta(t) = \delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t). \tag{2.135}$$

Entonces $r_\Delta(t)$ sería como está dibujada en la figura 2.33. Si deseamos interpretar a $\delta(t)$ como el límite cuando $\Delta \to 0$ de $\delta_\Delta(t)$, entonces, en virtud de la ecuación (2.134), el límite de $r_\Delta(t)$ cuando $\Delta \to 0$ también debe ser un impulso unitario. De manera similar, podemos argumentar que los límites de $r_\Delta(t) * r_\Delta(t)$ o de $r_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)$ cuando $\Delta \to 0$ deben ser impulsos unitarios, y así se puede continuar. De este modo, vemos que para ser consistentes, si definimos el impulso unitario como la forma límite de alguna señal, entonces, de hecho, hay un número ilimitado de señales de apariencia muy diferente, todas las cuales se comportan como un impulso en el límite.

Las palabras clave en el párrafo precedente son: "se comportan como un impulso", con las cuales, como hemos indicado, lo que queremos decir es que la respuesta de un sistema LTI a cualquiera de estas señales es en esencia idéntica, en tanto el pulso sea "lo bastante corto", es decir, Δ es "lo suficientemente pequeña". El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

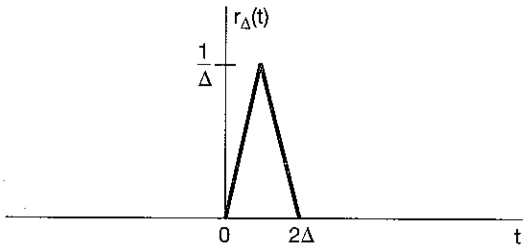


Figura 2.33 La señal $r_\Delta(t)$ definida en la ecuación (2.135).

Ejemplo 2.16

Considere el sistema LTI descrito mediante la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t), \tag{2.136}$$

junto con la condición de reposo inicial. La figura 2.34 representa la respuesta de este sistema a $\delta_\Delta(t)$, $r_\Delta(t)$, $r_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)$ y $r_\Delta(t) * r_\Delta(t)$ para varios valores de Δ. Para valores de Δ lo suficientemente grandes, las respuestas a estas señales de entrada difieren de manera notable. Sin embargo, cuando Δ es lo suficientemente pequeña, las respuestas son en esencia las mismas, de manera que todas las señales de entrada de "comportan" de la misma forma. Además, como se indica en la figura, la forma límite de estas respuestas es precisamente $e^{-2t}u(t)$. Puesto que el límite de cada una de estas señales conforme $\Delta \to 0$

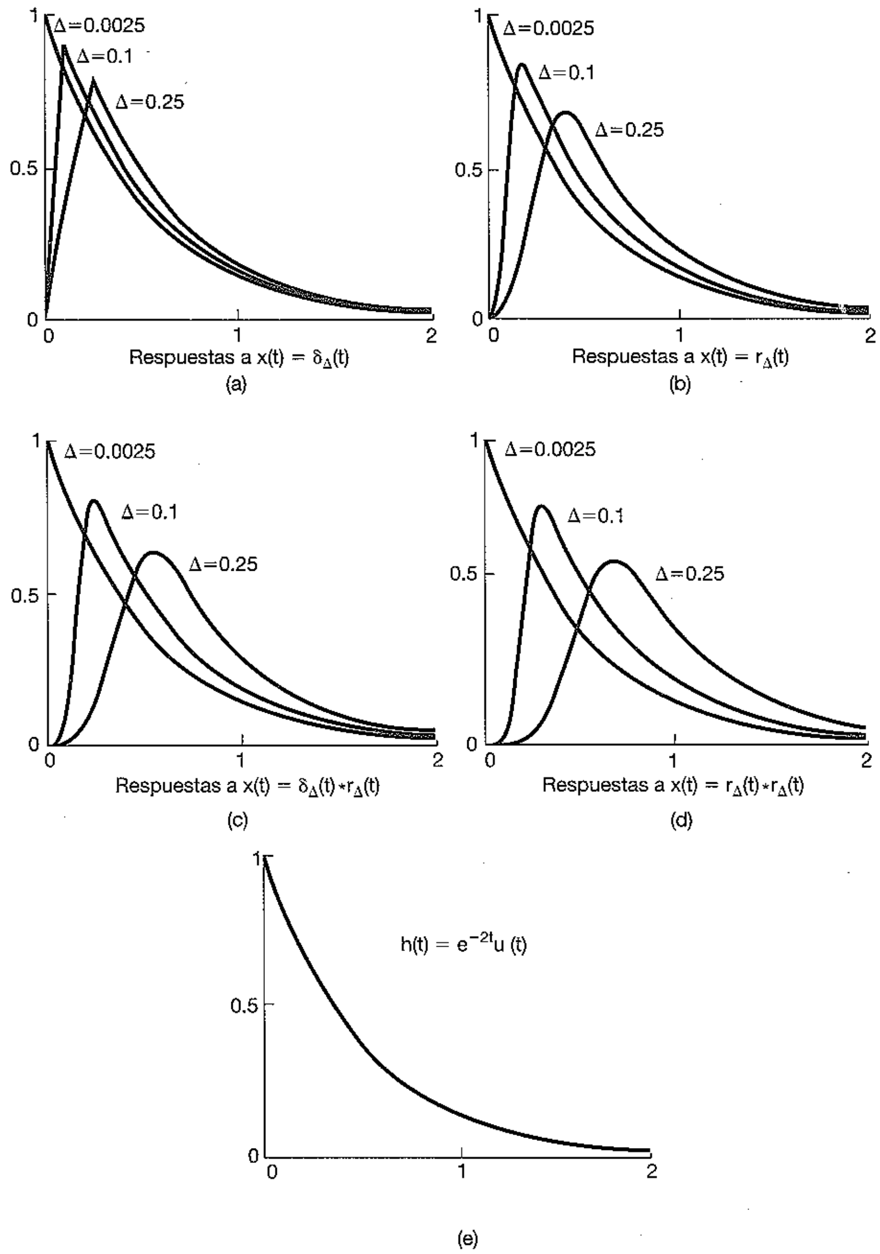


Figura 2.34 Interpretación de un impulso unitario como la idealización de un pulso cuya duración es "lo suficientemente corta" que, en lo que concierne a la respuesta de un sistema LTI a este pulso, éste se puede concebir como que ha sido aplicado instantáneamente: (a) respuestas del sistema LTI causal descrito por la ecuación (2.136) a la entrada $\delta_\Delta(t)$ para $\Delta = 0.25$, 0.1 y 0.0025; (b) respuestas del mismo sistema a $r_\Delta(t)$ para los mismos valores de Δ; (c) respuestas a $\delta_\Delta(t) * r_\Delta(t)$; (d) respuestas a $r_\Delta(t) * r_\Delta(t)$; (e) respuesta al impulso $h(t) = e^{-2t}u(t)$ para el sistema. Observe que, para $\Delta = 0.25$, hay

Un punto importante que hay que enfatizar es que, lo que entendemos por un "Δ lo suficientemente pequeño", depende del sistema LTI en particular al cual sean aplicados los pulsos anteriores. Por ejemplo, en la figura 2.35 hemos ilustrado las respuestas a estos pulsos para diferentes valores de Δ para el sistema causal LTI descrito mediante la

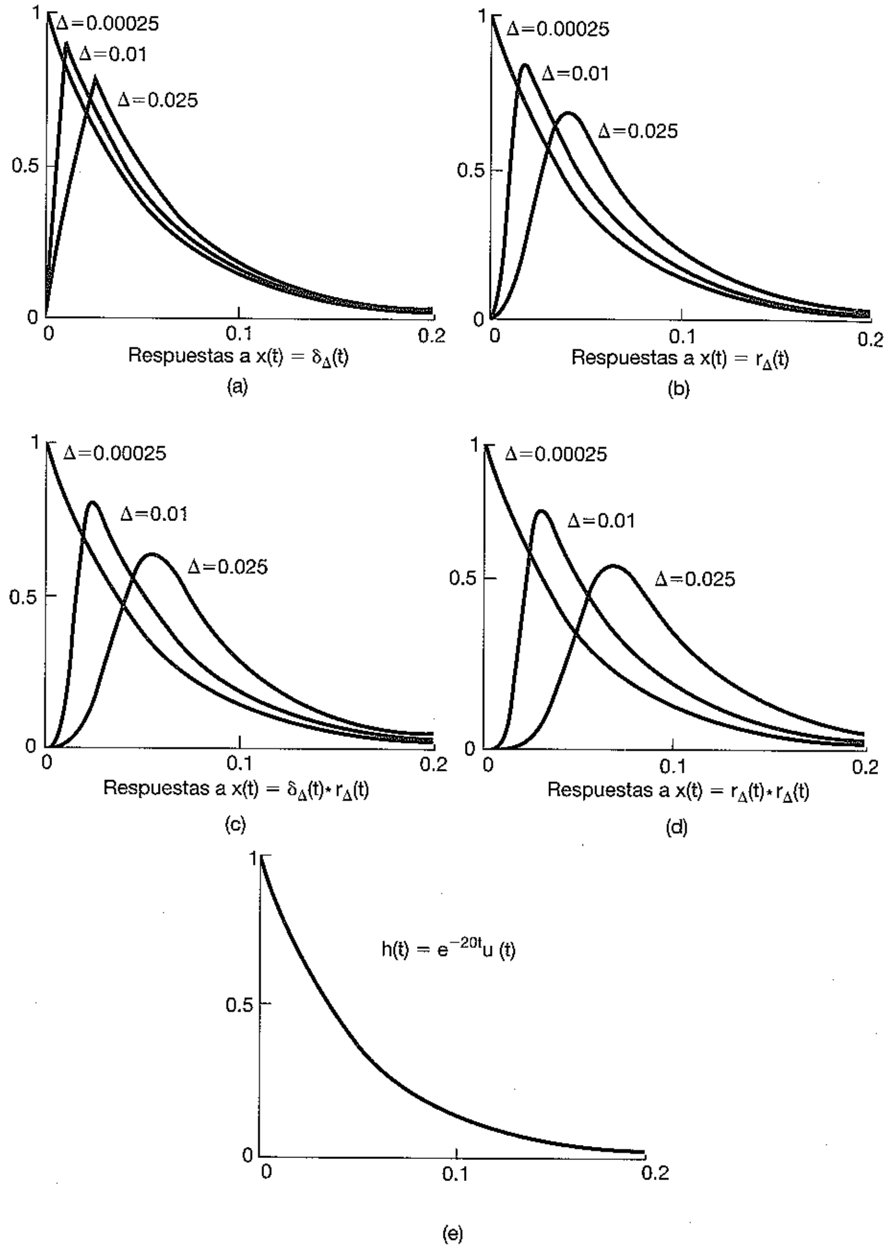


Figura 2.35 El encontrar un valor de Δ que sea "lo suficientemente pequeño" depende del sistema al cual se aplicarán las entradas: (a) respuestas del sistema LTI causal descrito por la ecuación (2.137) a la entrada $\delta_\Delta(t)$ para $\Delta = 0.025$, 0.01 y 0.00025; (b) respuestas a $r_\Delta(t)$; (c) respuestas a $\delta_\Delta(t) * r_\Delta(t)$; (d) respuestas a $r_\Delta(t) * r_\Delta(t)$;

ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy(t)}{dt} + 20y(t) = x(t). \tag{2.137}$$

Como podemos ver en la figura, en este caso necesitamos un valor más pequeño de Δ para que las respuestas sean indistinguibles unas de otras y a partir de las respuestas al impulso $h(t) = e^{-20t}u(t)$ para el sistema. Así, mientras que lo que entendemos por "Δ lo suficientemente pequeño" es diferente para los dos sistemas, podemos encontrar valores de Δ suficientemente pequeños para ambos. El impulso unitario es por tanto la idealización de un pulso corto cuya duración es suficientemente corta para *todos* los sistemas.

2.5.2 Definición del impulso unitario mediante la convolución

Como se muestra en los ejemplos anteriores, para una Δ lo bastante pequeña, las señales $\delta_\Delta(t), r_\Delta(t), r_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)$ y $r_\Delta(t) * r_\Delta(t)$ actúan como impulsos cuando se aplican a un sistema LTI. De hecho, hay muchas otras señales para las cuales esto también es válido. Todo lo cual indica que debemos pensar en un impulso unitario en términos de cómo responde un sistema LTI a él. Mientras que por lo general una función o señal se define por lo que es en cada valor de la variable independiente, la importancia primordial del impulso unitario no consiste en lo que éste *es* en cada valor de t, sino lo que *hace* ante la convolución. Por tanto, desde el punto de vista del análisis de sistemas lineales, podemos *definir* de manera alternativa el impulso unitario como aquella señal que, cuando es aplicada a un sistema LTI, produce la respuesta al impulso. Esto es, definimos $\delta(t)$ como la señal para la cual

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \tag{2.138}$$

para cualquier $x(t)$. En este sentido, señales como $\delta_\Delta(t), r_\Delta(t)$, etc., las cuales corresponden a pulsos cortos con duración extremadamente pequeña conforme $\Delta \to 0$, en su totalidad se comportan como un impulso unitario en el límite, ya que si reemplazamos $\delta(t)$ por cualquiera de estas señales, entonces la ecuación (2.138) se satisface en el límite.

Todas las propiedades del impulso unitario que necesitamos se pueden obtener de la *definición operacional* proporcionada por la ecuación (2.138). Por ejemplo, si hacemos $x(t) = 1$ para toda t, entonces

$$\begin{aligned} 1 = x(t) = x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

de manera que el impulso unitario tiene área unitaria.

Algunas veces resulta útil usar otra definición operacional por completo equivalente para $\delta(t)$. Para obtener esta forma alternativa, considere tomar una señal arbitraria $g(t)$, invertirla en el tiempo para obtener $g(-t)$ y entonces convolucionarla con $\delta(t)$. Usando la ecuación (2.138) obtenemos

$$g(-t) = g(-t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau - t)\delta(\tau)d\tau,$$

la cual, para $t = 0$, da

Por tanto, la definición operacional de $\delta(t)$ dada por la ecuación (2.138) implica la ecuación (2.139). Por otro lado, la ecuación (2.139) implica la (2.138). Para ver esto, sea $x(t)$ una señal dada, fíjese en un tiempo t y defínase

$$g(\tau) = x(t - \tau).$$

Entonces, usando la ecuación (2.139), tenemos

$$x(t) = g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)\delta(\tau)d\tau,$$

la cual es precisamente la ecuación (2.138). Por tanto, la ecuación (2.139) es una definición operacional equivalente del impulso unitario. Esto es, el impulso unitario es la señal que, cuando se multiplica por una señal $g(t)$ y se integra después desde $-\infty$ hasta $+\infty$, produce el valor $g(0)$.

Puesto que nos ocuparemos principalmente de los sistemas LTI y, por tanto, de la convolución, la caracterización de $\delta(t)$ dada en la ecuación (2.138) será a la que nos referiremos con mayor frecuencia. Sin embargo, la ecuación (2.139) es útil para determinar algunas de las otras propiedades del impulso unitario. Por ejemplo, considere la señal $f(t)\delta(t)$, donde $f(t)$ es otra señal. Entonces, de la ecuación (2.139)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(\tau)\delta(\tau)d\tau = g(0)f(0). \tag{2.140}$$

Por otro lado, si consideramos la señal $f(0)\delta(t)$, vemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(0)\delta(\tau)d\tau = g(0)f(0). \tag{2.141}$$

Al comparar las ecuaciones (2.140) y (2.141), encontramos que las dos señales, $f(t)\delta(t)$ y $f(0)\delta(t)$, actúan en forma idéntica cuando se multiplican por cualquier señal $g(t)$ y después se integran desde $-\infty$ hasta $+\infty$. En consecuencia, al usar esta definición operacional de señales, concluimos que

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t), \tag{2.142}$$

la cual es la propiedad que deducimos mediante una forma alternativa en la sección 1.4.2. [Véase la ecuación (1.76).]

2.5.3 Dobletes unitarios y otras funciones singulares

El impulso unitario es uno de los tipos de señales conocidas como *funciones singulares*, cada una de las cuales se puede definir operacionalmente en términos de su comportamiento ante la convolución. Considere el sistema LTI para el cual la salida es la derivada de la entrada, es decir,

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \tag{2.143}$$

La respuesta al impulso unitario de este sistema es la derivada del impulso unitario, la cual se llama *doblete unitario*, $u_1(t)$. De la representación de la convolución para los sis-

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) * u_1(t) \tag{2.144}$$

para cualquier señal $x(t)$. Así como la ecuación (2.138) funciona como la definición operacional de $\delta(t)$, tomaremos la ecuación (2.144) como la definición operacional de $u_1(t)$. De manera similar, podemos definir $u_2(t)$, la segunda derivada de $\delta(t)$, como la respuesta al impulso de un sistema LTI que calcula la segunda derivada de la entrada, es decir,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = x(t) * u_2(t). \tag{2.145}$$

De la ecuación (2.144) vemos que

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = x(t) * u_1(t) * u_1(t), \tag{2.146}$$

y, por tanto,

$$u_2(t) = u_1(t) * u_1(t). \tag{2.147}$$

En general, $u_k(t)$, para $k > 0$, es la $k$ésima derivada de $\delta(t)$ y por consiguiente es la respuesta al impulso de un sistema que calcula la $k$ésima derivada de la entrada. Ya que este sistema se puede representar como una cascada de k diferenciadores, tenemos que

$$u_k(t) = \underbrace{u_1(t) * \cdots * u_1(t)}_{k \text{ veces}}. \tag{2.148}$$

Al igual que el impulso unitario, cada una de estas funciones singulares tiene propiedades que se pueden deducir de su definición operacional. Por ejemplo, si consideramos la señal constante $x(t) = 1$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dx(t)}{dt} = x(t) * u_1(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

de manera que el área del doblete unitario es cero. Más aún, si hacemos la convolución de la señal $g(-t)$ con $u_1(t)$, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau - t)u_1(\tau)d\tau = g(-t) * u_1(t) = \frac{dg(-t)}{dt} = -g'(-t),$$

la cual, para $t = 0$ da

De manera análoga, podemos deducir propiedades relacionadas de $u(t)$ y de funciones singulares de orden superior, algunas de las cuales son consideradas en el problema 2.69.

Al igual que con el impulso unitario, cada una de estas funciones singulares puede estar relacionada de manera informal con pulsos cortos. Por ejemplo, ya que el doblete unitario es, de manera formal, la derivada del impulso unitario, podemos concebir al doblete como la idealización de la derivada de un pulso corto con área unitaria. Como muestra, considere el pulso corto $\delta_\Delta(t)$ en la figura 1.34. Este pulso se comporta como un impulso cuando $\Delta \to 0$. En consecuencia, esperaríamos que su derivada actuara como un doblete a medida que $\Delta \to 0$. Como se verifica en el problema 2.72, $d\delta_\Delta(t)/dt$ es como está representada en la figura 2.36: consiste en un impulso unitario en $t = 0$ con un área $+1/\Delta$, seguida por un impulso unitario de área $-1/\Delta$ en $t = \Delta$, es decir,

$$\frac{d\delta_\Delta(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta}[\delta(t) - \delta(t - \Delta)]. \tag{2.150}$$

En consecuencia, usando el hecho de que $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$ [véase la ecuación (2.70)], encontramos que

$$x(t) * \frac{d\delta_\Delta(t)}{dt} = \frac{x(t) - x(t - \Delta)}{\Delta} \cong \frac{dx(t)}{dt}, \tag{2.151}$$

donde la aproximación se vuelve incrementalmente exacta conforme $\Delta \to 0$. Al comparar la ecuación (2.151) con la ecuación (2.144), vemos que $d\delta_\Delta(t)/dt$ en verdad se comporta como un doblete unitario conforme $\Delta \to 0$.

Además de las funciones singulares que son derivadas de diferente orden del impulso unitario, también podemos definir señales que representan integrales sucesivas de la función impulso unitario. Como vimos en el ejemplo 2.13, el escalón unitario es la respuesta al impulso de un integrador:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau.$$

Por tanto,

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau, \tag{2.152}$$

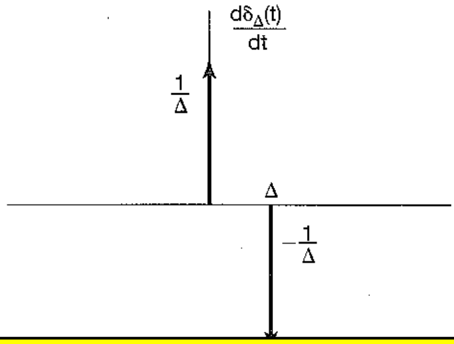


Figura 2.36 La derivada de $d\delta_\Delta(t)/dt$ del pulso rectangular

y también tenemos la siguiente definición operacional de $u(t)$:

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau. \tag{2.153}$$

De manera similar, podemos definir el sistema que consiste en una cascada de dos integradores. Su respuesta al impulso se denota con $u_{-2}(t)$, la cual es simplemente la convolución de $u(t)$, la respuesta al impulso de un integrador, con ella misma:

$$u_{-2}(t) = u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau. \tag{2.154}$$

Puesto que $u(t)$ es igual a cero para $t < 0$ y es igual a 1 para $t > 0$, vemos que

$$u_{-2}(t) = tu(t). \tag{2.155}$$

Esta señal, la cual se conoce como la *función rampa unitaria*, se muestra en la figura 2.37. Asimismo, a partir de las ecuaciones (2.153) y (2.154) podemos obtener una definición operacional para el comportamiento de $u_{-2}(t)$ bajo convolución:

$$\begin{aligned} x(t) * u_{-2}(t) &= x(t) * u(t) * u(t) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{t} x(\sigma)d\sigma\right) * u(t) \\ &= \int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau} x(\sigma)d\sigma\right) d\tau. \end{aligned} \tag{2.156}$$

De manera análoga, podemos definir integrales de orden superior de $\delta(t)$ como las respuestas al impulso de integradores en cascada:

$$u_{-k}(t) = \underbrace{u(t) * \cdots * u(t)}_{k \text{ veces}} = \int_{-\infty}^{t} u_{-(k-1)}(\tau)d\tau. \tag{2.157}$$

La convolución de $x(t)$, con $u_{-3}(t)$ $u_{-4}(t), \ldots$, genera las correspondientes integrales de $x(t)$ de orden mayor. Observe también que las integrales en la ecuación (2.157) se pueden evaluar de forma directa (véase el problema 2.73), como se hizo en la ecuación (2.155),

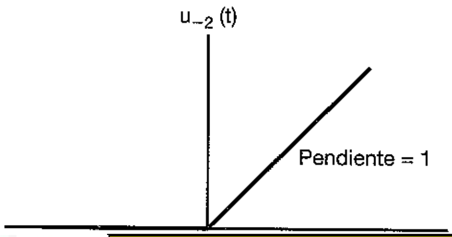


Figura 2.37 Función rampa

para obtener

$$u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}u(t). \tag{2.158}$$

Por tanto, a diferencia de las derivadas de $\delta(t)$, las integrales sucesivas del impulso unitario son funciones que se pueden definir para cada valor de t [ecuación (2.158)], así como por su comportamiento ante la convolución.

A veces será útil emplear una notación alternativa para $\delta(t)$ y $u(t)$, a saber,

$$\delta(t) = u_0(t), \tag{2.159}$$

$$u(t) = u_{-1}(t). \tag{2.160}$$

Con esta notación, $u_k(t)$ para $k > 0$ denota la respuesta al impulso de una cascada de k diferenciadores, $u_0(t)$ es la respuesta al impulso del sistema identidad, y para $k < 0$, $u_k(t)$ es la respuesta al impulso de una cascada de $|k|$ integradores. Más aún, ya que un diferenciador es el sistema inverso de un integrador,

$$u(t) * u_1(t) = \delta(t),$$

o, empleando nuestra notación alternativa,

$$u_{-1}(t) * u_1(t) = u_0(t). \tag{2.161}$$

De manera más general, de las ecuaciones (2.148), (2.157) y (2.161) vemos que para cualquier entero k y r,

$$u_k(t) * u_r(t) = u_{k+r}(t). \tag{2.162}$$

Si k y r son ambos positivos, la ecuación (2.162) establece que una cascada de k diferenciadores, seguida por r diferenciadores adicionales, conduce a una salida que es la derivada de orden $(k + r)$ de la entrada. Igualmente, si k y r son negativos, tenemos una cascada de $|k|$ integradores seguida por otros $|r|$ integradores. Asimismo, si k es negativo y r es positivo tenemos una cascada de k integradores seguida por r diferenciadores, y el sistema completo es equivalente a una cascada de $|k + r|$ integradores si $k + r < 0$, a una cascada de $k + r$ diferenciadores si $k + r > 0$, o al sistema identidad si $k + r = 0$. Por tanto, al definir las funciones singulares en términos de su comportamiento bajo la convolución, obtenemos una caracterización que nos permite manipularlas con relativa facilidad e interpretarlas directamente en términos de su importancia para los sistemas LTI. Ya que, en el libro, éste es nuestro principal interés, la definición operacional de las funciones singulares que hemos dado en esta sección será suficiente para nuestros propósitos.[6]

[6]Como se mencionó en el capítulo 1, las funciones singulares han sido ampliamente estudiadas en el campo de las matemáticas bajo los nombres alternativos de *funciones generalizadas* y *teoría de la distribución*. El enfoque que hemos adoptado en esta sección está, en realidad, muy cerca en espíritu al enfoque riguroso

2.6 RESUMEN

En este capítulo hemos desarrollado representaciones muy importantes para los sistemas LTI, tanto discretos como continuos. En el caso discreto obtuvimos una representación de las señales como sumas ponderadas de impulsos unitarios desplazados, y después la usamos para deducir la representación de la suma de convolución para la respuesta de un sistema LTI discreto. En el caso continuo obtuvimos una representación análoga para señales continuas como integrales ponderadas de impulsos unitarios desplazados, y utilizamos esta información para deducir la representación de la integral de convolución para sistemas LTI continuos. Estas representaciones son en extremo importantes, puesto que nos permiten calcular la respuesta de un sistema LTI a una entrada arbitraria en términos de la respuesta del sistema a un impulso unitario. Más aún, en la sección 2.3 la suma y la integral de convolución nos proporcionaron los medios para analizar las propiedades de los sistemas LTI y, en particular, para relacionar las propiedades de los sistemas LTI, incluyendo la causalidad y la estabilidad, con las propiedades correspondientes de la respuesta al impulso unitario. Además, en la sección 2.5 desarrollamos una interpretación del impulso unitario continuo, y otras funciones singulares relacionadas, en términos de su comportamiento bajo la convolución. Esta interpretación es particularmente útil en el análisis de sistemas LTI.

Una clase importante de sistemas continuos son los descritos por ecuaciones diferenciales lineales con coeficiente constante. De manera semejante, en el caso discreto, las ecuaciones de diferencias lineales con coeficiente constante, juegan un papel igualmente importante. En la sección 2.4 revisamos ejemplos sencillos de ecuaciones diferenciales y en diferencias y analizamos algunas de las propiedades de sistemas descritos por este tipo de ecuaciones. En particular, serán LTI y causales los sistemas descritos por medio de ecuaciones diferenciales y de diferencias lineales con coeficiente constante junto con la condición de reposo inicial. En los siguientes capítulos desarrollaremos herramientas adicionales que faciliten ampliamente nuestra habilidad para analizar estos sistemas.

Capítulo 2 Problemas

La primera sección de problemas corresponde a la categoría básica, y las respuestas se proporcionan al final del libro. Las tres secciones restantes contienen problemas correspondientes a las categorías básica, avanzada y de extensión, respectivamente.

Los **problemas de extensión** introducen aplicaciones, conceptos o métodos más allá de los presentados en el texto.

PROBLEMAS BÁSICOS CON RESPUESTAS

2.1. Sea

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3] \quad \text{y} \quad h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1].$$

Calcule y haga la gráfica de cada una de las siguientes convoluciones:

(a) $y_1[n] = x[n] * h[n]$ **(b)** $y_2[n] = x[n+2] * h[n]$

2.2. Considere la señal

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\{u[n+3] - u[n-10]\}.$$

Expresе A y B en términos de n de manera que se cumplan las siguientes ecuaciones:

$$h[n-k] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^{n-k-1}, & A \leq k \leq B \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

2.3. Considere una entrada $x[n]$ y una respuesta al impulso unitario $h[n]$ dada por

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2],$$

$$h[n] = u[n+2].$$

Determine y dibuje la salida $y[n] = x[n] * h[n]$.

2.4. Calcule y dibuje $y[n] = x[n] * h[n]$, donde

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 3 \leq n \leq 8 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases},$$

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 4 \leq n \leq 15 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}.$$

2.5. Sea

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases} \quad \text{y} \quad h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases},$$

donde $N \leq 9$ es un entero. Determine el valor de N, dado que $y[n] = x[n] * h[n]$ y

$$y[4] = 5, \quad y[14] = 0.$$

2.6. Calcule y dibuje la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$, donde

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[-n-1] \quad \text{y} \quad h[n] = u[n-1].$$

2.7. Un sistema lineal S tiene la relación

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k]$$

entre la entrada $x[n]$ y su salida $y[n]$, donde $g[n] = u[n] - u[n-4]$.

(a) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = \delta[n-1]$.
(b) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = \delta[n-2]$.
(c) ¿S es LTI?
(d) Determine $y[n]$ cuando $x[n] = u[n]$.

2.8. Determine y bosqueje la convolución de las siguientes dos señales:

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases},$$

$$h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1).$$

2.9. Sea

$$h(t) = e^{2t}u(-t+4) + e^{-2t}u(t-5).$$

Determine A y B tales que

$$h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-2(t-\tau)}, & \tau < A \\ 0, & A < \tau < B. \\ e^{2(t-\tau)}, & B < \tau \end{cases}$$

2.10. Suponga que

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

y $h(t) = x(t/\alpha)$, donde $0 < \alpha \leq 1$.
(a) Determine y bosqueje $y(t) = x(t) * h(t)$.
(b) Si $d\,y(t)/dt$ contiene sólo tres discontinuidades, ¿cuál es el valor de α?

2.11. Sea

$$x(t) = u(t-3) - u(t-5) \quad \text{y} \quad h(t) = e^{-3t}u(t).$$

(a) Calcule $y(t) = x(t) * h(t)$.
(b) Calcule $g(t) = (dx(t)/dt) * h(t)$.
(c) ¿Cómo está relacionada $g(t)$ con $y(t)$?

2.12. Sea

$$y(t) = e^{-t}u(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-3k).$$

Demuestre que $y(t) = Ae^{-t}$ para $0 \leq t < 3$, y determine el valor de A.

2.13. Considere un sistema discreto S_1 con respuesta al impulso

$$h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n].$$

(a) Determine el entero A tal que $h[n] - Ah[n-1] = \delta[n]$.
(b) Usando el resultado de la parte (a), determine la respuesta al impulso $g[n]$ de un sistema LTI S_2 el cual es el sistema inverso de S_1.

2.14. ¿Cuál de las siguientes respuestas al impulso corresponden a sistemas estables LTI?
(a) $h_1(t) = e^{-(1-2j)t}u(t)$ **(b)** $h_2(t) = e^{-t}\cos(2t)u(t)$

2.15. ¿Cuál de las siguientes respuestas al impulso corresponden a sistemas estables LTI?
(a) $h_1[n] = n\cos(\frac{\pi}{4}n)u[n]$ **(b)** $h_2[n] = 3^n u[-n+10]$

2.16. Para cada una de las siguientes afirmaciones, determine si es verdadera o falsa:
(a) Si $x[n] = 0$ para $n < N_1$ y $h[n] = 0$ para $n < N_2$, entonces $x[n] * h[n] = 0$ para $n < N_1 + N_2$.
(b) Si $y[n] = x[n] * h[n]$, entonces $y[n-1] = x[n-1] * h[n-1]$.
(c) Si $y(t) = x(t) * h(t)$, entonces $y(-t) = x(-t) * h(-t)$.
(d) Si $x(t) = 0$ para $t > T_1$ y $h(t) = 0$ para $t > T_2$, entonces $x(t) * h(t) = 0$ para $t > T_1 + T_2$.

2.17. Considere un sistema LTI cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ estén relacionadas por la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t). \tag{P2.17-1}$$

El sistema también satisface la condición de reposo inicial.
(a) Si $x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t)$, ¿cuál es $y(t)$?
(b) Observe que $\mathcal{R}e\{x(t)\}$ satisfará la ecuación (P2.17-1) con $\mathcal{R}e\{y(t)\}$. Determine la salida $y(t)$ del sistema LTI si

$$x(t) = e^{-t}\cos(3t)u(t).$$

2.18. Considere un sistema LTI causal cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ estén relacionadas por la ecuación de diferencias

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + x[n].$$

Determine $y[n]$ si $x[n] = \delta[n-1]$.

2.19. Considere la conexión en cascada de los siguientes dos sistemas S_1 y S_2, como se muestran en la figura P2.19:

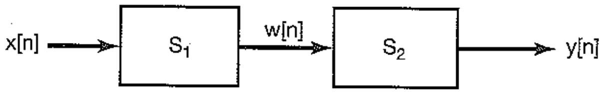


Figura P2.19

S_1 : es LTI causal,

$$w[n] = \frac{1}{2} w[n-1] + x[n];$$

S_2 : es LTI causal,

$$y[n] = \alpha y[n-1] + \beta w[n].$$

La ecuación de diferencias que relaciona $x[n]$ y $y[n]$ es:

$$y[n] = -\frac{1}{8} y[n-2] + \frac{3}{4} y[n-1] + x[n].$$

(a) Determine α y β.
(b) Obtenga la respuesta al impulso de la conexión en cascada de S_1 y S_2.

2.20. Evalúe las siguientes integrales:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} u_0(t)\cos(t)dt$

(b) $\int_0^5 \operatorname{sen}(2\pi t)\delta(t+3)dt$

(c) $\int_{-5}^{5} u_1(1-\tau)\cos(2\pi\tau)d\tau$

PROBLEMAS BÁSICOS

2.21. Calcule la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$ de los siguientes pares de señales:

(a) $\left.\begin{array}{l} x[n] = \alpha^n u[n], \\ h[n] = \beta^n u[n], \end{array}\right\} \alpha \neq \beta$

(b) $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$

(c) $x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n-4]$
$h[n] = 4^n[2-n]$

(d) $x[n]$ y $h[n]$ son como en la figura P2.21.

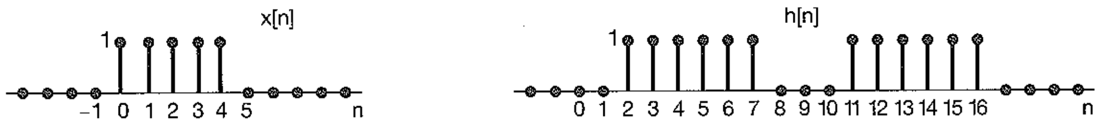


Figura P2.21

2.22. Para cada uno de los siguientes pares de formas de onda, use la integral de convolución para encontrar la respuesta $y(t)$ a la entrada $x(t)$ del sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h(t)$. Bosqueje sus resultados.

(a) $\left.\begin{array}{l} x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \\ h(t) = e^{-\beta t}u(t) \end{array}\right\}$ (Obtenga el resultado cuando $\alpha \neq \beta$ y cuando $\alpha = \beta$.)

(b) $x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$
$h(t) = e^{2t}u(1-t)$
(c) $x(t)$ y $h(t)$ son como en la figura P2.22(a).
(d) $x(t)$ y $h(t)$ son como en la figura P2.22(b).
(e) $x(t)$ y $h(t)$ son como en la figura P2.22(c).

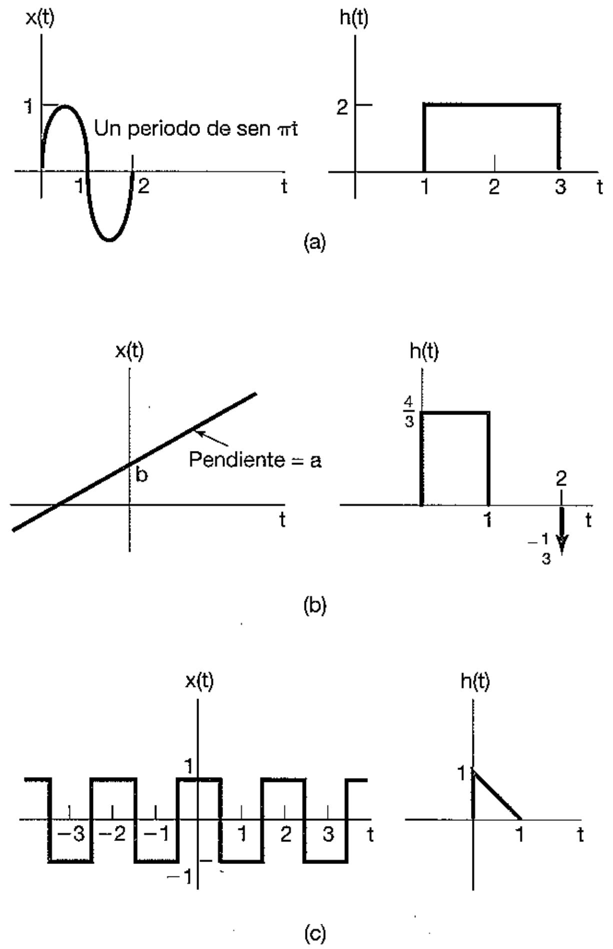


Figura P2.22

2.23. Sea $h(t)$ el pulso triangular mostrado en la figura P2.23(a) y $x(t)$ el tren de impulsos representado en la figura P2.23(b). Esto es,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT).$$

Determine y trace $y(t) = x(t) * h(t)$ para los siguientes valores de T:
(a) $T = 4$ **(b)** $T = 2$ **(c)** $T = 3/2$ **(d)** $T = 1$

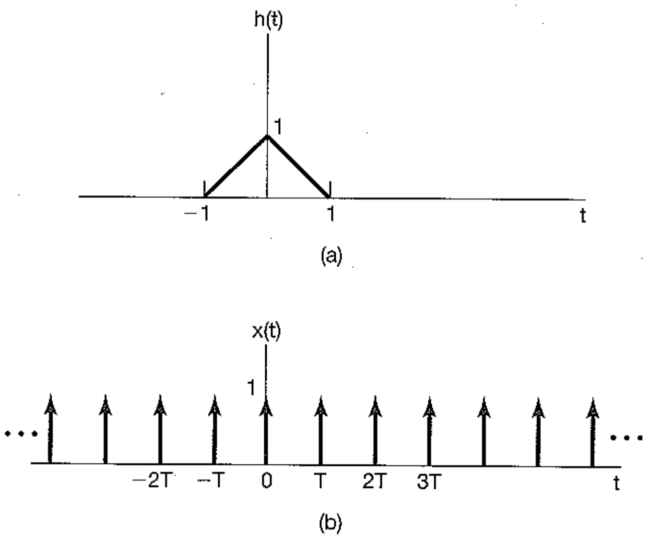


Figura P2.23

2.24. Examine la interconexión en cascada de los tres sistemas LTI causales ilustrados en la figura P2.24(a). La respuesta al impulso $h_2[n]$ es

$$h_2[n] = u[n] - u[n-2],$$

y la respuesta total al impulso es como se muestra en la figura P2.24(b).

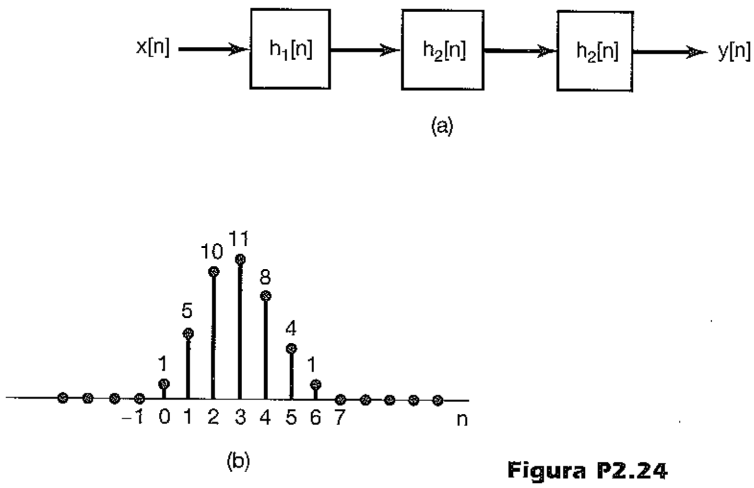


Figura P2.24

(a) Encuentre la respuesta al impulso $h_1[n]$.
(b) Encuentre la respuesta del sistema total a la entrada

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1].$$

2.25. Sea la señal

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

donde

$$x[n] = 3^n u[-n-1] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

y

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3].$$

(a) Determine $y[n]$ *sin utilizar* la propiedad distributiva de la convolución.
(b) Determine $y[n]$ *utilizando* la propiedad distributiva de la convolución.

2.26. Examine la evaluación de

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] * x_3[n],$$

donde $x_1[n] = (0.5)^n u[n]$, $x_2[n] = u[n+3]$ y $x_3[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.
(a) Evalúe la convolución $x_1[n] * x_2[n]$.
(b) Realice la convolución de la parte (a) con $x_3[n]$ para evaluar $y[n]$.
(c) Evalúe la convolución de $x_2[n] * x_3[n]$.
(d) Realice la convolución del resultado de la parte (c) con $x_1[n]$ para evaluar $y[n]$.

2.27. Definimos el área bajo una señal continua $v(t)$ como

$$A_v = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)dt.$$

Demuestre que si $y(t) = x(t) * h(t)$, entonces

$$A_y = A_x A_h.$$

2.28. A continuación mostramos las respuestas al impulso de sistemas LTI discretos. Determine si cada sistema es causal y/o estable. Justifique sus respuestas.
(a) $h[n] = (\frac{1}{5})^n u[n]$
(b) $h[n] = (0.8)^n u[n+2]$
(c) $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[-n]$
(d) $h[n] = (5)^n u[3-n]$
(e) $h[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n] + (1.01)^n u[n-1]$
(f) $h[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n] + (1.01)^n u[1-n]$
(g) $h[n] = n(\frac{1}{3})^n u[n-1]$

2.29. A continuación ofrecemos las respuestas al impulso de sistemas LTI continuos. Determine si cada sistema es causal y/o estable. Justifique sus respuestas.
(a) $h(t) = e^{-4t}u(t-2)$
(b) $h(t) = e^{-6t}u(3-t)$
(c) $h(t) = e^{-2t}u(t+50)$
(d) $h(t) = e^{2t}u(-1-t)$

(e) $h(t) = e^{-6|t|}$
(f) $h(t) = te^{-t}u(t)$
(g) $h(t) = (2e^{-t} - e^{(t-100)/100})u(t)$

2.30. Examine la ecuación de diferencias de primer orden

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n].$$

Dando por sentado la condición de reposo inicial (es decir, si $x[n] = 0$ para $n < n_0$, entonces $y[n] = 0$ para $n < n_0$), determine la respuesta al impulso de un sistema cuya entrada y salida estén relacionadas mediante esta ecuación de diferencias. Puede resolver el problema rescribiendo la ecuación de manera que $y[n]$ quede expresada en términos de $y[n-1]$ y $x[n]$ y generando los valores de $y[0]$, $y[+1]$, $y[+2], \ldots$, en ese orden.

2.31. Examine el sistema LTI inicialmente en reposo y descrito por la ecuación de diferencias

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] + 2x[n-2].$$

Determine la respuesta de este sistema a la entrada que se representa en la figura P2.31 resolviendo recursivamente la ecuación.

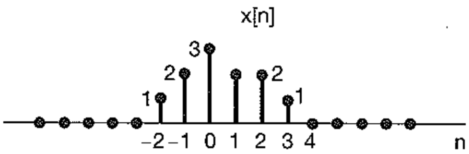


Figura P2.31

2.32. Considere la ecuación de diferencias

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n], \qquad \text{(P2.32-1)}$$

y suponga que

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]. \qquad \text{(P2.32-2)}$$

Dé por sentado que la solución $y[n]$ consiste en la suma de una solución particular $y_p[n]$ para la ecuación (P2.32-1) y una solución homogénea $y_h[n]$ que satisface la ecuación

$$y_h[n] - \frac{1}{2}y_h[n-1] = 0.$$

(a) Verifique que la solución homogénea esté dada por

$$y_h[n] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(b) Consideremos que se obtiene una solución particular $y_p[n]$ tal que

Suponiendo que $y_p[n]$ es de la forma $B(\frac{1}{3})^n$ para $n \geq 0$, y la sustituimos en la ecuación de diferencias antes descrita, determine el valor de B.

(c) Suponga que el sistema LTI descrito por la ecuación (P2.32-1) e inicialmente en reposo tiene como entrada la señal especificada por la ecuación (P2.32-2). Ya que $x[n] = 0$ para $n < 0$, tenemos que $y[n] = 0$ para $n < 0$. Asimismo, de las partes (a) y (b) tenemos que $y[n]$ tiene la forma

$$y[n] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n + B\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

para $n \geq 0$. Para obtener el valor de la constante desconocida A, debemos especificar un valor para $y[n]$ para algún $n \geq 0$. Utilice la condición de reposo inicial y las ecuaciones (P2.32-1) y (P2.32-2) para determinar $y[0]$. A partir de este valor determine la constante A. El resultado de este cálculo conduce a la solución de la ecuación de diferencias (P2.32-1) bajo la condición de reposo inicial, cuando la entrada está dada por la ecuación (P2.32-2).

2.33. Considere un sistema cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ satisfagan la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t). \tag{P2.33-1}$$

El sistema también satisface la condición de reposo inicial.

(a) (i) Determine la salida del sistema $y_1(t)$ cuando la entrada es $x_1(t) = e^{3t}u(t)$.

(ii) Determine la salida del sistema $y_2(t)$ cuando la entrada es $x_2(t) = e^{2t}u(t)$.

(iii) Determine la salida del sistema $y_3(t)$ cuando la entrada es $x_3(t) = \alpha e^{3t}u(t) + \beta e^{2t}u(t)$, donde α y β son números reales. Demuestre que $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$.

(iv) Ahora, sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ señales arbitrarias tales que

$$x_1(t) = 0, \text{ para } t < t_1,$$
$$x_2(t) = 0, \text{ para } t < t_2.$$

Si $y_1(t)$ es la salida del sistema para la entrada $x_1(t)$, $y_2(t)$ la salida del sistema a la entrada $x_2(t)$ y $y_3(t)$ la salida del sistema a la entrada $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, demuestre que

$$y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t).$$

Por tanto, podemos concluir que el sistema en estudio es lineal.

(b) (i) Determine la salida del sistema $y_1(t)$ cuando la entrada es $x_1(t) = Ke^{2t}u(t)$.

(ii) Determine la salida del sistema $y_2(t)$ cuando la entrada es $x_2(t) = Ke^{2(t-T)}u(t - T)$. Demuestre que $y_2(t) = y_1(t - T)$.

(iii) Ahora, sea $x_1(t)$ una señal arbitraria tal que $x_1(t) = 0$ para $t < t_0$. Si $y_1(t)$ es la salida del sistema a la entrada $x_1(t)$ y $y_2(t)$ es la salida del sistema a $x_2(t) = x_1(t - T)$, demuestre que

$$y_2(t) = y_1(t - T).$$

Podemos concluir, por tanto, que el sistema analizado es invariante en el tiempo. Junto con el resultado obtenido en la parte (a), concluimos que el sistema dado es LTI. Y ya que este sistema satisface la condición de reposo inicial, también es causal.

2.34. La conjetura de reposo inicial corresponde a una condición auxiliar valuada en cero, la cual es impuesta en un tiempo determinado de acuerdo con la señal de entrada. En este problema mostraremos que si la condición auxiliar usada es diferente de cero, o si siempre se aplica en un tiempo fijo (sin importar la señal de entrada), el sistema correspondiente no puede ser LTI. Considere un sistema cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ satisfagan la ecuación diferencial de primer orden (P2.33-1).

(a) Dada la condición auxiliar $y(1) = 1$, utilice un contraejemplo para demostrar que el sistema es no lineal.

(b) Dada la condición auxiliar $y(1) = 1$, utilice un contraejemplo para demostrar que el sistema es no invariante en el tiempo.

(c) Dada la condición auxiliar $y(1) = 1$, demuestre que el sistema es incrementalmente lineal.

(d) Dada la condición auxiliar $y(1) = 0$, demuestre que el sistema es lineal pero no invariante en el tiempo.

(e) Dada la condición auxiliar $y(0) + y(4) = 0$, demuestre que el sistema es lineal pero no invariante en el tiempo.

2.35. En el problema anterior vimos que la aplicación de una condición auxiliar en un tiempo fijo (sin que importe la señal de entrada) conduce al sistema correspondiente que no es invariante en el tiempo. En este problema, exploramos el efecto que tienen las condiciones auxiliares fijas sobre la causalidad de un sistema. Considere un sistema cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ satisfagan la ecuación diferencial de primer orden (P2.33-1). Suponga que la condición auxiliar asociada con la ecuación diferencial es $y(0) = 0$. Determine la salida del sistema para cada una de las siguientes entradas:

(a) $x_1(t) = 0$, para toda t

(b) $x_2(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 1, & t > -1 \end{cases}$

Observe que si $y_1(t)$ es la salida para la entrada $x_1(t)$ y $y_2(t)$ es la salida para la entrada $x_2(t)$, entonces $y_1(t)$ y $y_2(t)$ no son idénticas para $t < -1$, aun cuando $x_1(t)$ y $x_2(t)$ sean idénticas para $t < -1$. Utilice esta observación como base de un argumento para deducir que el sistema dado no es causal.

2.36. Considere un sistema discreto cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ están relacionadas por

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)y[n-1] + x[n].$$

(a) Demuestre que si este sistema satisface la condición de reposo inicial (es decir, si $x[n] = 0$ para $n < n_0$, entonces $y[n] = 0$ para $n < n_0$), entonces es lineal e invariante en el tiempo.

(b) Demuestre que si este sistema no satisface la condición de reposo inicial, se vale en su lugar de la condición auxiliar $y[0] = 0$, es no causal. [*Sugerencia:* Utilice una aproximación similar a la del problema 2.35.]

2.37. Considere un sistema cuya entrada y salida estén relacionadas por la ecuación diferencial de primer orden (P2.33-1). Suponga que el sistema satisface la condición de reposo final [es decir, si $x(t) = 0$ para $t > t_0$, entonces $y(t) = 0$ para $t > t_0$]. Demuestre que este sistema es *no* causal. [*Sugerencia:* Considere dos entradas al sistema, $x_1(t) = 0$ y $x_2(t) = e^t(u(t) - u(t-1))$, las cuales dan como resultado salidas $y_1(t)$ y $y_2(t)$, respectivamente. Después, demuestre que $y_1(t) \neq y_2(t)$ para $t < 0$.]

2.38. Dibuje la representación en diagrama de bloque para los sistemas LTI causales descritos por las siguientes ecuaciones de diferencias:
(a) $y[n] = \frac{1}{3}y[n-1] + \frac{1}{2}x[n]$
(b) $y[n] = \frac{1}{3}y[n-1] + x[n-1]$

2.39. Dibuje la representación en diagrama de bloque para los sistemas LTI causales descritos por las siguientes ecuaciones diferenciales:
(a) $y(t) = -(\frac{1}{2})dy(t)/dt + 4x(t)$
(b) $dy(t)/dt + 3y(t) = x(t)$

PROBLEMAS AVANZADOS

2.40. (a) Considere un sistema LTI con entrada y salida relacionadas a través de la ecuación

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau - 2)d\tau.$$

¿Cuál es la respuesta al impulso de este sistema?
(b) Determine la respuesta del sistema cuando la entrada $x(t)$ es como se muestra en la figura P2.40.

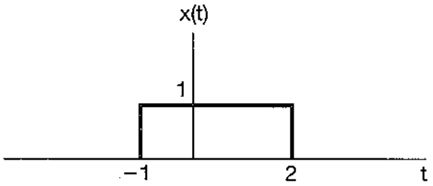


Figura P2.40

2.41. Examine la señal

$$x[n] = \alpha^n u[n].$$

(a) Dibuje la señal $g[n] = x[n] - \alpha x[n-1]$.
(b) Utilice el resultado de la parte (a) junto con las propiedades de convolución para determinar una secuencia $h[n]$ tal que

$$x[n] * h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \{u[n+2] - u[n-2]\}.$$

2.42. Imagine la señal

$$x(t) = u(t + 0.5) - u(t - 0.5)$$

y la señal

$$h(t) = e^{j\omega_0 t}.$$

(a) Determine un valor de ω_0 el cual asegure que

$$y(0) = 0,$$

donde $y(t) = x(t) * h(t)$.

(b) Con respecto a la parte anterior, ¿es única su respuesta?

2.43. Una de las propiedades más importantes de la convolución, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto, es la de asociatividad. En este problema, verificaremos e ilustraremos dicha propiedad.

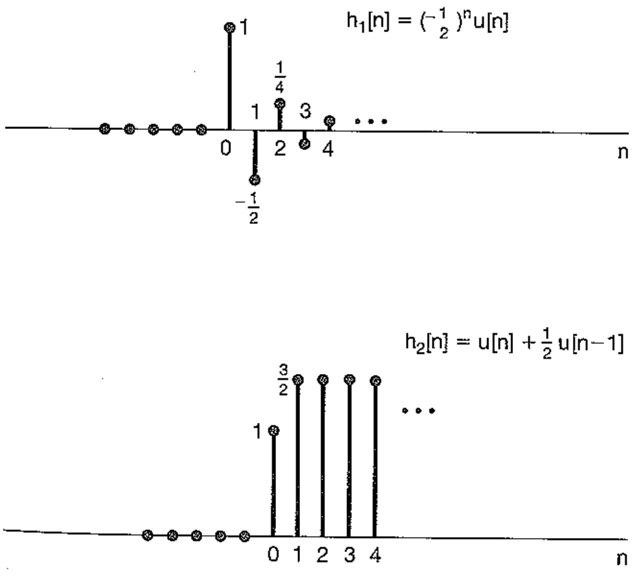
(a) Pruebe la igualdad

$$[x(t) * h(t)] * g(t) = x(t) * [h(t) * g(t)] \qquad \text{(P2.43-1)}$$

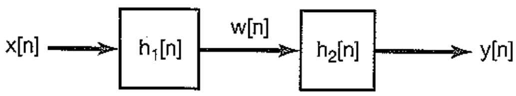
al mostrar que ambos lados de la ecuación (P2.43-1) son igual a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\sigma)g(t-\tau-\sigma)d\tau\, d\sigma.$$

(b) Considere dos sistemas LTI con respuestas a la muestra unitaria $h_1[n]$ y $h_2[n]$ mostradas en la figura P2.43(a). Estos dos sistemas están en cascada, como se muestra en la figura P2.43(b). Sea $x[n] = u[n]$.



(a)



(b)

(i) Calcule $y[n]$ calculando primero $w[n] = x[n] * h_1[n]$ y entonces calculando después $y[n] = w[n] * h_2[n]$; esto es, $y[n] = [x[n] * h_1[n]] * h_2[n]$.

(ii) Ahora determine $y[n]$ aplicando la convolución primero a $h_1[n]$ y $h_2[n]$ para obtener $g[n] = h_1[n] * h_2[n]$ y convolucionando entonces $x[n]$ con $g[n]$ para obtener $y[n] = x[n] * [\, h_1[n] * h_2[n]]$.

Las respuestas a (i) e (ii) deben ser idénticas, y deben ilustrar la propiedad de asociatividad de la convolución de tiempo discreto.

(c) Considere la conexión en cascada de dos sistemas LTI como en la figura P2.43(b), donde en este caso

$$h_1[n] = \operatorname{sen} 8n$$

y

$$h_2[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1,$$

y donde la entrada es

$$x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1].$$

Determine la salida $y[n]$. (*Sugerencia:* El uso de las propiedades asociativa y conmutativa de la convolución deben facilitar bastante la solución.)

2.44. (a) Si

$$x(t) = 0, \quad |t| > T_1,$$

y

$$h(t) = 0, \quad |t| > T_2,$$

entonces

$$x(t) * h(t) = 0, \quad |t| > T_3$$

para algún número positivo T_3. Exprese T_3 en términos de T_1 y T_2.

(b) Un sistema LTI discreto tiene una entrada $x[n]$, una respuesta al impulso $h[n]$ y una salida $y[n]$. Si se sabe que $h[n]$ es cero en cualquier valor fuera del intervalo $N_0 \leq n \leq N_1$ y se sabe que $x[n]$ es cero en cualquier valor fuera del intervalo $N_2 \leq n \leq N_3$, entonces la salida $y[n]$ está restringida a ser cero en cualquier valor, excepto en algún intervalo $N_4 \leq n \leq N_5$.

(i) Determine N_4 y N_5 en términos de N_0, N_1, N_2 y N_3.

(ii) Si el intervalo $N_0 \leq n \leq N_1$ es de longitud M_h, $N_2 \leq n \leq N_3$ tiene una longitud M_x, y $N_4 \leq n \leq N_5$ es de longitud M_y, exprese M_y en términos de M_h y M_x.

(c) Considere un sistema LTI discreto con la siguiente propiedad: si la entrada $x[n] = 0$ para toda $n \geq 10$, entonces la salida $y[n] = 0$ para toda $n \geq 15$. ¿Qué condición debe satisfacer $h[n]$, la respuesta al impulso del sistema, para que esto sea válido?

(d) Considere el sistema LTI con respuesta al impulso de la figura P2.44. ¿Qué intervalo de $x(t)$ debemos conocer para determinar $y(0)$?

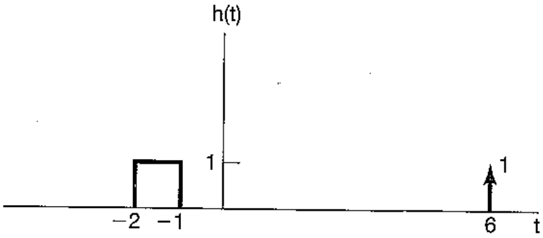


Figura P2.44

2.45. (a) Demuestre que si la respuesta de un sistema LTI a $x(t)$ es la salida $y(t)$, entonces la respuesta del sistema a

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

es $y'(t)$. Resuelva este problema en tres formas diferentes:

(i) De forma directa a través de las propiedades de linealidad e invariancia en el tiempo y el hecho de que

$$x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t) - x(t-h)}{h}.$$

(ii) Diferenciando la integral de convolución.

(iii) Analizando el sistema de la figura P2.45.

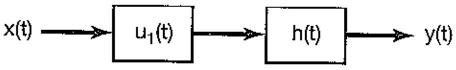


Figura P2.45

(b) Demuestre la validez de las siguientes relaciones:

(i) $y'(t) = x(t) * h'(t)$

(ii) $y(t) = \left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right) * h'(t) = \int_{-\infty}^{t} [x'(\tau) * h(\tau)]d\tau = x'(t) * \left(\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau\right)$

[*Sugerencia:* Esto se lleva a cabo fácilmente mediante el uso de los diagramas de bloques como en (iii) de la parte (a) y el hecho de que $u_1(t) * u_{-1}(t) = \delta(t)$.]

(c) Un sistema LTI tiene la respuesta $y(t) = \operatorname{sen}\omega_0 t$ a la entrada $x(t) = e^{-5t}u(t)$. Utilice el resultado de la parte (a) como ayuda para determinar la respuesta al impulso de este sistema.

(d) Sea $s(t)$ la respuesta al escalón unitario de un sistema LTI de tiempo continuo. Utilice la parte (b) para deducir que la respuesta $y(t)$ a la entrada $x(t)$ es

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(\tau) * s(t-\tau)d\tau. \qquad \text{(P2.45-1)}$$

Demuestre también que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(\tau)u(t-\tau)d\tau. \qquad \text{(P2.45-2)}$$

(e) Use la ecuación (P2.45-1) para determinar la respuesta de un sistema LTI con respuesta escalón

$$s(t) = (e^{-3t} - 2e^{-2t} + 1)u(t)$$

a la entrada $x(t) = e^t u(t)$.

(f) Sea $s[n]$ la respuesta escalón unitario de un sistema LTI discreto. ¿Cuáles son las contrapartes discretas de las ecuaciones (P2.45-1) y (P2.45-2)?

2.46. Considere un sistema LTI S y una señal $x(t) = 2e^{-3t}u(t-1)$. Si

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

y

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow -3y(t) + e^{-2t}u(t),$$

determine la respuesta al impulso $h(t)$ de S.

2.47. Se nos ha dado cierto sistema lineal invariante en el tiempo con respuesta al impulso $h_0(t)$. Cuando la entrada es $x_0(t)$, la salida es $y_0(t)$, la cual está dibujada en la figura P2.47. Se nos ha dado entonces el siguiente conjunto de entradas a los sistemas lineales invariantes en el tiempo con sus correspondientes respuestas al impulso:

	Entrada $x(t)$	*Respuesta al impulso $h(t)$*
(a)	$x(t) = 2x_0(t)$	$h(t) = h_0(t)$
(b)	$x(t) = x_0(t) - x_0(t-2)$	$h(t) = h_0(t)$
(c)	$x(t) = x_0(t-2)$	$h(t) = h_0(t+1)$
(d)	$x(t) = x_0(-t)$	$h(t) = h_0(t)$
(e)	$x(t) = x_0(-t)$	$h(t) = h_0(-t)$
(f)	$x(t) = x'_0(t)$	$h(t) = h'_0(t)$

[Aquí, $x'_0(t)$ y $h'_0(t)$ denotan las primeras derivadas de $x_0(t)$ y $h_0(t)$, respectivamente.]

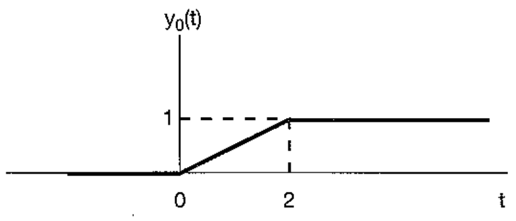


Figura P2.47

En cada uno de estos casos, determine si hay o no suficiente información para determinar la salida $y(t)$ cuando la entrada es $x(t)$ y la respuesta al impulso del sistema es $h(t)$. Si es posible determinar $y(t)$, proporcione su gráfica exacta con valores numéricos indicados en forma clara.

2.48. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones concernientes a los sistemas LTI son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

(a) Si $h(t)$ es la respuesta al impulso de un sistema LTI y $h(t)$ es periódica y diferente de cero, el sistema es inestable.

(b) El inverso de un sistema LTI causal siempre es causal.

(c) Si $|h[n]| \leq K$ para cada n, donde K es un número dado, entonces el sistema LTI cuya respuesta al impulso sea $h[n]$ será estable.

(d) Si un sistema LTI discreto tiene una respuesta al impulso $h[n]$ de duración finita, el sistema es estable.

(e) Si un sistema LTI es causal, es estable.

(f) La conexión en cascada de un sistema LTI no causal con uno causal es necesariamente no causal.

(g) Un sistema LTI continuo es estable si y sólo si su respuesta al escalón $s(t)$ es absolutamente integrable; esto es, si y sólo si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|dt < \infty.$$

(h) Un sistema LTI discreto es causal si y sólo si su respuesta al escalón $s[n]$ es cero para $n < 0$.

2.49. En el texto, mostramos que si $h[n]$ es absolutamente sumable, es decir, si

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty,$$

entonces el sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ es estable. Esto significa que ser absolutamente sumable es una condición *suficiente* para la estabilidad. En este problema, mostraremos que también es una condición *necesaria*. Considere un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ que no es absolutamente sumable; esto es,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \infty.$$

(a) Suponga que la entrada a este sistema es

$$x[n] = \begin{cases} 0, & \text{si } h[-n] = 0 \\ \frac{h[-n]}{|h[-n]|}, & \text{si } h[-n] \neq 0 \end{cases}.$$

¿Esta señal de entrada representa una entrada limitada? Si así es, ¿cuál es el valor más pequeño de B tal que:

$$|x[n]| \leq B \text{ para toda } n?$$

(b) Calcule la salida en $n = 0$ para esta selección particular de la entrada. ¿El resultado prueba el argumento de que la sumabilidad absoluta es una condición necesaria para la estabilidad?

(c) De manera parecida, demuestre que un sistema LTI continuo es estable si y sólo si su respuesta al impulso es absolutamente integrable.

2.50. Considere la conexión en cascada de dos sistemas mostrados en la figura P2.50. Se sabe que el primer sistema, A, es LTI. Sabemos que el segundo sistema, B, es el inverso del sistema A. Sea que $y_1(t)$ denota la respuesta del sistema A a $x_1(t)$ y que $y_2(t)$ denota la respuesta del sistema A a $x_2(t)$.

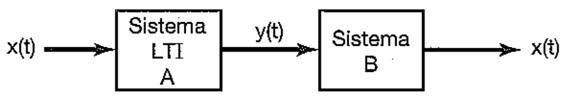


Figura P2.50

(a) ¿Cuál es la respuesta del sistema B a la entrada $ay_1(t) + by_2(t)$, donde a y b son constantes?

(b) ¿Cuál es la respuesta del sistema B a la entrada $y_1(t - \tau)$?

2.51. En el texto, vimos que la relación general entrada-salida de la conexión en cascada de dos sistemas LTI no depende del orden en el cual estén conectados. Este hecho, conocido como la propiedad conmutativa, depende tanto de la linealidad como de la invariancia en el tiempo de ambos sistemas. En este problema ilustramos el punto.

(a) Considere dos sistemas discretos A y B, donde el sistema A es un sistema LTI con respuesta a la muestra unitaria $h[n] = (1/2)^n u[n]$. Por otro lado, el sistema B es lineal pero variante en el tiempo. Específicamente, si la entrada al sistema B es $w[n]$, su salida es

$$z[n] = nw[n].$$

Demuestre que la propiedad conmutativa no se cumple para estos dos sistemas mediante el cálculo de las respuestas al impulso de las combinaciones en cascada mostradas en las figuras P2.51(a) y P2.51(b), respectivamente.

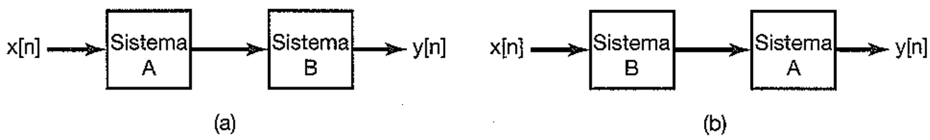


Figura P2.51

(b) Suponga que reemplazamos el sistema B en cada uno de los sistemas interconectados de la figura P2.51 por el sistema que muestra la siguiente relación entre su entrada $w[n]$ y su salida $z[n]$:

$$z[n] = w[n] + 2.$$

Repita los cálculos de la parte (a) en este caso.

2.52. Considere un sistema LTI discreto con respuesta a la muestra unitaria

$$h[n] = (n + 1)\alpha^n u[n],$$

donde $|\alpha| < 1$. Demuestre que la respuesta al escalón de este sistema es

$$s[n] = \left[\frac{1}{(\alpha - 1)^2} - \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2}\alpha^n + \frac{\alpha}{(\alpha - 1)}(n + 1)\alpha^n\right]u[n].$$

(*Sugerencia:* Note que

$$\sum_{k=0}^{N}(k + 1)\alpha^k = \frac{d}{d\alpha}\sum_{k=0}^{N+1}\alpha^k).$$

2.53. **(a)** Considere la ecuación diferencial homogénea

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0. \qquad \text{(P2.53-1)}$$

Demuestre que si s_0 es una solución de la ecuación

$$p(s) = \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = 0, \qquad \text{(P2.53-2)}$$

entonces $Ae^{s_0 t}$ es una solución de la ecuación (P2.53-1), donde A es una constante compleja arbitraria.

(b) El polinomio $p(s)$ en la ecuación (P2.53-2) puede factorizarse en términos de sus raíces $s_1, \ldots, s_r$ como

$$p(s) = a_N(s - s_1)^{\sigma_1}(s - s_2)^{\sigma_2} \ldots (s - s_r)^{\sigma_r},$$

donde s_i son las distintas soluciones de la ecuación (P2.53-2) y σ_i son sus *multiplicidades*, es decir, el número de veces que cada raíz aparece como una solución de la ecuación. Observe que

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_r + N.$$

En general, si $\sigma_i > 1$, entonces no sólo $Ae^{s_i t}$ es una solución de la ecuación (P2.53-1), sino que también lo es $At^j e^{s_i t}$, en tanto j sea un entero mayor que o igual a cero y menor que o igual a $\sigma_i - 1$. Para ilustrar este punto, demuestre que si $\sigma_i = 2$, entonces $Ate^{s_i t}$ es una solución de la ecuación (P2.53-1). [*Sugerencia:* Demuestre que si s es un número complejo arbitrario, entonces

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{d^k(Ate^{st})}{dt^k} = Ap(s)te^{st} + A\frac{dp(s)}{ds}e^{st}.]$$

Por tanto, la solución más general de la ecuación (P2.53-1) es

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{\sigma_i-1} A_{ij}t^j e^{s_i t},$$

donde A_{ij} son constantes complejas arbitrarias.

(c) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas con las condiciones auxiliares específicas:

(i) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

(ii) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

(iii) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

(iv) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

(v) $\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - y(t) = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1\ \ y''(0) = -2$

(vi) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

2.54. (a) Considere la ecuación de diferencias homogénea

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0, \tag{P2.54-1}$$

Demuestre que si z_0 es una solución de la ecuación

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = 0, \tag{P2.54-2}$$

entonces Az_0^n es una solución de la ecuación (P2.54-1), donde A es una constante arbitraria.

(b) Como por el momento resulta más conveniente trabajar con polinomios que tienen sólo potencias no negativas de z, considere la ecuación obtenida al multiplicar ambos miembros de la ecuación (P2.54-2) por z^N:

$$p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k} = 0. \tag{P2.54-3}$$

El polinomio $p(z)$ se puede factorizar como

$$p(z) = a_0(z-z_1)^{\sigma_1}\dots(z-z_r)^{\sigma_r},$$

donde $z_1, \dots, z_r$ son las distintas raíces de $p(z)$.

Demuestre que si $y[n] = nz^{n-1}$, entonces

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \frac{dp(z)}{dz}z^{n-N} + (n-N)p(z)z^{n-N-1}.$$

Utilice este hecho para demostrar que si $\sigma_i = 2$, entonces tanto Az_i^n como Bnz_i^{n-1} son las soluciones de la ecuación (P2.54-1), donde A y B son constantes complejas arbitrarias. De manera más general, se puede usar este mismo pro-

$$A\frac{n!}{r!(n-r)!}z^{n-r}$$

es una solución de la ecuación (P2.54-1) para $r = 0, 1, \ldots, \sigma_i - 1$.[7]

(c) Resuelva las siguientes ecuaciones de diferencias homogéneas con las condiciones auxiliares específicas:

(i) $y[n] + \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 0;\ y[0] = 1, y[-1] = -6$

(ii) $y[n] - 2y[n-1] + y[n-2] = 0;\ y[0] = 1, y[1] = 0$

(iii) $y[n] - 2y[n-1] + y[n-2] = 0;\ y[0] = 1, y[10] = 21$

(iv) $y[n] - \frac{\sqrt{2}}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = 0;\ y[0] = 0, y[-1] = 1$

2.55. Dentro del texto describimos un método para resolver las ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes, y mostramos otro método para hacerlo, el cual se ilustra en el problema 2.30. Si se hace la hipótesis de reposo inicial de manera que el sistema descrito por la ecuación de diferencias sea LTI y causal, entonces, en principio, podemos determinar la respuesta al impulso unitario $h[n]$ usando cualquiera de estos dos procedimientos. En el capítulo 5 describimos otro método que nos permite determinar $h[n]$ en una forma más elegante. En este problema describimos una aproximación más, la cual muestra básicamente que $h[n]$ se puede determinar resolviendo la ecuación homogénea con las condiciones iniciales adecuadas.

(a) Considere el sistema inicialmente en reposo descrito por la ecuación

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]. \qquad \text{(P2.55-1)}$$

Suponiendo que $x[n] = \delta[n]$, ¿cuál es el valor de $y[0]$? ¿Qué ecuación para $h[n]$ se satisface para $n \geq 1$ y con qué condiciones auxiliares? Resuelva esta ecuación para obtener una expresión de forma cerrada para $h[n]$.

(b) Considere ahora el sistema LTI inicialmente en reposo descrito por la ecuación de diferencias

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1]. \qquad \text{(P2.55-2)}$$

Este sistema está representado en la figura P2.55(a) como una conexión en cascada de dos sistemas LTI que están inicialmente en reposo. Debido a las propiedades de los sistemas LTI, podemos invertir el orden para obtener una representación alternativa del mismo sistema completo, como se ilustra en la figura P2.55(b). A partir de esto, utilice el resultado de la parte (a) para determinar la respuesta al impulso para el sistema descrito por la ecuación (P2.55-2).

(c) Considere nuevamente el sistema de la parte (a), con $h[n]$ que denota su respuesta al impulso. Demuestre, mediante la verificación de que la ecuación (P2.55-3) satisface la ecuación de diferencias (P2.55-1), que la respuesta $y[n]$ a una entrada arbitraria $x[n]$ está dada por la suma de convolución

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[n-m]x[m]. \qquad \text{(P2.55-3)}$$

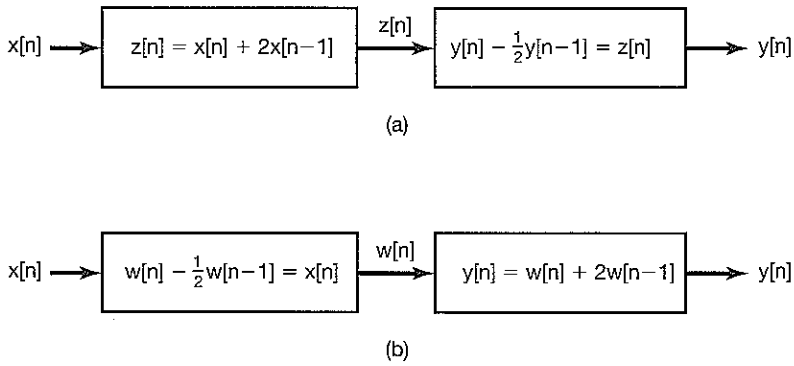


Figura P2.55

(d) Considere el sistema LTI inicialmente en reposo descrito por la ecuación de diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n]. \qquad \text{(P2.55-4)}$$

Suponiendo que $a_0 \neq 0$, ¿cuál es el valor de $y[0]$ si $x[n] = \delta[n]$? Usando este resultado, especifique la ecuación homogénea y las condiciones iniciales que debe satisfacer la respuesta al impulso del sistema.

Considere a continuación el sistema LTI causal descrito por la ecuación de diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]. \qquad \text{(P2.55-5)}$$

Exprese la respuesta al impulso de este sistema en términos de la respuesta dada para el sistema LTI descrito por la ecuación (P2.55-4).

(e) Hay un método alternativo para determinar la respuesta al impulso del sistema LTI descrito por la ecuación (P2.55-5). En concreto, dada la condición de reposo inicial, es decir, en este caso, $y[-N] = y[-N+1] = \ldots = y[-1] = 0$, resuelva la ecuación (P2.55-5) de forma recursiva cuando $x[n] = \delta[n]$ para determinar $y[0], \ldots, y[M]$. ¿Qué ecuación satisface $h[n]$ para $n \geq M$? ¿Cuáles son las condiciones iniciales adecuadas para esta ecuación?

(f) Usando cualquiera de los métodos descritos en las partes (d) y (e), encuentre las respuestas al impulso de los sistemas LTI causales descritos por las siguientes ecuaciones:

(i) $y[n] - y[n-2] = x[n]$
(ii) $y[n] - y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$
(iii) $y[n] - y[n-2] = 2x[n] - 3x[n-4]$
(iv) $y[n] - (\sqrt{3}/2)y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$

2.56. En este problema consideramos un procedimiento que es la contraparte de tiempo continuo de la técnica desarrollada en el problema 2.55. Nuevamente veremos que el problema de determinar la respuesta al impulso $h(t)$ para $t > 0$ para un sistema LTI inicialmente en reposo descrito por una ecuación diferencial lineal con coefi-

(a) Considere el sistema LTI inicialmente en reposo y descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t). \qquad \text{(P2.56-1)}$$

Suponga que $x(t) = \delta(t)$. Para determinar el valor de $y(t)$ *inmediatamente después* de la aplicación del impulso unitario, considere la integral de la ecuación (P2.56−1) desde $t = 0^-$ hasta $t = 0^+$ (es decir, desde 'justo antes" hasta "justo después" de la aplicación del impulso). Esto nos da

$$y(0^+) - y(0^-) + 2\int_{0^-}^{0^+} y(\tau)d\tau = \int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau)d\tau = 1. \qquad \text{(P2.56-2)}$$

Puesto que el sistema está inicialmente en reposo y $x(t) = 0$ para $t < 0$, $y(0^-) = 0$. Para satisfacer la ecuación (P2.56-9-2) debemos tener $y(0^+) = 1$. Por tanto, debido a que $x(t) = 0$ para $t > 0$, la respuesta al impulso de nuestro sistema es la solución de la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

con condición inicial

$$y(0^+) = 1.$$

Resuelva esta ecuación diferencial para obtener la respuesta al impulso $h(t)$ para este sistema. Verifique su resultado demostrando que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

satisface la ecuación (P2.56-1) para cualquier entrada $x(t)$.

(b) Para generalizar este argumento, considere un sistema LTI inicialmente en reposo y descrito por la ecuación diferencial

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = x(t) \qquad \text{(P2.56-3)}$$

con $x(t) = \delta(t)$. Asuma la condición de reposo inicial la cual, ya que $x(t) = 0$ para $t < 0$, implica que

$$y(0^-) = \frac{dy}{dt}(0^-) = \ldots = \frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}(0^-) = 0. \qquad \text{(P2.56-4)}$$

para demostrar que la ecuación resultante se satisface con

$$y(0^+) = \frac{dy}{dt}(0^+) = \ldots = \frac{d^{N-2}y}{dt^{N-2}}(0^+) = 0. \qquad \text{(P2.56-5}a\text{)}$$

y

$$\frac{d^{N-2}y}{dt^{N-2}}(0^+) = \frac{1}{a^N}. \qquad \text{(P2.56-5}b\text{)}$$

En consecuencia, la respuesta al impulso del sistema para $t > 0$ puede obtenerse resolviendo la ecuación homogénea

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

con condiciones iniciales dadas por las ecuaciones (P2.56-5).

(c) Considere ahora el sistema LTI causal descrito mediante la ecuación diferencial

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \qquad \text{(P2.56-6)}$$

Exprese la respuesta al impulso de este sistema en términos de la que se obtuvo para el sistema de la parte (b). (*Sugerencia:* Examine la figura P2.56.)

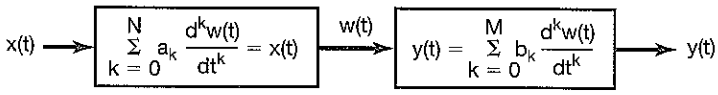


Figura P2.56

(d) Aplique el procedimiento descrito en las partes (b) y (c) para encontrar las respuestas al impulso para los sistemas LTI inicialmente en reposo y descritos por las siguientes ecuaciones diferenciales:

(i) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$

(ii) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$

(e) Use los resultados de las partes (b) y (c) para deducir que si $M \geq N$ en la ecuación (P2.56-6), entonces la respuesta al impulso $h(t)$ contendrá términos singulares concentrados en $t = 0$. En particular, $h(t)$ contendrá un término de la forma

$$\sum_{r=0}^{M-N} \alpha_r u_r(t),$$

donde α_r son constantes y las $u_r(t)$ son funciones singulares definidas en la sección 2.5.

(f) Encuentre las respuestas al impulso de los sistemas LTI causales descritos por las siguientes ecuaciones diferenciales:

(i) $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$

(ii) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{d^3x(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt}$ …

2.57. Considere un sistema LTI causal S cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ estén relacionadas por la ecuación de diferencias

$$y[n] = -ay[n-1] + b_0x[n] + b_1x[n-1].$$

(a) Verifique que S pueda considerarse una conexión en cascada de dos sistemas LTI causales S_1 y S_2 con la siguiente relación entrada-salida:

$$S_1 : y_1[n] = b_0x_1[n] + b_1x_1[n-1],$$
$$S_2 : y_2[n] = -ay_2[n-1] + x_2[n],$$

(b) Dibuje la representación de S_1 en diagrama de bloque.
(c) Dibuje la representación de S_2 en diagrama de bloque.
(d) Dibuje la representación en diagrama de bloque de S como una conexión en cascada de la representación de S_1 seguida de la representación de S_2.
(e) Dibuje la representación en diagrama de bloque de S como una conexión en cascada de la representación de S_2 seguida de la representación de S_1.
(f) Demuestre que los dos elementos de retardo en la representación de S en diagrama de bloque obtenida en la parte (e) se puede reducir a un elemento de retardo. El diagrama de bloques resultante se conoce como realización de la *Forma Directa II de S*, en tanto que los diagramas de bloques obtenidos en las partes (d) y (e) se conocen como realizaciones de la *Forma Directa I de S*.

2.58. Imagine un sistema LTI causal S cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ estén relacionadas por la ecuación de diferencias:

$$2y[n] - y[n-1] + y[n-3] = x[n] - 5x[n-4].$$

(a) Verifique que S se pueda considerar como una conexión en cascada de dos sistemas LTI causales S_1 y S_2 con las siguientes relaciones de entrada-salida:

$$S_1 : 2y_1[n] = x_1[n] - 5x_1[n-4],$$
$$S_2 : y_2[n] = \frac{1}{2}y_2[n-1] - \frac{1}{2}y_2[n-3] + x_2[n].$$

(b) Dibuje la representación de S_1 en diagrama de bloque.
(c) Dibuje la representación de S_2 en diagrama de bloque.
(d) Dibuje la representación en diagrama de bloque de S como una conexión en cascada de la misma representación de S_1 seguida de la representación de S_2.
(e) Dibuje la representación en diagrama de bloque de S como una conexión en cascada de la representación de S_2 seguida de la representación de S_1.
(f) Demuestre que los cuatro elementos de retardo en la representación de S en diagrama de bloque obtenida en la parte (e) se puede reducir a tres elementos. El diagrama de bloques resultante se conoce como realización de la *Forma Directa II de S*, mientras que los diagramas de bloques obtenidos en las partes (d) y (e) se conocen como realizaciones de la *Forma Directa I de S*.

2.59. Considere un sistema LTI causal S cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ estén relacionadas por la ecuación diferencial

$$a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = b_0x(t) + b_1\frac{dx(t)}{dt}.$$

(a) Demuestre que

$$y(t) = A\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau + Bx(t) + C\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau,$$

y exprese las constantes A, B y C en términos de las constantes a_0, a_1, b_0 y b_1.

(b) Demuestre que S se puede considerar como una conexión en cascada de los dos siguientes sistemas LTI causales:

$$S_1 : y_1(t) = Bx_1(t) + C\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau,$$

$$S_2 : y_2(t) = A\int_{-\infty}^{t} y_2(\tau)d\tau + x_2(t).$$

(c) Dibuje la representación de S_1 en diagrama de bloque.

(d) Dibuje la representación de S_2 en diagrama de bloque.

(e) Dibuje la representación en diagrama de bloque de S como una conexión en cascada de la representación de S_1 seguida de la representación de S_2.

(f) Dibuje la representación en diagrama de bloque de S como una conexión en cascada de la representación de S_2 seguida de la representación de S_1.

(g) Demuestre que los dos integradores en su respuesta a la parte (f) se pueden reducir a uno solo. El diagrama de bloques resultante se conoce como realización de la *Forma Directa II de S*, en tanto que los diagramas de bloques obtenidos en las partes (e) y (f) se conocen como realizaciones de la *Forma Directa I de S*.

2.60. Considere un sistema LTI causal S cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ estén relacionadas por la ecuación diferencial

$$a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = b_0x(t) + b_1\frac{dx(t)}{dt} + b_2\frac{d^2x(t)}{dt^2}.$$

(a) Demuestre que

$$y(t) = A\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau + B\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau} y(\sigma)d\sigma\right)d\tau$$

$$+ Cx(t) + D\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau + E\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau} x(\sigma)d\sigma\right)d\tau,$$

y exprese las constantes A, B, C, D y E en términos de las constantes a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 y b_2.

(b) Demuestre que S se puede considerar como una conexión en cascada de los dos siguientes sistemas LTI causales:

$$S_1: \; y_1(t) = Cx_1(t) + D\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau + E\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau} x_1(\sigma)d\sigma\right)d\tau,$$

$$S_2: \; y_2(t) = A\int_{-\infty}^{t} y_2(\tau)d\tau + B\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau} y_2(\sigma)d\sigma\right)d\tau + x_2(t).$$

(c) Dibuje la representación de S_1 en diagrama de bloque.

(d) Dibuje la representación de S_2 en diagrama de bloque.

(e) Dibuje la representación en diagrama de bloque de S como una conexión en cascada de la representación de S_1 seguida de la representación de S_2.

(f) Dibuje la representación en diagrama de bloque de S como una conexión en cascada de la representación de S_2 seguida de la representación de S_1.

(g) Demuestre que los cuatro integradores en su respuesta a la parte (f) se pueden reducir a dos. El diagrama de bloques resultante se conoce como realización de la *Forma Directa II de S*, mientras que los diagramas de bloques obtenidos en las partes (e) y (f) se conocen como realizaciones de la *Forma Directa I de S*.

PROBLEMAS DE EXTENSIÓN

2.61. (a) En el circuito mostrado en la figura P2.61(a), $x(t)$ es el voltaje de entrada. El voltaje $y(t)$ a través del capacitor se considera la salida del sistema.

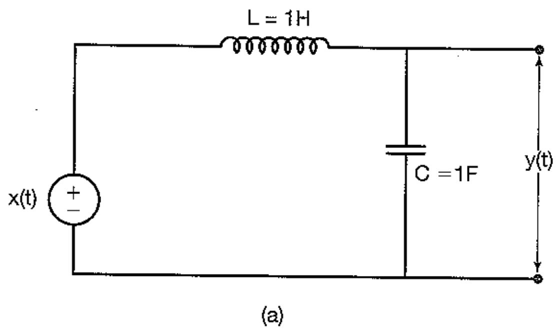


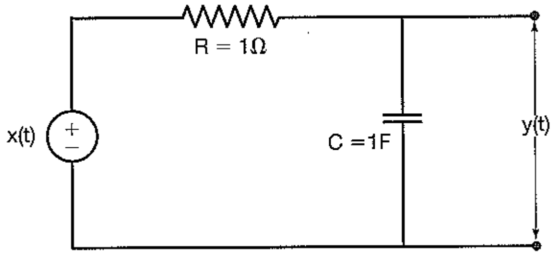
Figura P2.61a

(i) Determine la ecuación diferencial que relaciona a $x(t)$ con $y(t)$.

(ii) Demuestre que la solución homogénea de la ecuación diferencial de la parte (i) tiene la forma $K_1e^{j\omega_1 t} + K_2e^{j\omega_2 t}$. Especifique los valores de ω_1 y ω_2.

(iii) Demuestre que, ya que el voltaje y la corriente están restringidos a ser reales, la respuesta natural del sistema es senoidal.

(b) En el circuito mostrado en la figura P2.61(b), $x(t)$ es el voltaje de entrada. El voltaje $y(t)$ a través del capacitor se considera la salida del sistema.

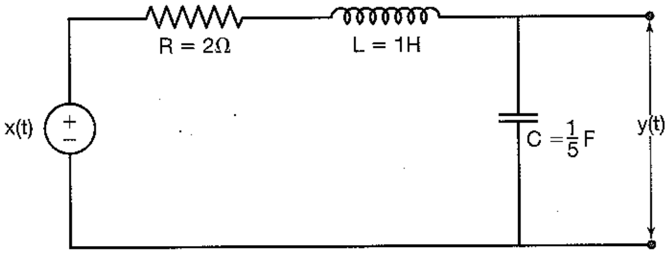


(b) **Figura P2.61b**

(i) Determine la ecuación diferencial que relaciona a $x(t)$ con $y(t)$.

(ii) Demuestre que la respuesta natural de este sistema tiene la forma Ke^{-at}, y especifique el valor de a.

(c) En el circuito mostrado en la figura P2.61(c), $x(t)$ es el voltaje de entrada. El voltaje $y(t)$ a través del capacitor se considera la salida del sistema.



(c) **Figura P2.61c**

(i) Determine la ecuación diferencial que relaciona a $x(t)$ con $y(t)$.

(ii) Demuestre que la solución homogénea de la ecuación diferencial de la parte (i) tiene la forma $e^{-at}\{K_1e^{j2t} + K_2e^{-j2t}\}$, y especifique el valor de a.

(iii) Demuestre que, ya que el voltaje y la corriente están restringidos a ser reales, la respuesta natural del sistema es una senoidal decreciente.

2.62. (a) En el sistema mecánico que se muestra en la figura P2.62(a), la fuerza $x(t)$ aplicada a la masa representa la entrada, mientras que el desplazamiento $y(t)$ de la masa representa la salida. Determine la ecuación diferencial que relaciona a $x(t)$ con $y(t)$. Demuestre que la respuesta natural de este sistema es periódica.

(b) Examine la figura P2.62(b), en la cual la fuerza $x(t)$ es la entrada y la velocidad $y(t)$ es la salida. La masa del auto es m, en tanto que el coeficiente de fricción cinética es ρ. Demuestre que la respuesta natural de este sistema decae conforme aumenta el tiempo.

(c) En el sistema mecánico mostrado en la figura P2.62(c), la fuerza $x(t)$ aplicada a la masa representa la entrada, mientras que el corrimiento $y(t)$ de la masa representa la salida.

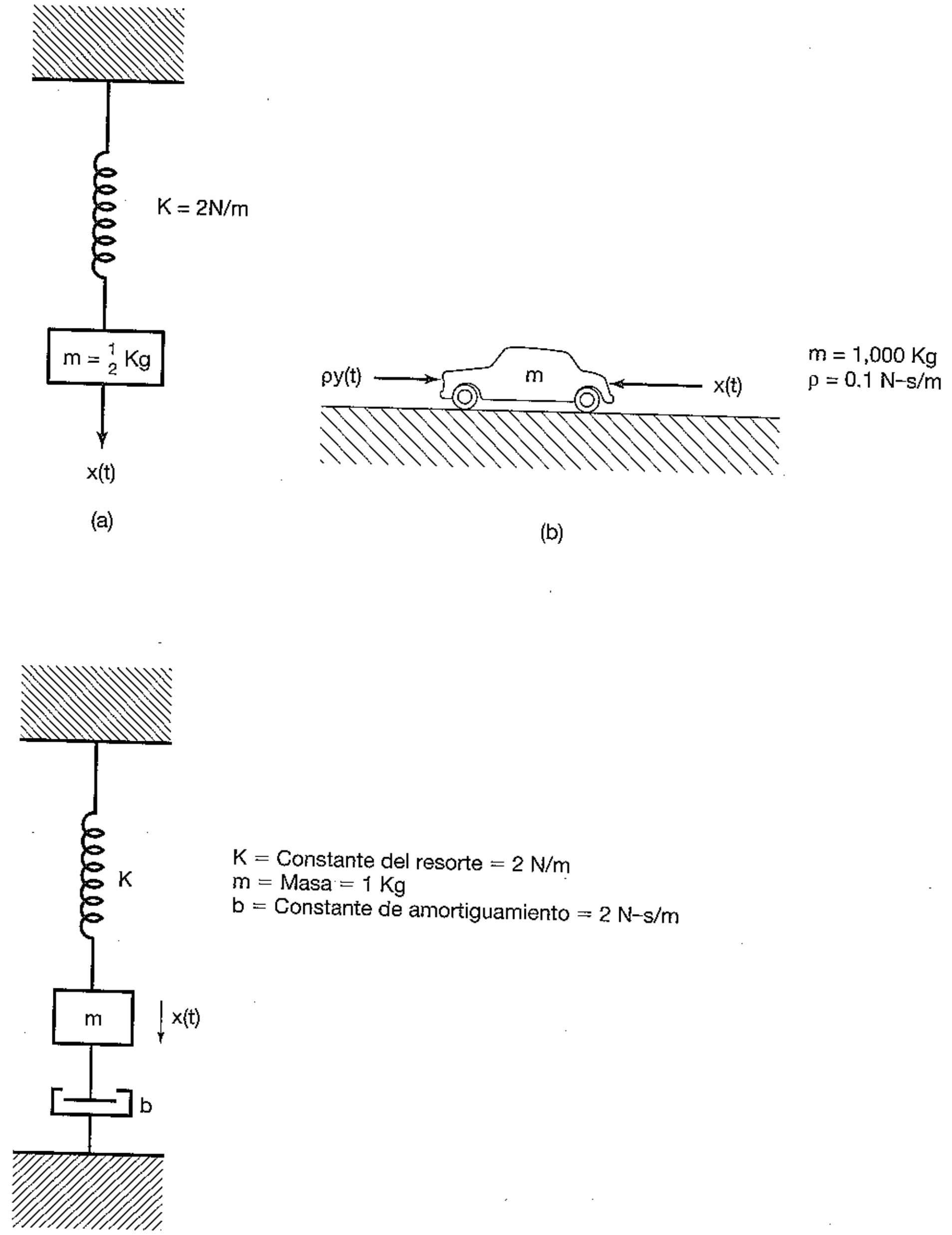


Figura P2.62

(i) Determine la ecuación diferencial que relaciona a $x(t)$ con $y(t)$.

(ii) Demuestre que la solución homogénea de la ecuación diferencial de la parte (i) tiene la forma $e^{-at}[K_1e^{jt} + K_2e^{-jt}]$, y especifique el valor de a.

(iii) Demuestre que, ya que el voltaje y la corriente están restringidos a ser reales, la respuesta natural del sistema

2.63. Una hipoteca de \$100,000 será liquidada mediante pagos mensuales *iguales* de D dólares. El interés compuesto mensual se carga a una tasa de 12% anual sobre el balance no pagado; por ejemplo, después del primer mes, la deuda total es igual a

$$\$100{,}000 + \left(\frac{0.12}{12}\right)\$100{,}000 = \$101{,}000.$$

El problema es determinar D de manera tal que, después de un tiempo especificado, la hipoteca sea pagada totalmente, dejando un balance neto de cero.

(a) Para abordar el problema, suponga que $y[n]$ denota el balance no pagado después del pago mensual n. Suponga también que el principal se presta en el mes 0 y los pagos mensuales se inician en el mes 1. Demuestre que $y[n]$ satisface la ecuación de diferencias

$$y[n] - \gamma y[n-1] = -D \quad n \geq 1 \qquad \text{(P2.63-1)}$$

con la condición inicial

$$y[0] = \$100{,}000,$$

donde γ es una constante que debe ser determinada.

(b) Resuelva la ecuación de diferencias de la parte (a) para determinar

$$y[n] \text{ para } n \geq 0.$$

(*Sugerencia:* La solución particular de la ecuación (P2.63-1) es una constante Y. Encuentre el valor de Y y exprese $y[n]$ para $n \geq 1$ como la suma de las soluciones particular y homogénea. Determine la constante desconocida en la solución homogénea mediante el calculando directamente $y[1]$ a partir de la ecuación (P2.63-1) y comparándola con la solución que usted obtuvo).

(c) Si la hipoteca debiera ser pagada en 30 años después de haberse hecho 360 pagos mensuales de D dólares, determine el valor apropiado de D.

(d) ¿Cuál es el pago total hecho al banco después del periodo de 30 años?

(e) ¿Por qué los bancos hacen préstamos?

2.64. Un uso importante de los sistemas inversos se encuentra en las situaciones en las que uno desea eliminar algún tipo de distorsiones. Un buen ejemplo de esto es el problema de eliminar ecos de las señales acústicas. Por ejemplo, si un auditorio tiene un eco perceptible, entonces un impulso acústico inicial producirá versiones atenuadas del sonido a intervalos regulares. En consecuencia, un modelo utilizado a menudo para tratar este fenómeno es un sistema LTI con una respuesta al impulso que consiste de un tren de impulsos, es decir,

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta(t - kT). \qquad \text{(P2.64-1)}$$

Aquí los ecos ocurren cada T segundos, y h_k representa el factor de ganancia en el eco k resultante a partir de un impulso acústico inicial.

(a) Suponga que $x(t)$ representa la señal acústica original (por ejemplo, la música producida por una orquesta) y que $y(t) = x(t) * h(t)$ es la señal real que se escucha si no se hace ningún procesamiento para eliminar los ecos. Con el fin eléctrica. También usaremos $y(t)$ para denotar esta señal, ya que representa el equivalente eléctrico de la señal acústica, y podemos ir de una a otra mediante los sistemas de conversión acústico-eléctrica.

El punto importante a resaltar es que el sistema con respuesta al impulso dado por la ecuación (P2.64-1) es invertible. Por tanto, podemos encontrar un sistema LTI con respuesta al impulso $g(t)$ tal que

$$y(t) * g(t) = x(t),$$

y entonces, al procesar la señal eléctrica $y(t)$ de esta manera y convertirla de nuevo en una señal acústica, podemos eliminar los ecos que causan problemas.

La respuesta al impulso requerida $g(t)$ también es un tren de impulsos:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta(t - kT).$$

Determine las ecuaciones algebraicas que deben satisfacer los g_k sucesivos, y resuelva estas ecuaciones para g_0, g_1 y g_2 en términos de h_k.

(b) Suponga que $h_0 = 1, h_1 = 1/2$ y $h_i = 0$ para toda $i \geq 2$. ¿Cuál es $g(t)$ en este caso?

(c) Un buen modelo para la generación de los ecos se ilustra en la figura P2.64. En consecuencia, cada eco sucesivo representa una versión retroalimentada de $y(t)$, retrasada T segundos y escalada por α. El valor típico es $0 < \alpha < 1$, ya que los ecos sucesivos son atenuados.

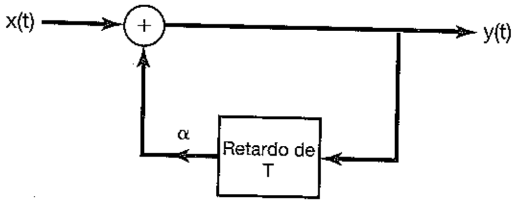


Figura P2.64

(i) ¿Cuál es la respuesta al impulso de este sistema? (Considere un reposo inicial, es decir, $y(t) = 0$ para $t < 0$ si $x(t) = 0$ para $t < 0$.)

(ii) Demuestre que el sistema es estable si $0 < \alpha < 1$ e inestable si $\alpha > 1$.

(iii) ¿Cuál es $g(t)$ en este caso? Construya una realización del sistema inverso usando sumadores, multiplicadores de coeficientes y elementos de retardo de T segundos.

(d) Aunque hemos descrito el análisis anterior en términos de sistemas continuos debido a la aplicación que hemos estado considerando, las mismas ideas generales se cumplen para el caso de tiempo discreto. Es decir, el sistema LTI con respuesta al impulso

$$h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - kN]$$

es invertible y tiene como su inverso un sistema LTI con respuesta al impulso

No es difícil verificar que g_i satisface las mismas ecuaciones algebraicas que en la parte (a).

Considere ahora el sistema LTI discreto con respuesta al impulso

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN].$$

Este sistema *no* es invertible. Encuentre dos entradas que produzcan la misma salida.

2.65. En el problema 1.45 presentamos y examinamos algunas de las propiedades básicas de las funciones de correlación para señales continuas. La contraparte discreta de la función de correlación tiene esencialmente las mismas propiedades que la continua, y ambas son extremadamente importantes en numerosas aplicaciones (como se analiza en los problemas 2.66 y 2.67). En este problema introducimos la función de correlación discreta y examinamos algunas más de sus propiedades.

Sean $x[n]$ y $y[n]$ dos señales reales discretas. Las *funciones de autocorrelación* $\phi_{xx}[n]$ y $\phi_{yy}[n]$ de $x[n]$ y $y[n]$, respectivamente, están definidas por las siguientes expresiones:

$$\phi_{xx}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m + x]x[m]$$

y

$$\phi_{yy}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m + n]y[m]$$

y las *funciones de correlación cruzada* están dadas por

$$\phi_{xy}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m + n]y[m]$$

y

$$\phi_{yx}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m + n]x[m].$$

Como en el caso continuo, estas funciones poseen ciertas propiedades de simetría. Específicamente, $\phi_{xx}[n]$ y $\phi_{yy}[n]$ son funciones par, mientras que $\phi_{xy}[n] = \phi_{yx}[-n]$.

(a) Calcule las secuencias de autocorrelación para las señales $x_1[n]$, $x_2[n]$, $x_3[n]$ y $x_4[n]$ mostradas en la figura P2.65.

(b) Calcule las secuencias de correlación cruzada

$$\phi_{x_ix_j}[n], i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

para $x_i[n]$, $i = 1, 2, 3, 4$, como se muestra en la figura P2.65.

(c) Sea $x[n]$ la entrada de un sistema LTI con respuesta a la muestra unitaria $h[n]$, y sea $y[n]$ su salida correspondiente. Encuentre expresiones para $\phi_{xy}[n]$ y $\phi_{yy}[n]$

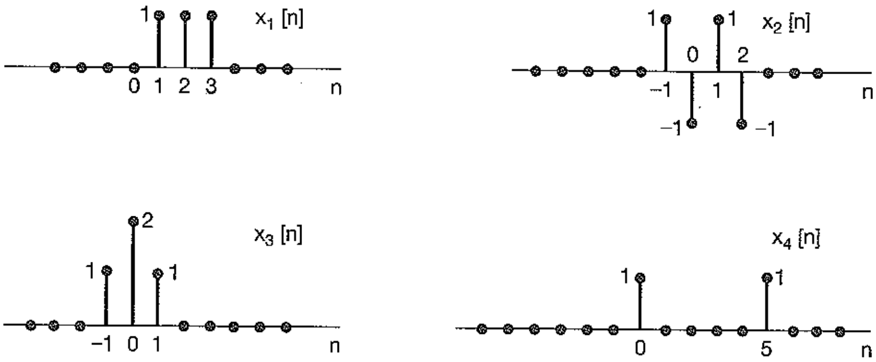


Figura P2.65

especificando de manera explícita la respuesta al impulso de cada uno de los dos sistemas.)

(d) Sea $h[n] = x_1[n]$ en la figura P2.65, y sea $y[n]$ la salida del sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ cuando la entrada $x[n]$ es también igual a $x_1[n]$. Calcule $\phi_{xy}[n]$ y $\phi_{yy}[n]$ usando los resultados de la parte (c).

2.66. Sean $h_1(t)$, $h_2(t)$ y $h_3(t)$, bosquejadas en la figura P2.66, las respuestas al impulso de tres sistemas LTI. Estas tres señales se conocen como *funciones de Walsh* y son de considerable importancia práctica porque se pueden generar fácilmente con circuitos lógicos digitales y porque la multiplicación por cada una de estas funciones puede llevarse a cabo con facilidad mediante un interruptor inversor de polaridad.

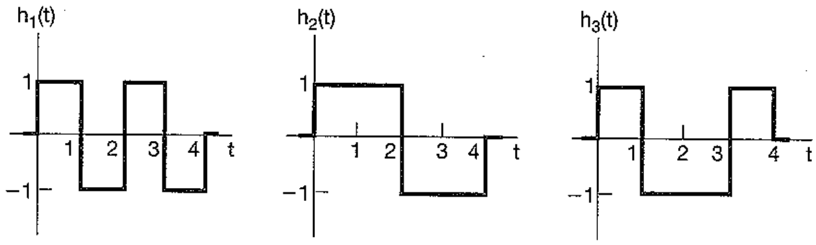


Figura P2.66

(a) Determine y dibuje su selección para $x_1(t)$, una señal continua que tiene las siguientes propiedades:
(i) $x_1(t)$ es real.
(ii) $x_1(t) = 0$ para $t < 0$.
(iii) $|x_1(t)| \leq 1$ para toda $t \geq 0$.
(iv) $y_1(t) = x_1(t) * h(t)$ es tan grande como sea posible en $t = 4$.

(b) Repita la parte (a) para $x_2(t)$ y $x_3(t)$ haciendo $y_2(t) = x_2(t) * h_2(t)$ y $y_3(t) = x_3(t) * h_3(t)$ cada una tan grande como sea posible en $t = 4$.

(c) ¿Cuál es el valor de

$$y_{ij}(t) = x_i(t) * h_j(t), i \neq j$$

El sistema con respuesta al impulso $h_i(t)$ se conoce como *filtro de acoplamiento* para la señal $x_i(t)$ ya que la respuesta al impulso se sintoniza con $x_i(t)$ para producir la señal de salida máxima. En el siguiente problema, relacionamos el concepto de filtro de acoplamiento con el de la función de correlación para señales continuas.

2.67. La *función de correlación cruzada* entre dos señales reales continuas $x(t)$ y $y(t)$ es

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau. \qquad \text{(P2.67-1)}$$

La *función de autocorrelación* de una señal $x(t)$ se obtiene al establecer $y(t) = x(t)$ en la ecuación (P2.67-1):

$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x(\tau)d\tau.$$

(a) Calcule la función de autocorrelación para las dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representadas en la figura P2.67(a).

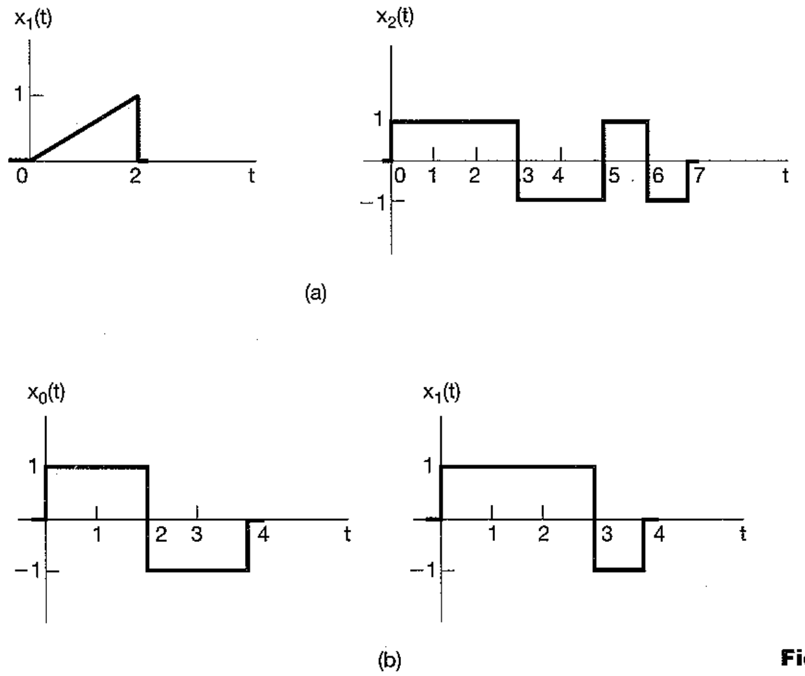


Figura P2.67

(b) Sea $x(t)$ una señal dada, y suponga que es, además, de duración finita, es decir, que $x(t) = 0$ para $t < 0$ y $t > T$. Encuentre la respuesta al impulso de un sistema LTI de manera que $\phi_{xx}(t - T)$ es la salida si $x(t)$ es la entrada.

(c) El sistema determinado en la parte (b) es un *filtro de acoplamiento* para la señal

Sea $x(t)$ como en la parte (b), y sea que $y(t)$ denote la respuesta a $x(t)$ de un sistema LTI con respuesta real al impulso $h(t)$. Suponga que $h(t) = 0$ para $t < 0$ y para $t > T$. Demuestre que la selección de $h(t)$ que maximiza $y(T)$, sujeta ésta a la limitación de que

$$\int_0^T h^2(t)dt = M, \text{ un número positivo fijo,} \tag{P2.67-2}$$

es un múltiplo escalar de la respuesta al impulso determinada en la parte (b). [*Sugerencia:* La desigualdad de Schwartz establece que

$$\int_b^a u(t)v(t)dt \leq \left[\int_a^b u^2(t)dt\right]^{1/2}\left[\int_a^b v^2(t)dt\right]^{1/2}$$

para cualesquiera dos señales $u(t)$ y $v(t)$. Utilícela para obtener un límite sobre $y(T)$.]

(d) La restricción establecida por la ecuación (P2.67-2) proporciona simplemente un escalamiento a la respuesta al impulso, ya que al incrementarse M sólo cambia el escalar multiplicador mencionado en la parte (c). Entonces, vemos que la selección particular de $h(t)$ en las partes (b) y (c) se iguala a la señal $x(t)$ para producir la salida máxima. Ésta es una propiedad en extremo importante en diversas aplicaciones, como indicaremos a continuación.

En problemas de comunicación, de un pequeño número de posibles piezas de información con frecuencia se desea transmitir sólo una. Por ejemplo, si un mensaje complejo se codifica en una secuencia de dígitos binarios, podemos imaginar un sistema que transmite la información bit por bit. Entonces, cada bit se puede transmitir mediante el envío de una señal, digamos $x_0(t)$, si el bit es un 0, o una señal diferente $x_1(t)$ si es un 1 lo que debe comunicarse. En este caso, el sistema receptor de dichas señales debe ser capaz de reconocer si se ha recibido $x_0(t)$ o $x_1(t)$. De manera intuitiva, lo que tiene sentido es tener dos sistemas en el receptor, uno sintonizado en $x_0(t)$ y el otro en $x_1(t)$, donde "sintonizar" significa que el sistema proporciona una gran salida después de que se recibió la señal para la que está sintonizado. La propiedad de producir una salida grande cuando se recibe una señal particular es precisamente la que posee el filtro de acoplamiento.

En la práctica, siempre hay distorsión e interferencia en los procesos de transmisión y recepción. En consecuencia, queremos maximizar la diferencia entre la respuesta de un filtro de acoplamiento a la entrada para la cual está sintonizado, y la respuesta del filtro a una de las otras señales que puede ser transmitida. Para ilustrar este punto, considere las dos señales $x_0(t)$ y $x_1(t)$ representadas en la figura P2.67(b). Demos por sentado que L_0 denota el filtro de acoplamiento para $x_0(t)$ y L_1 denota el filtro de acoplamiento para $x_1(t)$.

(i) Dibuje las respuestas de L_0 a $x_0(t)$ y $x_1(t)$. Haga lo mismo para L_1.

(ii) Compare los valores de estas respuestas en $t = 4$. ¿Cuánto se puede modificar $x_0(t)$ de manera tal que el receptor pueda distinguir más fácilmente entre $x_0(t)$ y $x_1(t)$ en que la respuesta de L_0 a $x_1(t)$ y la de L_1 a $x_0(t)$ sean cero en $t = 4$?

pulso será reflejado por dicho objetivo y regresará al transmisor con un retraso proporcional a la distancia a la que se encuentra el objetivo. En forma ideal, la señal recibida será una versión desplazada y posiblemente escalada de la señal original transmitida.

Sea $p(t)$ el pulso original que se envía. Demuestre que

$$\phi_{pp}(0) = \max_t \phi_{pp}(t).$$

Esto es, $\phi_{pp}(0)$ es el valor más grande que toma $\phi_{pp}(t)$. Utilice esta ecuación para deducir que, si la forma de onda que regresa al transmisor es

$$x(t) = \alpha p(t - t_0),$$

donde α es una constante positiva, entonces

$$\phi_{xp}(t_0) = \max_t \phi_{xp}(t).$$

(*Sugerencia:* Use la desigualdad de Schwartz.)

De este modo, la forma en la cual operan los sistemas sencillos de rastreo por radar se basa en el uso de un filtro de acoplamiento para la forma de onda transmitida $p(t)$ y en la anotación del tiempo en el cual la salida de este sistema alcanza su máximo valor.

2.69. En la sección 2.5 caracterizamos el doblete unitario mediante la ecuación

$$x(t) * u_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)u_1(\tau)d\tau = x'(t) \qquad \text{(P2.69-1)}$$

para cualquier señal $x(t)$. A partir de esta ecuación, dedujimos la relación

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)u_1(\tau)d\tau = -g'(0). \qquad \text{(P2.69-2)}$$

(a) Demuestre que la ecuación (P2.69-2) es una caracterización equivalente de $u_1(t)$ probando que la ecuación (P2.69-2) implica la ecuación (2.69-1). [*Sugerencia:* Fije t y defina la señal $g(\tau) = x(t - \tau)$.]

Así, hemos visto que caracterizar el impulso unitario o el doblete unitario mediante el comportamiento bajo la convolución es equivalente a caracterizar la forma en que se comporta bajo la integración cuando se multiplica por una señal arbitraria $g(t)$. De hecho, como se indicó en la sección 2.5, la equivalencia de estas definiciones operacionales se cumple para todas las señales y, en particular, para todas las funciones singulares.

(b) Sea $f(t)$ una señal dada. Demuestre que

$$f(t)u_1(t) = f(0)u_1(t) - f'(0)\delta(t)$$

mostrando que ambas funciones tienen las mismas definiciones operacionales.

(c) ¿Cuál es el valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u_2(\tau)d\tau?$$

2.70. En analogía con las funciones singulares continuas, podemos definir un conjunto de señales discretas. Específicamente, sea

$$u_{-1}[n] = u[n],$$
$$u_0[n] = \delta[n],$$

y

$$u_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1],$$

y defínase

$$u_k[n] = \underbrace{u_1[n] * u_1[n] * \cdots * u_1[n]}_{k \text{ veces}}, \quad k > 0$$

y

$$u_k[n] = \underbrace{u_{-1}[n] * u_{-1}[n] * \cdots * u_{-1}[n]}_{|k| \text{ veces}}, k < 0.$$

Observe que

$$x[n] * \delta[n] = x[n],$$

$$x[n] * u[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m],$$

y

$$x[n] * u_1[n] = x[n] - x[n-1],$$

(a) ¿A qué corresponde

$$\sum_{m=\infty}^{\infty} x[m]u_1[m]?$$

(b) Demuestre que

$$x[n]u_1[n] = x[0]u_1[n] - [x[1] - x[0]]\delta[n-1]$$
$$= x[1]u_1[n] - [x[1] - x[0]]\delta[n].$$

(c) Grafique las señales $u_2[n]$ y $u_3[n]$.
(d) Grafique $u_{-2}[n]$ y $u_{-3}[n]$.
(e) Demuestre que, en general, para $k > 0$,

$$u_k[n] = \frac{(-1)^n k!}{n!(k-n)!}[u[n] - u[n-k-1]]. \qquad \text{(P2.70-1)}$$

(*Sugerencia:* Utilice la inducción. De la parte (c), resulta evidente que $u_k[n]$ satisface la ecuación (P2.70-1) para $k = 2$ y 3. Entonces, suponiendo que la

(f) Demuestre que, en general, para $k > 0$,

$$u_{-k}[n] = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}u[n]. \qquad \text{(P2.70-2)}$$

(*Sugerencia:* De nueva cuenta, utilice la inducción. Observe que

$$u_{-(k+1)}[n] - u_{-(k+1)}[n-1] = u_{-k}[n]. \qquad \text{(P2.70-3)}$$

Entonces, considerando que la ecuación (P2.70-2) es válida para $u_{-k}[n]$, use la ecuación (P2.70-3) para demostrar que la ecuación (P2.70-2) también es válida para $u_{-(k+1)}[n]$.)

2.71. En este capítulo hemos usado varias propiedades e ideas que facilitan ampliamente el análisis de sistemas LTI. Entre éstas, hay dos que deseamos analizar con más detalle. Como veremos más adelante, en ciertos casos muy especiales se debe tener cuidado al usar dichas propiedades, pues de otro modo se pueden cumplir sin validación.

(a) Una de las propiedades básicas y más importantes de la convolución (tanto continua como discreta) es la de asociatividad. Esto es, si $x(t)$, $h(t)$ y $g(t)$ son tres señales, entonces

$$x(t) * [g(t) * h(t)] = [x(t) * g(t)] * h(t) = [x(t) * h(t)] * g(t). \qquad \text{(P2.71-1)}$$

Esta relación se cumple en tanto las tres expresiones estén bien definidas y sean finitas. Puesto que, en general ése es el caso en la práctica, usaremos la propiedad de asociatividad sin comentarios ni consideraciones. Sin embargo, hay algunos casos en los que *no* se cumple. Por ejemplo, considere el sistema ilustrado en la figura P2.71, con $h(t) = u_1(t)$ y $g(t) = u(t)$. Calcule la respuesta de este sistema a la entrada

$$x(t) = 1 \text{ para toda } t.$$

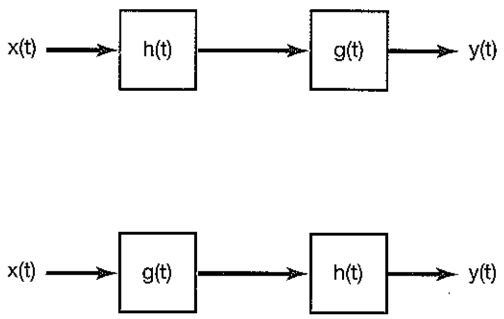


Figura P2.71

Realice esto en las tres diferentes formas indicadas por la ecuación (P2.71-1) y a partir de la figura:

(i) Convolucionando primero las dos respuestas al impulso y convolucionando después el resultado con $x(t)$.

(ii) Convolucionando primero $x(t)$ con $u_1(t)$ y convolucionando posteriormente el resultado con $u(t)$.

(b) Repita la parte (a) para

$$x(t) = e^{-t}$$

y

$$h(t) = e^{-t}u(t),$$
$$g(t) = u_1(t) + \delta(t).$$

(c) Haga lo mismo para

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$

$$g[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1].$$

Así pues, por lo general la propiedad de asociatividad de la convolución se cumple si y sólo si las tres expresiones en la ecuación (P2.71-1) tienen sentido (es decir, si y sólo si su interpretación en términos de los sistemas LTI son significativas). Por ejemplo, en la parte (a), diferenciar una constante e integrarla después tiene sentido, pero el proceso de integrar una constante desde $t = -\infty$ y *entonces* diferenciarla no lo tiene, y es sólo en tales casos que la asociatividad no se cumple.

Muy relacionado con el análisis anterior está un tema que involucra los sistemas inversos. Considere el sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = u(t)$. Como vimos en la parte (a), hay entradas (específicamente $x(t)$ = una constante diferente de cero) para las cuales la salida de este sistema es infinita y, por tanto, no tiene importancia considerar el planteamiento de invertir esos sistemas para recuperar la entrada. Sin embargo, si nos limitamos a entradas que conduzcan a salidas finitas, esto es, entradas que satisfagan

$$\left| \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \right| < \infty, \qquad \text{(P2.71-2)}$$

entonces el sistema *es* invertible, y el sistema LTI con respuesta al impulso $u_1(t)$ tiene su inverso.

(d) Demuestre que el sistema LTI con respuesta al impulso $u_1(t)$ *no* es invertible. (*Sugerencia:* Encuentre dos entradas diferentes que produzcan salida cero para todo tiempo.) Sin embargo, demuestre que el sistema es invertible si nos limitamos a entradas que satisfagan la ecuación (P2.71-2). [*Sugerencia:* En el problema 1.44, demostramos que un sistema LTI es invertible si ninguna entrada excepto $x(t) = 0$ produce una salida que es cero para todo tiempo; ¿existen dos entradas $x(t)$ que satisfagan la ecuación (P2.71-2) y que conduzcan de manera idéntica a respuestas cero cuando se convolucionan con $u_1(t)$?]

Lo que hemos ilustrado en este problema es lo siguiente:

(1) Si $x(t)$, $h(t)$ y $g(t)$ son tres señales y si ...

(2) Sea $h(t)$ la respuesta al impulso de un sistema LTI, y suponga que la respuesta al impulso $g(t)$ de un segundo sistema tiene la propiedad

$$h(t) * g(t) = \delta(t). \qquad \text{(P2.71-3)}$$

Entonces, a partir de (1), para *todas* las entradas $x(t)$ para las cuales $x(t) * h(t)$ y $x(t) * g(t)$ están bien definidas y son finitas, los dos sistemas en cascada ilustrados en la figura P2.71 actúan como el sistema identidad, y por tanto, los dos sistema LTI pueden considerarse como inversos uno del otro. Por ejemplo, si $h(t) = u(t)$ y $g(t) = u_1(t)$, entonces, en tanto nos limitemos a entradas que satisfagan la ecuación (P2.71-2), podremos considerar estos dos sistemas como inversos.

Por tanto, vemos que la propiedad de asociatividad de la ecuación (P2.71-1) y la definición de sistemas LTI inversos como fue proporcionada por la ecuación (P2.71-3) son válidas, en tanto que las convoluciones involucradas sean finitas. Puesto que éste es el caso en cualquier problema real, usaremos en general estas propiedades sin comentario o validación. Observe que, aunque hemos descrito gran parte de este análisis en términos de señales y sistemas continuos, los mismos puntos se aplican en el caso discreto [lo cual debe resultar evidente de la parte (c)].

2.72. Sea que $\delta_\Delta(t)$ denota el pulso rectangular de altura $\frac{1}{\Delta}$ para $0 < t \leq \Delta$. Verifique que

$$\frac{d}{dt}\delta\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}[\delta(t) - \delta(t-\Delta)].$$

2.73. Demuestre por inducción que

$$u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}u(t) \text{ para } k = 1, 2, 3, \ldots$$