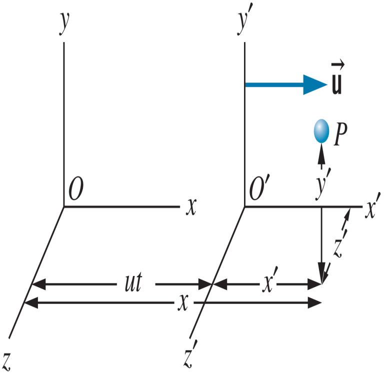
# Teoria de la Relatividad especial

Fernando Barreiro

Universidad Autónoma de Madrid

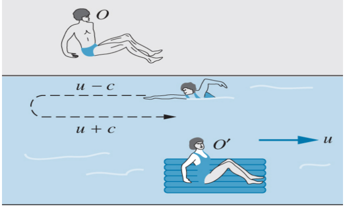
Fundamentos Fisica III

- $t' = t$
- $x' = x - ut$
- $y' = y; z' = z$
- $v'_x = v_x - u \;\; ; \;\; v'_y = v_y \;\; ; \;\; v'_z = v_z$
- $a'_x = a_x \;\; ; \;\; a'_y = a_y \;\; ; \;\; a'_z = a_z$
- $\vec{F} = m\vec{a}$ : leyes mecánica son independientes sistema referencia: P.R.G.



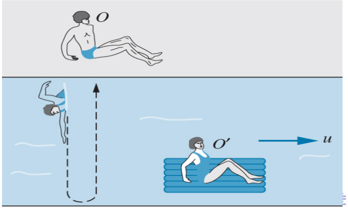
Un nadador es capaz de nadar a velocidad c. Calcular el tiempo que tardaria en nadar una distancia L a favor de la corriente, de velocidad u, y volver al punto de partida. Comparar con el tiempo que tardaria en hacer este camino de ida y vuelta en sentido perpendicular a la corriente.

- Contra: $v'_x = -c \Rightarrow v_x = v'_x + u = u - c \Rightarrow |v_x| = c - u$
- Favor : $v'_x = c \Rightarrow v_x = v'_x + u = c + u$
- $t_{\parallel} = \frac{L}{c+u} + \frac{L}{c-u} = \frac{2Lc}{c^2-u^2} = \frac{2L}{c}\frac{1}{1-u^2/c^2}$

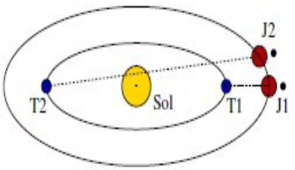



(a)

- $0 = v_x = v'_x + u \Rightarrow v'_x = -u \quad ; v_y = v'_y$
- $c = |v'| \Rightarrow v'_y = \sqrt{c^2 - v'^2_x} = \sqrt{c^2 - u^2}$
- $t_{\perp} = \frac{2L}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$



- Primeras medidas de la velocidad de la luz debidas astrónomo danés O. Roemer en 1675 al observar retraso en las ocultaciones de las lunas de Júpiter de 16 *min* cuando la Tierra se encuentra en T1 y T2 que atribuyó al mayor tiempo que tarda la luz en llegar a esta última posición i.e. $L_0/c$ siendo $L_0$ el diámetro de la órbita terrestre
- $\pi^0 \to \gamma\gamma$ con $\tau_0 = 10^{-16}$ $s$, tiempo de vuelo mide velocidad de los fotones



- Finales s. XIX Maxwell unifica electricidad y magnetismo $\Rightarrow$ ondas e.m. se propagan con velocidad $c$

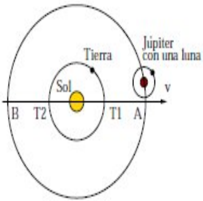
$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 sin(kz - \omega t) \; ; \quad c = \frac{\omega}{k} \tag{1}$$

$$\nabla^2\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_0 sin(kz - \omega t) \; ; \quad c = \frac{\omega}{k} \tag{2}$$

- Nuestra intuición nos dice velocidad propagación de onda depende del medio, ej. sonido
- Hipótesis: 'Eter' medio a través del cual se propagan ondas e.m.
- Propiedades 'eter' conspicuas : muy denso porque c es grande, al mismo tiempo ligero para minimizar fricciones en movimiento planetario
- Puede medirse la velocidad del sistema solar en este medio?

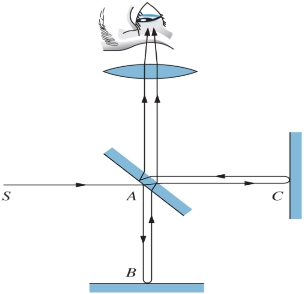
- Periodo de Jupiter 12 veces mayor que el de la Tierra. Maxwell propone medir retraso eclipse lunas Jupiter en A y B.
- $t_A = \frac{L_0}{c-u} \sim \frac{L_0}{c}(1+\beta)$
- $t_B = \frac{L_0}{c+u} \sim \frac{L_0}{c}(1-\beta)$
- $\Delta t = t_A - t_B = \frac{2L_0}{c} \cdot \beta$

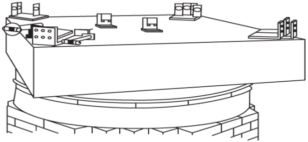
Como $L_0/c \sim 16\ min$ y $\beta \sim 10^{-4}$ resulta $\Delta t \sim 0.1\ s$ demasiado para la época



# El experimento de Michelson-Morley

- $t_1 = \frac{L_1}{c-u} + \frac{L_1}{c+u} = \frac{2L_1/c}{1-\beta^2}$ ; $t_2 = \frac{2L_2/c}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ; $Si \beta << 1 \Rightarrow$
- $\Delta t_0 = t_1 - t_2 = \frac{2L_1}{c}(1+\beta^2) - \frac{2L_2}{c}(1+0.5\beta^2)$ ; $\Delta t_{90} = \frac{2L_1}{c}(1+0.5\beta^2) - \frac{2L_2}{c}(1+\beta^2)$
- $\Delta t_0 - \Delta t_{90} = \frac{(L_1+L_2)u^2}{c^3} ==> \delta = c(\Delta t_0 - \Delta t_{90})/\lambda = \frac{2\beta^2}{\lambda/L}$
- $L = L_1 = L_2 = 1.2m; \beta \sim 10^{-4}; \lambda/L = 5\cdot 10^{-7} ==> \delta = 0.04 | \delta_{exp} = 0.005$



# Postulados de Einstein (1905)

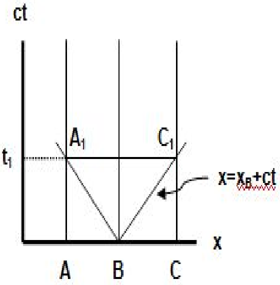
- **Leyes de la Fisica son las mismas en todos los sistemas inerciales**
- **La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales : c**

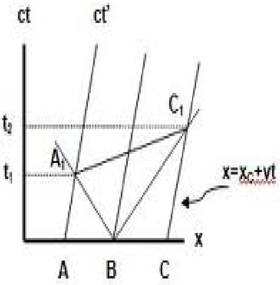
Einstein introduce concepto pragmático de la idea de tiempo asociada a la idea de simultaneidad. Consideremos definición velocidad móvil : $\vec{v} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{t_B - t_A}$

- $t_A$ : lectura reloj en A simultánea con llegada móvil a A
- $t_B$ : lectura reloj en B simultánea con llegada móvil a B
- Pero que entendemos por mismo tiempo en lugares distintos cuando velocidad máxima propagacion es $c$
- Si rayo luz parte a $t = 0$ de A , es reflejado en espejo en B y vuelve a A a tiempo $t_A = t_0$ el reloj en B deberá marcar $t_B = 0.5t_0$ cuando rayo llega a B : sincronización de relojes $\Rightarrow$ **simultaneidad no es absoluta**.

# Relatividad de la simultaneidad

- Tres observadores (A,B,C) equidistantes y en reposo en S. A $t = 0$, B emite haz luminoso en ambos sentidos de OX: $x = x_B + ct$ y $x = x_B - ct$.
- Estas *señales* serán recibidas por A y C en tiempos $(t_C = t_A)$ que resultan de hacer la intersección:
  - $x_C = x_B + ct_C \Rightarrow t_C = \frac{x_C - x_B}{c}$
  - $x_A = x_B - ct_A \Rightarrow t_A = \frac{x_B - x_A}{c}$
- Tres observadores en plataforma que se mueve con velocidad $v$ respecto a S, repiten experimento: recepción **simultánea de las *señales* en S'**
- Sin embargo : **recepción no es simultánea en S**, de hecho $t_A < t_C$ :
  - $x_C + vt_C = x_B + ct_C \Rightarrow t_C = \frac{x_C - x_B}{c - v}$
  - $x_A + vt_A = x_B - ct_A \Rightarrow t_A = \frac{x_B - x_A}{c + v}$



# Transformaciones de Lorentz

S' se mueve con velocidad $u$ respecto a S según eje común $OX = OX'$.
Origenes coinciden a $t = t' = 0$. El eje t', linea universo O', es en S: $x = ut$.

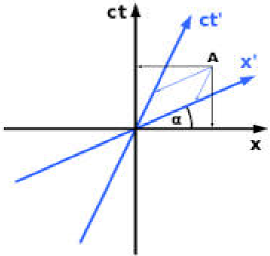
- $x = ax' + bt'$
- $x' = ax - bt$

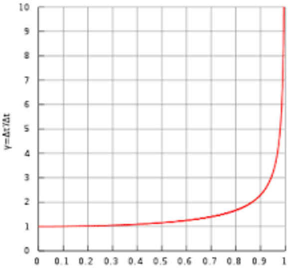
Origen de S visto en S' se obtiene haciendo $x = 0 \Rightarrow x' = -\frac{b}{a}t'$
Origen de S' visto en S se obtiene haciendo $x' = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a}t$
Luego $u = b/a$. Pero ecuación rayo de luz tanto en S o S' es $x = ct, x' = ct'$.

$$ct = act' + bt' = (ac + b)t'; ct' = act - bt = (ac - b)t \qquad (3)$$

$$c^2tt' = (a^2c^2 - b^2)tt' \rightarrow c^2 = a^2(c^2 - b^2/a^2) = a^2(c^2 - u^2) \rightarrow a = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (4)$$

Nótese $\gamma > 1$ y $\gamma = 1 + 0.5 \cdot \beta^2 \;\; ; si \;\; \beta << 1 \;\; L.N.R.$



Hemos obtenido que:

- $x = ax' + bt' = a(x' + ut') = \gamma(x' + ut')$
- $x' = ax - bt = a(x - ut) = \gamma(x - ut)$

Leyes de transformación lineales aseguran que movimiento lineal uniforme en S $\Leftrightarrow$ lo es en S'. Pero

- $1 - \gamma^2 = 1 - \frac{1}{1-\beta^2} = -\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = -\beta^2\gamma^2$

Luego

- $x = \gamma x' + \gamma ut' = \gamma\gamma x - \gamma\gamma ut + \gamma ut'$
- $\gamma ut' = (1 - \gamma^2)x + \gamma^2 ut = -\beta^2\gamma^2 x + \gamma^2 ut$
- $t' = \gamma t - \frac{\beta^2\gamma}{u}x = \gamma(t - \frac{\beta^2}{u}x) = \gamma(t - \frac{\beta}{c}x)$

Análogamente

- $t = \gamma(t' + \frac{\beta}{c}x')$

Nótese que

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \tag{5}$$

En el limite relativista i.e. $\gamma \rightarrow \infty \Rightarrow$

$$\beta \sim 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \tag{6}$$

# Transformaciones de Lorentz: resumen

Sean dos sistemas inerciales S y S', S' se mueve respecto a S con velocidad u a lo largo de $OX \equiv OX'$:

- $x' = \gamma[x - ut]$
- $y' = y \; ; \; z' = z$
- $t' = \gamma[t - (\beta/c)x] \Leftrightarrow t' = \gamma[t - (\beta^2/u)x] \Leftrightarrow t' = \gamma[t - (u/c^2)x]$

A la inversa :

- $x = \gamma[x' + ut']$
- $t = \gamma[t' + (\beta/c)x'] \Leftrightarrow t = \gamma[t' + (\beta^2/u)x'] \Leftrightarrow t = \gamma[t' + (u/c^2)x']$

Observaciones:

- Coordenadas normales a la dirección movimiento relativo son invariantes
- Si $\beta << 1 \Rightarrow \gamma = 1 + 0.5\beta^2 \rightarrow 1 + O(\beta^2)$ y Lorentz se reduce a Galileo i.e.
    - $x' = x - ut$
    - $t' = t$
- Notación matricial: transformaciones Lorentz estructura $\sim$ rotaciones

$$\begin{bmatrix} x' \\ ict' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & i\gamma\beta \\ -i\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ict \end{bmatrix}$$

Si un suceso en S viene dado por las coordenadas (ct,x,y,z) y en S' por (ct',x',y',z') resulta

$$x = \gamma[x' + ut'] \rightarrow x^2 = \gamma^2[x'^2 + u^2t'^2 + 2ux't'] \tag{7}$$

$$t = \gamma[t' + u/c^2x'] \rightarrow c^2t^2 = \gamma^2[c^2t'^2 + u^2/c^2x'^2 + 2ux't'] \tag{8}$$

Restando resulta

$$x^2 - c^2t^2 = \gamma^2[x'^2 - c^2t'^2 + u^2t'^2 - \beta^2x'^2] \tag{9}$$

es decir

$$x^2 - c^2t^2 = \gamma^2[(1-\beta^2)x'^2 - (1-\beta^2)c^2t'^2] = \gamma^2(1-\beta^2)[x'^2 - c^2t'^2] = [x'^2 - c^2t'^2] \tag{10}$$

Es decir si O emite rayo luminoso al cabo de t segundos onda luminosa habrá alcanzado esfera $r^2 = c^2t^2$. En S' lo mismo : $r'^2 = c^2t'^2$. Análogamente puede demostrarse que la ecuación de una onda electromagnética

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{11}$$

es invariante Lorentz y no Galileo.

Dos sistemas inerciales S y S' están en movimiento relativo con velocidad $\beta = 0.5$ a lo largo de OX=OX'. Representar en S' los sucesos $(x_1, ct_1) = (1, 1)$ y $(x_2, ct_2) = (0, 2)$. Representar en S los sucesos $(x_3', ct_3') = (1, 1)$ y $(x_4', ct_4') = (2, 0)$.

Sol. $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.15$

- $x_1' = \gamma(x_1 - ut_1) = \gamma(x_1 - \frac{u}{c}ct_1) = 1.15(1 - \frac{1}{2}) = 0.58$
- $ct_1' = \gamma(ct_1 - \frac{u}{c}x_1) = 1.15(1 - \frac{1}{2}) = 0.58!$

- $x_2' = 1.15(0 - 0.5 \times 2) = -1.15$
- $ct_2' = 1.15(2 - 0.5 \times 0) = 2.3$

- $x_3 = \gamma(x_3' + \frac{u}{c}ct_3') = 1.15(1 + 0.5) = 1.73$
- $ct_3 = \gamma(ct_3' + \frac{u}{c}x_3) = 1.15(1 + 0.5) = 1.73!$

- $x_4 = 1.15(2) = 2.30$
- $ct_4 = 1.15(0.5 \times 2) = 1.15$

- Suceso viene representado por coordenadas espacio-temporales.
- Hipérbola de calibración

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 = 1 \tag{12}$$

muestra que longitud unidad en S no es la misma que en S'.

- Separacion espacio temporal : $\Delta s^2 = (ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2$

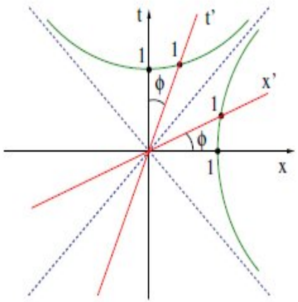



Figura 2.7: Calibrado de los ejes del observador $\mathcal{O}'$.

Separación espacio temporal entre dos sucesos: $\Delta s^2 = (ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2$ puede ser

- $\Delta s^2 = 0 \Rightarrow$ *sucesos conectados por haz luminoso*
- $\Delta s^2 > 0 \Rightarrow \exists S'$ *ambos ocurren mismo lugar* $\Rightarrow$ *intervalo temporal*
- $\Delta s^2 < 0 \Rightarrow$ *intervalo espacial*

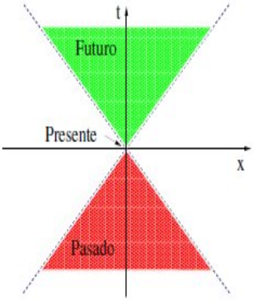
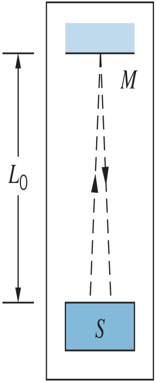


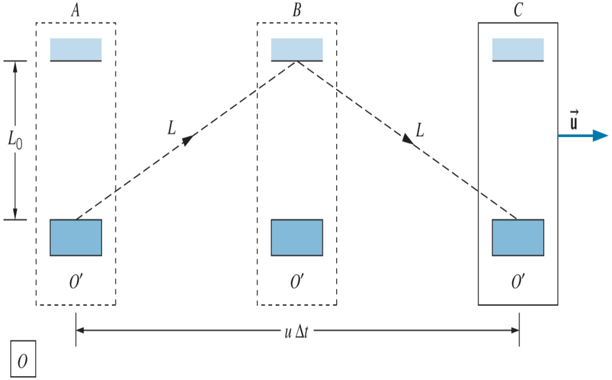

Figura 2.9: Región de sucesos conectados causalmente con el origen.

- Reloj en reposo en $x = x_0$ en sistema S
- Sean dos sucesos registrados en S : $(x_0, t_1)$ ; $(x_0, t_2) \Rightarrow \Delta t = \tau_0 = t_2 - t_1$
- Para un observalor ligado a S' estos dos sucesos ocurren a tiempos
  - $t_1' = \gamma(t_1 - \frac{u}{c^2} x_0)$
  - $t_2' = \gamma(t_2 - \frac{u}{c^2} x_0)$
- Luego : $\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma \Delta t \Rightarrow \tau' = \gamma \tau_{\mathbf{0}}$
- **La diferencia de tiempos entre dos sucesos es minima en el sistema en el que el reloj está en reposo: tiempo propio. En ese sistema ambos sucesos ocurren en el mismo sitio.**

- Sincronización relojes de acuerdo con figura adjunta: $\Delta t_0 = 2L_0/c$
- En sistema reloj está en reposo, su tic tac viene dado por $\Delta t_0$



- Supongamos reloj comienza moverse respecto a O con velocidad $u$ según OX
- Tiempos medidos por O: $\Delta t = 2L/c = \frac{2\sqrt{L_0^2+(u\Delta t/2)^2}}{c} = \frac{2\sqrt{(c\Delta t_0/2)^2+(u\Delta t/2)^2}}{c} \Rightarrow (c\Delta t)^2 = (c\Delta t_0)^2 + (u\Delta t)^2$
- $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma \Delta t_0 \Rightarrow \Delta t > \Delta t_0$



# Ejemplo dilatación temporal

Los muones tienen una vida media propia, i.e. medida en el sistema en que ellos están en reposo, de 2.2 $\mu s$. Se producen como consecuencia de la interacción de los rayos cósmicos con las capas superiores de la atmósfera. La altura de esta es $L_0 = 100\ km$ para un observador terrestre. Cual será la velocidad minima que han de tener los muones para llegar a la superficie de la tierra?

Solución: Si el muón se mueve con velocidad próxima a la de la luz, para un observador ligado a la tierra el tiempo necesario para atravesar 100 km será:

$$\Delta t = \frac{L_0}{c} = \frac{100\ km}{3 \cdot 10^5\ km/s} = 333\ \mu s \tag{13}$$

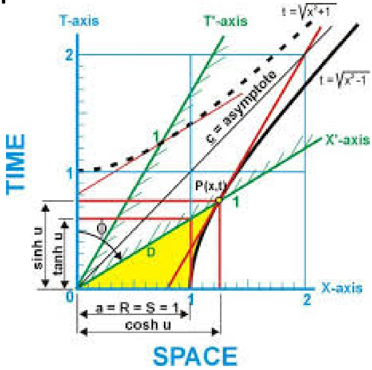
Luego teniendo en cuenta la relación entre intervalos temporales medidos en la tierra y en el sistema del muón:

$$333\ \mu s = \gamma \times 2.2\ \mu s \Rightarrow \gamma = 151 >> 1\ i.e.\ altamente\ relativista \Rightarrow \tag{14}$$

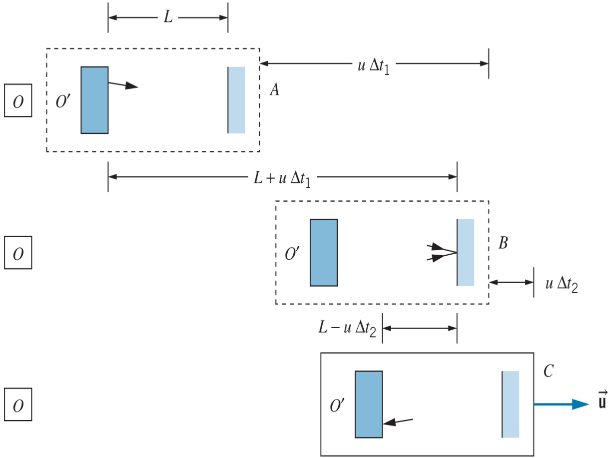
$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \sim 1 - \frac{1}{2\gamma^2} = 1 - \frac{1}{45602} = 0.999978 \tag{15}$$

Si no fuera por la dilatación temporal nunca observariamos muones en la superficie terrestre.

- Sea barra longitud $L_0$ en reposo en sistema S.
- Denotemos por $x_1$ y $x_2$ las posiciones de sus extremos izdo. y dcho.
- En un instante dado $t'$ en S' los extremos de la barra estarán en $(x_1', t')$ ; $(x_2', t')$ de modo que su longitud en S' será $L' = x_2' - x_1'$,
- Pero en S las coordenadas espaciales de estos sucesos vienen dadas por:
  - $x_1 = \gamma(x_1' + ut')$
  - $x_2 = \gamma(x_2' + ut')$
- Luego $x_2 - x_1 = \gamma(x_2' - x_1') \Rightarrow \mathbf{L_0} = \gamma \mathbf{L}'$
- **La longitud de un objeto es máxima en el sistema en que se encuentra en reposo**.



- $c\Delta t_1 = L + u\Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{L}{c-u}$
- $c\Delta t_2 = L - u\Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{L}{c+u}$
- $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c-u} + \frac{L}{c+u} = \frac{2L}{c}\frac{1}{1-u^2/c^2}$
- $\Delta t = \gamma\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{2L}{c}\frac{1}{1-u^2/c^2} \Rightarrow L = L_0\sqrt{1-u^2/c^2} = L_0/\gamma$



Volvamos al ejemplo del muón. Para un observador ligado a él, cual será el espesor de la atmósfera terrestre.

Para un observador que viaja con el muón, la tierra se le acerca con una velocidad $\beta$ y por tanto para él, el espesor de la atmósfera será:

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = 100km \cdot \sqrt{1-0.999978^2} = 0.66 \; km = 660 \; m \tag{16}$$

El tiempo que necesitaria el muón para atravesar este espesor atmosférico será

$$\Delta t_0 = \frac{660 \; m}{3 \times 10^8 m/s} = 2.2 \times 10^{-6} s \sim \tau_0 \tag{17}$$

que es comparable a su vida propia, luego los muones atmosféricos pueden alcanzar la superficie terrestre.

## Ejemplo contracción espacial

Una varilla de longitud propia $L_0$ se mueve con velocidad $\beta = 3/4$ respecto a un observador O en una dirección que forma $37^\circ$ con la varilla. Que longitud tendrá la varilla para O?

Sol. $\beta = 3/4 \Rightarrow \gamma = 4/\sqrt{7}$

- $L'_x = L_0 cos 37^\circ \quad ; \quad L'_y = L_0 sin 37^\circ$
- $L_x = \sqrt{7} L_0 cos 37^\circ / 4 \quad ; \quad L_y = L'_y = L_0 sin 37^\circ$
- $L = \sqrt{(L_x^2 + L_y^2)} = L_0 \frac{\sqrt{7 + 9 sin^2 37^\circ}}{4}$

Un astronauta a 500 km de la tierra presiente que su vida durará no más de 2 *ms* por haberse irradiado inadvertidamente. Que velocidad deberia tener su nave espacial a fin de aterrizar y recibir atención médica?
Sol.

- Punto de vista de un observador terrestre : vida del astronauta se alarga
  - $\tau = \gamma\tau_0 = (2 \times 10^{-3} s)\gamma \Rightarrow u = \frac{D}{\tau} = \frac{D}{\gamma\tau_0} = \sqrt{1-\beta^2} \cdot \frac{500km}{2\times10^{-3}s} = 2.5 \times 10^5 km/s\sqrt{1-\beta^2} = \beta \cdot 3 \times 10^5 km/s$
  - $6.25(1-\beta^2) = 9\beta^2 \Rightarrow \beta = 0.6$
- Punto de vista del astronauta : distancia a la tierra se acorta
  - $D = \frac{500\ km}{\gamma} = 2 \times 10^{-3}\beta c \Rightarrow 250.000(1-\beta^2) = 360.000\beta^2$
  - $25 = 61\beta^2 \Rightarrow \beta = 5/\sqrt{61} = 0.6$

Sean dos sistemas, S y S', el segundo se mueve con velocidad $u$ respecto al primero a lo largo de OX.

- $x = \gamma \cdot [x' + ut'] \Rightarrow dx = \gamma[dx' + udt'] = \gamma[v'_x + u] \cdot dt'$
- $y = y' \Rightarrow dy = dy'$
- $t = \gamma \cdot [t' + (u/c^2)x'] \Rightarrow dt = \gamma[1 + u \cdot v'_x/c^2] \cdot dt'$

Dividiendo las dos primeras ecuaciones por la tercera resulta

- $v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2}$
- $v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + uv'_x/c^2)}$

Y a la inversa

- $v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}$
- $v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}$

Resumiendo

$$\beta_S = \frac{\beta_{S'} + \beta_{S'S}}{1 + \beta_{S'}\beta_{S'S}} \Rightarrow 1 - \beta_S = 1 - \frac{\beta_{S'} + \beta_{S'S}}{1 + \beta_{S'}\beta_{S'S}} = \frac{(1 - \beta_{S'})(1 - \beta_{S'S})}{1 + \beta_{S'}\beta_{S'S}} < 1 \tag{18}$$

Un núcleo radioactivo se mueve con velocidad $0.5c$ en el laboratorio y emite un electrón en su misma dirección de vuelo con velocidad relativa $0.9c$. Determinar la velocidad del electrón en el laboratorio.

Sol.

- $u_{e/L} = \frac{u_{e/N}+u_{N/L}}{1+u_{e/N}u_{N/L}} = \frac{0.5+0.9}{1+0.5\times 0.9} = 0.966$

S' se mueve respecto a S con $\beta = 0.6$ a lo largo de $OX = OX'$. En $t'_1 = 10^{-7}s$ una particula situada en $x'_1 = 10\ m$ comienza a moverse con velocidad constante $-c/3$. En $t'_2 = 3\times 10^{-7}$ se frena súbitamente . Determinar en S la velocidad de la particula y la distancia recorrida.

Sol.

- $\gamma_{S'S} = \frac{1}{0.8} = 1.25$
- $\beta = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} = \frac{0.6-\frac{1}{3}}{1-\frac{0.6}{3}} = \frac{1}{3}$
- En S' $\Delta x' = v\Delta t' = -\frac{c}{3}\cdot 2\times 10^{-7} = -20m \Rightarrow x'_2 = -10\ m$
- $x_1 = \gamma_{SS'}(x'_1 + ut'_1) = 1.25(10+0.6\times 3\times 10^8 m/s\times 10^{-7}s) = 1.25\times 28$
- $x_2 = \gamma_{SS'}(x'_2 + ut'_2) = 1.25(-10+0.6\times 3\times 10^8 m/s\times 3\times 10^{-7}s) = 1.25\times 44$
- $\Delta x = x_2 - x_1 = 20m$ en S.

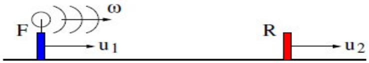
- Fuente emisora acústica en movimiento relativo receptor R
  - velocidad de la fuente F: $u_1$
  - velocidad onda sonora P: $\omega$
  - velocidad del receptor R: $u_2$
- Fuente emite pulso $P_1$ en $t = 0$ y un segundo pulso $P_2$ en $t = \tau$.
- La frecuencia de la *señal* será :$\nu = 1/\tau$ y su longitud de onda $\lambda = \frac{\omega}{\nu}$.
- En $\tau$ el pulso se ha movido $\omega\tau$ y la fuente $u_1\tau$.
- La longitud de onda efectiva para R será : $\lambda' = (\omega - u_1)\tau = \frac{\omega - u_1}{\nu}$.
- R se ha movido $u_2 \cdot \tau$ y velocidad relativa de pulsos respecto a R: $\omega - u_2$.

$$\tau' = \frac{\lambda'}{\omega - u_2} = \frac{\omega - u_1}{\nu(\omega - u_2)} \Rightarrow \nu' = \nu \frac{1 - u_2/\omega}{1 - u_1/\omega} \tag{19}$$

Casos particulares:

$$u_1 = 0, u_2 = u \Rightarrow \nu' = \nu(1 - \beta) \; ; \; u_1 = -u, u_2 = 0 \Rightarrow \nu' = \frac{\nu}{1 + \beta} \tag{20}$$

Observación : Pasar de un caso a otro no se traduce en simplemente cambiar el signo de $\beta$ como deberia. Además el efecto es **lineal**.

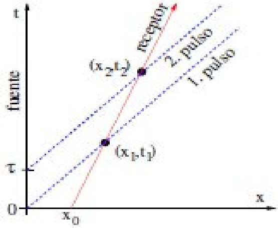


- Fuente emisora luminosa O en origen sistema inercial S
- Observador ligado a S' se mueve respecto a O con velocidad u
- A $t = 0$ comienzan pulsos frecuencia $\nu$ en S cuando observador en $x = x_0$

$$x_1 = ct_1 = x_0 + ut_1 \quad ; \quad x_2 = c(t_2 - \tau) = x_0 + ut_2 \quad ; \quad t_2 - t_1 = \frac{c\tau}{c-u} \qquad (21)$$

$$x_2 - x_1 = u(t_2 - t_1) = \frac{uc\tau}{c-u} \qquad (22)$$

$$\tau' = \gamma[\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x] = \gamma[\frac{c\tau}{c-u} - \frac{u}{c^2}\frac{uc\tau}{c-u}] = \frac{\gamma c\tau}{c-u}(1-\beta^2) = \gamma\tau(1+\beta) \quad (23)$$



- $\tau' = \tau(\frac{1+\beta}{1-\beta})^{\frac{1}{2}}$
- $\nu' = \nu(\frac{1-\beta}{1+\beta})^{\frac{1}{2}}$
- $\lambda' = \lambda(\frac{1+\beta}{1-\beta})^{\frac{1}{2}}$
- $\beta = \frac{r^2-1}{r^2+1}$ con $r = \frac{\lambda'}{\lambda}$
- Efecto es simétrico en $\beta$ y en el L.N.R. tiene un término cuadrático : $\lambda' = \lambda\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \sim \lambda(1+\beta+\frac{1}{2}\beta^2)$

Ejemplo: La linea correspondiente al Ca en el espectro de la estrella $\alpha$-Centauro posee una longitud de onda de $\lambda' = 3968,20\mathring{A}$. La misma linea en el espectro solar se encuentra a $\lambda = 3968,49\mathring{A}$. Determinar la velocidad con que se aleja la $\alpha$-Centauro del sistema solar.

Sol:

- $r^2 = 1.00014 \Rightarrow \beta = 0.00014/2 = 7\cdot 10^{-5} \Rightarrow u = 21 km/s.$

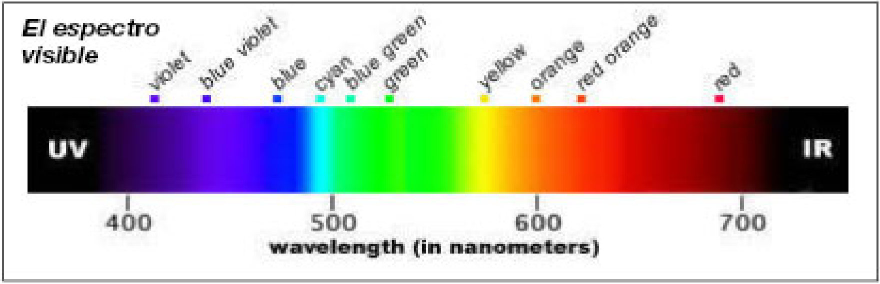
El quasar $3C - 9$ cuando emitió luz que acaba de llegar a la tierra se alejaba de nosotros con velocidad $0.8c$. Una de las lineas de su espectro se observa a una longitud de onda de $1200\mathring{A}$ con una fuente estacionaria. A que longitud de onda debe aparecer en el espectro observado del quasar. Si la vida propia del quasar es $10^6$ *años*, durante que intervalo de tiempo se recibira radiación de él.
Sol.

- $\lambda' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cdot \lambda = \sqrt{\frac{1.0+0.8}{1.0-0.8}} \cdot 1200\ \mathring{A} = 3600\ \mathring{A}$
- $\tau = \gamma\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{1.0-0.64}} 10^6 años \sim 2 \times 10^6 años$

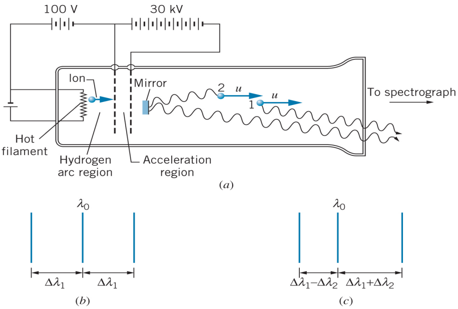
Un astronauta se aleja de la tierra con una aceleración de $10\ m/s^2$. Determinar el tiempo que ha de pasar para que el resplandor del distrito rojo de Amsterdam se le haga invisible. Tomemos $\lambda_{rojo} = 6000\ \mathring{A}$.
Sol.: Supongamos que $\lambda' = 7000\ \mathring{A}$ es ya invisible. Entonces
$r = \lambda'/\lambda_{rojo} = 7/6 \Rightarrow r^2 = 1.35$

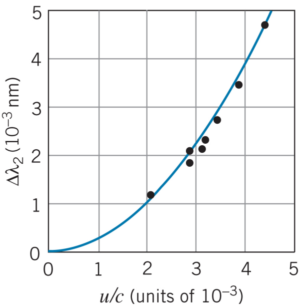
- $\beta = \frac{r^2-1}{r^2+1} = \frac{0.35}{2.35} = 0.15$
- $n \times 24 \times 3.600s \times 10m/s^2 = 0.15 \times 3 \times 10^8 m/s \Rightarrow n = 50dias$

# Espectro visible



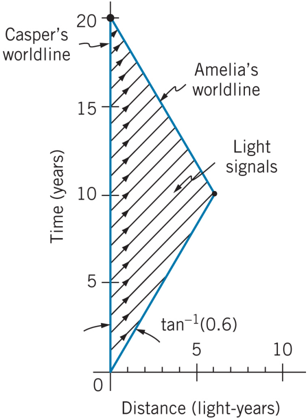
- Ives y Stilwell, 1938, miden longitud onda emisión átomos de hidrogeno en reposo y en movimiento, ver figura adjunta
- McArthur et al., 1986: Absorción de luz laser ultravioleta por átomos hidrógeno en reposo y con energia cinética de 800 MeV, $\beta = 0.84$, confirman efecto Doppler relativista con precisión $3 \times 10^{-4}$



Gaspar queda en tierra mientras su hermana gemela Amelia parte con velocidad $\beta = 0.6$ hacia un planeta que para Gaspar se encuentra a 6 *años* luz de la Tierra. **Gaspar** estima que Amelia tardará $\mathbf{10 + 10 = 20}$ **años** en volver.

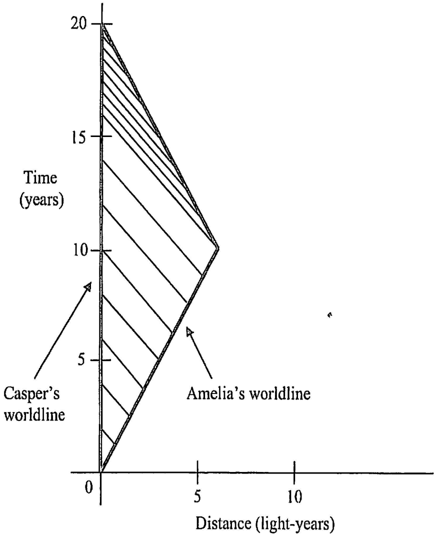
- Para Amelia la distancia al planeta se verá **contraida** por un factor $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \beta^2} = 0.8$, i. e. 4.8 *años* luz i.e. 8 *años* a una velocidad $0.6c$
- **Amelia** verá que tarda en hacer el viaje de ida y vuelta **16 años**
- Gaspar habrá envejecido 20 *años*



- Amelia podria pensar que es Gaspar el que se aleja para luego volver y por tanto seria ella la más vieja. Paradoja?
- No. Amelia tiene que cambiar de sistema de referencia para su viaje de vuelta. La situación no es simétrica.
- Gaspar envia a Amelia una *señal* luminosa cada dia que **él cumple** *años*
- La frecuencia de esta *señal*, **vista por Amelia** se verá desplazada Doppler
- Durante su viaje de ida Amelia recibirá noticias de Gaspar con una frecuencia $\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \sqrt{\frac{0.4}{1.6}} = 0.5$ *señales* por *año* $\Rightarrow$ **4 señales**
- Durante su viaje de vuelta Amelia recibirá noticias de Gaspar con una frecuencia $\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \sqrt{\frac{1.6}{0.4}} = 2.0$ *señales* por *año* $\Rightarrow$ **16 señales**
- Amelia recibirá 20 *señales* y sabrá que Gaspar ha envejecido cuatro *años* más que ella

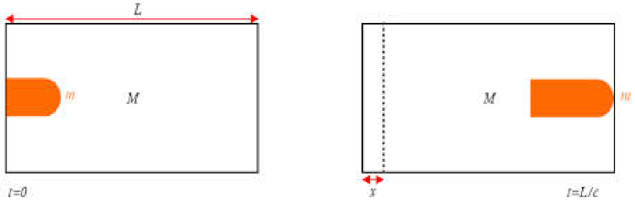
- Supongamos ahora que es Amelia quien, con un reloj idéntico al de Gaspar, quiere enviarle un mensaje anual a su hermano. Amelia enviará **8 mensajes en su viaje de ida y otros 8 en su viaje de vuelta**.
- Como en la discusión anterior, Gaspar recibirá estos mensajes con una frecuencia de $0.5/año$ en la ida y $2/año$ en la vuelta debido a su desplazamiento Doppler.
- Gaspar estimará que el viaje de ida de Amelia ha durado 16 *años* terrestres pues los ocho primeros mensajes de Amelia le llegarán a Gaspar con la frecuencia de $0.5/año$ i.e. un mensaje por cada **dos años terrestres**
- Los ocho mensajes del viaje de vuelta de Amelia, Gaspar los recibirá a razón de $2/año$, luego Gaspar pensará que el viaje de vuelta duró solo cuatro *años* terrestres
- Resumiendo, Gaspar comprueba que el viaje de ida y vuelta ha durado 20 *años* terrestres
- Pero Gaspar ha recibido **16 mensajes** y concluye por tanto que su hermana ha envejecido **16 años**
- Prueba experimental : J.C. Hafele - R. Keating 1971

- La figura adjunta ilustra en Minkowski los mensajes de Amelia a su hermano.



# Equivalencia masa y energia

- 'Gedanken Experiment': pared izquierda caja en reposo aislada y de masa M emite flash de luz portador de un momento $E/c$
- La luz es absorbida por la pared derecha, luego para conservar momento la caja deberia retroceder con $v = -E/Mc$
- Como $\Delta t = L/c \Rightarrow \Delta x = v\Delta t = -EL/Mc^2$
- Como caja está aislada y no pensamos que retroceda postulamos que la radiación es portadora masa m tal que $mL + M\Delta x = 0$
- De aqui se deduce $E = mc^2$



- Fotones $E = h\nu$ y $E = c \cdot p$ de acuerdo con multitud datos experimentales
- Equivalencia masa y energia : $p + D \rightarrow^3 He + \gamma$
- $\Delta M = 9.8 \cdot 10^{-30} kg \Rightarrow E = \Delta M \cdot c^2 = 9.8 \cdot 10^{-30} kg \times 9 \cdot 10^{16} m^2/s^2 = 8.8 \cdot 10^{-13}\ J = 5.5\ MeV$
- Cantidades que transforman bajo Lorentz como $(ct, \vec{r}) \equiv$ cuadrivector
- Cuadrivector energia-momento particula en reposo $(m_0 c^2; 0, 0, 0)$
- Cuadrivector energia-momento particulas masa reposo $m_0$ y velocidad $\vec{v}$: $(\gamma m_0 c^2; \gamma m_0 \vec{v})$
  - $\beta = \frac{c|\vec{p}|}{E}$ y $\gamma = \frac{E}{m_0 \cdot c^2} \Rightarrow en\ unidades\ naturales : \beta = \frac{|\vec{p}|}{E}$ y $\gamma = \frac{E}{m_0}$
- Cuadrivector energia-momento para particulas masa en reposo nula: $(cp; \vec{p})$
- el cuadrimomento transforma como un cuadrivector bajo Lorentz y la cantidad $E^2 - c^2|\vec{p}|^2 = m_0^2 c^4$ es invariante.
- En unidades naturales, i.e. $c = 1$, $[E] = GeV, [p] = GeV/c.[m] = GeV/c^2$ y se tiene $E^2 = |\vec{p}|^2 + m_0^2$

Si $(E, \vec{p})$ es cuadrivector energia-impulso en S y S' se mueve con respecto a S con u según $OX \equiv OX'$

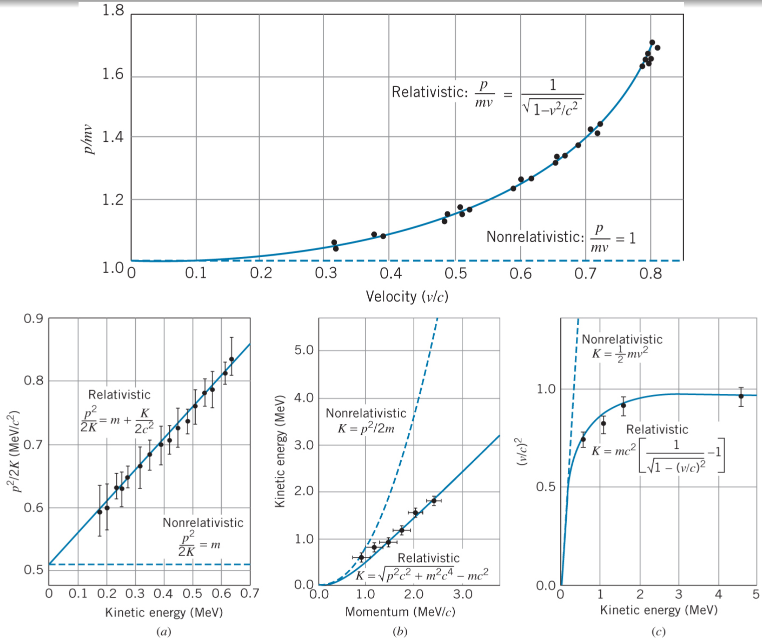
- $E' = \gamma[E - up_x]$
- $p'_x = \gamma[p_x - \frac{u}{c^2}E]$
- $p'_y = p_y \;;\; p'_z = p_z$

A la inversa

- $E = \gamma[E' + up'_x]$
- $p_x = \gamma[p'_x + \frac{u}{c^2}E']$

Ejemplo: Supongamos que una particula se mueve respecto a S con velocidad u según OX, determinar su cuadrivector energia-momento en S.

- En S', sistema en que la particula está en reposo, su cuadrivector será $\mathbf{p}' = (m_0c^2; 0, 0, 0)$. Luego en S aplicando ecuaciones anteriores
- $E = \gamma[E' + up'_x] = \gamma m_0 c^2$
- $p_x = \gamma[p'_x + (u/c^2)E'] = \gamma m_0 u \Rightarrow cp_x = \gamma\beta m_0 c^2$
- $p'_y = 0 \;;\; p'_z = 0$
- $\mathbf{p}^2 = E^2 - (c\vec{p})^2 = \gamma^2 m_0^2 c^2(c^2 - u^2) = \gamma^2 m_0^2 c^4(1 - \beta^2) = m_0^2 c^4$


1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
p/mv
Relativistic: $\frac{p}{mv} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
Nonrelativistic: $\frac{p}{mv} = 1$
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
Velocity (v/c)
$p^2/2K$ (MeV/$c^2$)
Relativistic
$\frac{p^2}{2K} = m + \frac{K}{2c^2}$
Nonrelativistic
$\frac{p^2}{2K} = m$
Kinetic energy (MeV)
(a)
Kinetic energy (MeV)
Nonrelativistic
$K = p^2/2m$
Relativistic
$K = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$
Momentum (MeV/c)
(b)
$(v/c)^2$
Nonrelativistic
$K = \frac{1}{2}mv^2$
Relativistic
$K = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right]$
Kinetic energy (MeV)
(c)

Dos fotones de energias 200 $MeV$ y 100 $MeV$ se mueven según los ejes OX y OY respectivamente. Determinar: i) la energia total del sistema ii) la cantidad de movimiento iii) su masa invariante iv) su velocidad en magnitud y dirección.
Solución: Escribimos los cuadrivectores de ambos fotones y sumamos para obtener el cuadrimomento total en unidades naturales:

$$\mathbf{p_1} = (200; 200, 0, 0); \mathbf{p_2} = (100; 0, 100, 0) \rightarrow \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} = (300; 200, 100, 0) \quad (24)$$

- $E = 300 \ MeV$
- $\vec{p} = (200, 100, 0) \Rightarrow |\vec{p}| = \sqrt{5} \cdot 10^2 \ MeV/c = 224 \ MeV/c$
- $m_0^2 = (9 - 4 - 1) \cdot 10^4 \ MeV^2/c^4 \Rightarrow m_0 = 200 \ MeV/c^2$
- $tan \ \theta = 100/200 = 0.5 \Rightarrow \theta = arc \ tan \ 0.5$
- $\beta = \frac{|\vec{p}|}{E} = \frac{224}{300} = 0.745$

Un electrón de masa en reposo $m_e = 0.511\ MeV/c^2$ se mueve con velocidad $v = 0.8\ c$. Determinar en el laboratorio su energia total, cinética y $|\vec{p}|$

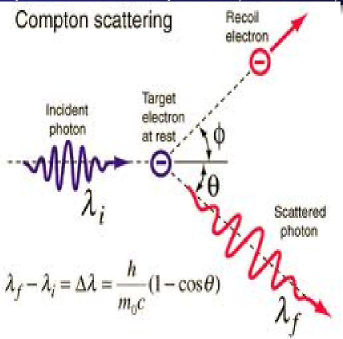
Solución: Utilizamos unidades naturales:

- $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} = (1.-0.64)^{-1/2} = \frac{1}{0.6}$
- $E = \gamma m_e = \frac{0.511\ MeV}{0.6} = 0.852\ MeV$
- $E_{kin} = (0.852 - 0.511)\ MeV$
- $|\vec{p}| = \beta E = 0.8 \times 0.852 = 0.680\ MeV/c$
- O tambien: $|\vec{p}| = \sqrt{E^2 - m^2} = \sqrt{0.852^2 - 0.511^2} = 0.680\ MeV/c$

Un rayo-X de energia 0.3 $MeV$ colisiona con un electrón en reposo. El fotón sale rebotado hacia atrás. Determinar la velocidad y dirección del electrón después del choque. Tomar $m_e = 0.5\ MeV/c^2$.

Sol.: Utilizamos unidades naturales

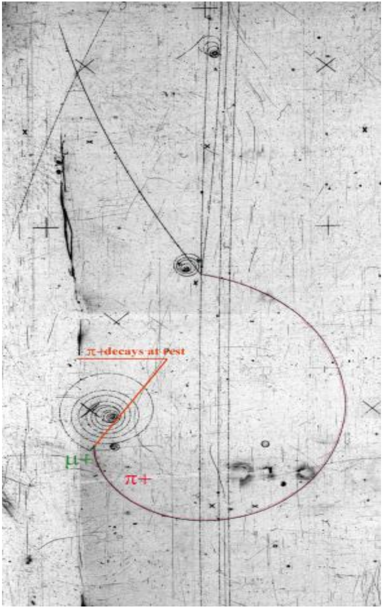
- Antes de la colisión :$\mathbf{p}_\gamma = (0.3; 0, 0, 0.3)$ ; $\mathbf{p_e} = (0.5; 0, 0, 0)$
- Después de la colisión : $\mathbf{p}'_\gamma = (E'_\gamma; 0, 0, -E'_\gamma)$ ; $\mathbf{p}'_\mathbf{e} = (E'_e; 0, 0, \sqrt{E_e'^2 - 0.25})$
- Conservación energia : $0.8 = E'_\gamma + E'_e$
- Conservación impulso en OZ :$0.3 = -E'_\gamma + \sqrt{E_e'^2 - 0.25}$
- Sumando: $1.1 = E'_e + \sqrt{E_e'^2 - m_e^2} \Rightarrow E'_e = 0.66\ MeV$
- Entonces $\gamma_e = \frac{0.66}{0.5} = 1.32 = (1-\beta_e^2)^{-1/2} \Rightarrow \beta_e = 0.65$




- Energia: $Q_0 + m_0 c^2 = E + Q$ ; Impulso: $\vec{n}_0 Q_0/c = \vec{n}Q/c + \vec{p}$
- $(Q_0 - Q) + m_0 c^2 = E \Rightarrow (Q_0 - Q)^2 + m_0^2 c^4 + 2(Q_0 - Q) m_0 c^2 = E^2$
- $\vec{n}_0 Q_0 - \vec{n}Q = c\vec{p} \Rightarrow Q_0^2 + Q^2 - 2QQ_0 cos\theta = c^2 p^2 \Rightarrow (restando)$
- $-2QQ_0 + 2(Q_0 - Q) m_0 c^2 + m_0^2 c^4 + 2QQ_0 cos\theta = m_0^2 c^4$
- $2QQ_0(1 - cos\theta) = 2(Q_0 - Q) m_0 c^2 \Rightarrow \frac{1 - cos\theta}{m_0 c^2} = \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0}$
- $Q = h\nu = hc/\lambda_f$ ; $Q_0 = hc/\lambda_i \Rightarrow \lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{m_0 c}(1 - cos\theta)$
- $\frac{h}{m_0 c} = 2.43 \times 10^{-12}\ m \equiv$ longitud de onda Compton del electrón.

Consideremos el problema en el sistema centro de masas (CM) en el que los protones iniciales tienen impulsos iguales pero en sentidos opuestos según OZ. El umbral ocurrirá en la situación en que los protones y el $\pi^0$ en el estado final se encuentran en reposo. Datos $m_p = 0.94 GeV/c^2 \sim m_n$, $m_{\pi^+} = 0.14\ GeV/c^2$

- $\mathbf{p_1} = (\gamma_{CM} m_p; 0, 0, \gamma_{CM}\beta_{CM} m_p)$
- $\mathbf{p_2} = (\gamma_{CM} m_p; 0, 0, -\gamma_{CM}\beta_{CM} m_p)$
- Suma cuadrimomentos estado final $\mathbf{p_{final}} = (2m_p + m_{\pi^0}; 0, 0, 0)$
- Conservación energia : $2m_p + m_{\pi^0} = 2\gamma_{CM} m_p \Rightarrow \gamma_{CM} = 1 + \frac{m_{\pi^0}}{2m_p} = 1.074$
- $\gamma_{CM} = 1.074 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{CM}^2}} \Rightarrow \beta_{CM} = 0.37 \Rightarrow \beta_{CM}^{beam} = 0.37$ ; $\beta_{CM}^{target} = -0.37$
- En el laboratorio (LAB) uno de los protones se encuentra en reposo, blanco, el otro, proyectil, tendrá energia cinética no nula, $\beta_{CM,LAB} = \beta_{CM}$.
- Si $\beta_{LAB}^{beam}$ = velocidad protón proyectil en el LAB:
  $\beta_{LAB}^{beam} = \frac{\beta_{CM}^{beam} + \beta_{CM,LAB}}{1+\beta_{CM}^{beam}(\beta_{CM,LAB})} = \frac{2\beta_{CM}}{1+\beta_{CM}^2} = \frac{2\times 0.37}{1+0.37^2} = 0.65$
- $\gamma_{LAB} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{LAB}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.65^2}} = 1.31 \Rightarrow E_{kin} = 0.31 m_p = 290\ MeV$
- La velocidad del protón blanco será : $\beta_{LAB}^{target} = \frac{-\beta_{CM} + (\beta_{CM,LAB})}{1-\beta_{CM}(\beta_{CM,LAB})} = 0$

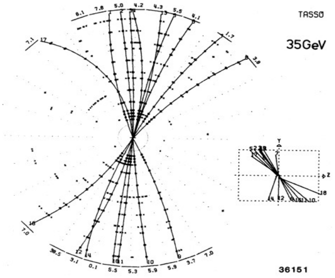

π+decays at rest
μ+
π+

Consideremos el problema de nuevo en el sistema centro de masas (CM). Como en el caso anterior el umbral ocurrirá en la situación en que los tres $p$'s y el $\bar{p}$ en el estado final se encuentran en reposo. Dato $m_p = 0.94 GeV/c^2$.

- $\mathbf{p_1} = (\gamma_{CM} m_p; 0, 0, \gamma_{CM}\beta_{CM} m_p)$
- $\mathbf{p_2} = (\gamma_{CM} m_p; 0, 0, -\gamma_{CM}\beta_{CM} m_p)$
- Suma cuadrimomentos estado final $\mathbf{p_{final}} = (4m_p; 0, 0, 0)$
- Conservación energia : $4m_p = 2\gamma_{CM} m_p \Rightarrow \gamma_{CM} = 2$
- $\gamma_{CM} = 2.0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{CM}^2}} \Rightarrow \beta_{CM} = 0.865 \Rightarrow \beta_{CM}^{beam} = 0.865$ ; $\beta_{CM}^{target} = -0.865$
- En el laboratorio (LAB) $\beta_{LAB}^{beam} = \frac{2\beta_{CM}}{1+\beta_{CM}^2} = \frac{2\times 0.865}{1+0.865^2} = 0.9885$
- $\gamma_{LAB} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{LAB}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.9885^2}} = 7.0 \Rightarrow E_{kin} = 6.0m_p = 5.64\ GeV$
- El Bevatrón en LBL fué construido con el requisito de descubrir el $\bar{p}$ . Emilio Segre y Owen Chamberlain, 1955

- Denotemos por s la energia en el c.m. al cuadrado de una colisión
- En el laboratorio : $s = (\mathbf{p_{beam}} + \mathbf{p_{target}})^2 = 2E_{beam} \cdot m_{target}$ en L.R.
- Si $CM \equiv LAB$ : $s = (\mathbf{p_{beam}} + \mathbf{p_{target}})^2 = (2E_{beam}; 0, 0, 0)^2 = 4E_{beam}^2$ ya que $\mathbf{p_{beam}} = (E_{beam}; 0, 0, p_{beam})$ y $\mathbf{p_{target}} = (E_{beam}; 0, 0, -p_{beam})$

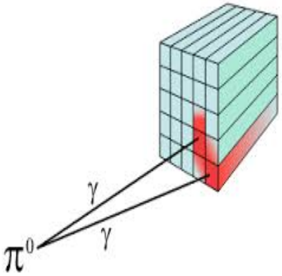

# Conservación energia-momento en $e^+e^- \to q\bar{q}$ y $e^+e^- \to q\bar{q}g$



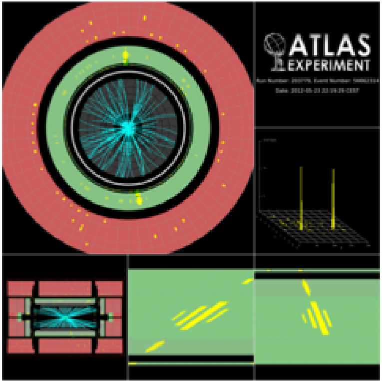

El $\pi^0 \to \gamma\gamma$ con $\tau_0 = 10^{-16}$ $s$. Consideremos el caso en que los dos fotones tuvieran la misma energia. Determinar el ángulo entre ellos como función de la energia del $\pi^0$.

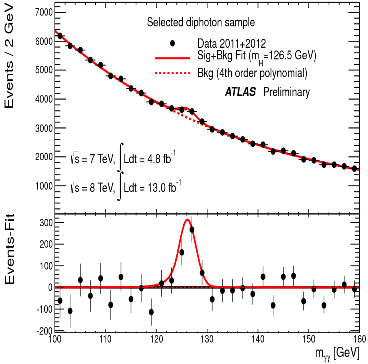
Supongamos que el $\pi^0$ vuela en la dirección del eje OZ con velocidad $\beta$.

- El cuadrimomento del $\pi^0$ sera: $(\gamma m_\pi; 0, 0, \beta\gamma m_\pi)$
- El del primer fotón será : $(0.5\gamma m_\pi; 0, 0.5\gamma m_\pi sin\theta, 0.5\gamma m_\pi cos\theta)$
- El del segundo fotón será : $(0.5\gamma m_\pi; 0, -0.5\gamma m_\pi sin\theta, 0.5\gamma m_\pi cos\theta)$
- Conservación impulso OZ: $\beta\gamma m_\pi = \gamma m_\pi cos\theta \Rightarrow cos\theta = \beta$
- L.N.R. : $\beta \to 0 \Rightarrow \theta \to \pi/2$
- $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{sin\theta}$
- L.R. :$\gamma >> 1 \Rightarrow \theta \sim 1/\gamma \to 0$



- Un modo de desintegración del bosón de Higgs es $H^0 \to \gamma\gamma$. Como $m_H \sim 1000 m_{\pi^0}$, los Higgses producidos en el LHC no son muy energéticos y el ángulo entre los dos fotones del Higgs es grande pero el fondo de $\pi^0 \to \gamma\gamma$ importante.
- Figura adjunta muestra un suceso candidato a $H^0 \to \gamma\gamma$, izda, asi como la distribución en la masa invariante de los dos fotones, dcha.



Consideremos otra vez la desintegración del $\pi^0 \to \gamma\gamma$ de modo que en el c.m. los fotones tienen la misma linea de vuelo que el $\pi^0$ en el laboratorio. Tomemos esta según OZ. Recordemos que si $\beta$ es la velocidad del $\pi^0$ en el laboratorio y por tanto $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$

$$E_{LAB} = \gamma[E_{CM} + \beta p^{\parallel}_{CM}] \ ; \ p^{\parallel}_{LAB} = \gamma[p^{\parallel}_{CM} + \beta E_{CM}] \ ; \ p^{\perp}_{LAB} = p^{\perp}_{CM} \qquad (25)$$

- Sistema c.m.
  - $\mathbf{p}_{\pi^0} = (m_{\pi^0}; 0, 0, 0)$
  - $\mathbf{p}_{\gamma_1} = (0.5 m_{\pi^0}; 0, 0, +0.5 m_{\pi^0})$
  - $\mathbf{p}_{\gamma_2} = (0.5 m_{\pi^0}; 0, 0, -0.5 m_{\pi^0})$
- Sistema laboratorio : transformamos Lorentz
  - $E_{\pi^0} = \gamma m_{\pi^0}; p_{\pi^0} = \gamma\beta m_{\pi^0} \Rightarrow \mathbf{p}_{\pi^0} = (\gamma m_{\pi^0}; 0, 0, \gamma\beta m_{\pi^0})$
  - $E_{\gamma 1} = \gamma[0.5 m_{\pi^0} + \beta \cdot 0.5 m_{\pi^0}]; p_{\gamma 1} = \gamma[+0.5 m_{\pi^0} + \beta \cdot 0.5 m_{\pi^0}] \Rightarrow \mathbf{p}_{\gamma_1} = \gamma(1+\beta)\frac{m_{\pi^0}}{2}(1; 0, 0, +1) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\frac{m_{\pi^0}}{2}(1; 0, 0, +1)$
  - $E_{\gamma 2} = \gamma[0.5 m_{\pi^0} - \beta \cdot 0.5 m_{\pi^0}]; p_{\gamma 2} = \gamma[-0.5 m_{\pi^0} + \beta \cdot 0.5 m_{\pi^0}] \Rightarrow \mathbf{p}_{\gamma_2} = \gamma(1-\beta)\frac{m_{\pi^0}}{2}(1; 0, 0, -1) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\frac{m_{\pi^0}}{2}(1; 0, 0, -1)$
  - El primer fotón es mucho más energético que el segundo en el laboratorio

Consideremos una variación al ejercicio anterior de modo que en el c.m. los fotones sean emitidos en la dirección normal a la linea de vuelo del $\pi^0$ en el laboratorio. Tomemos esta según OZ. Recordemos que :

$$E_{LAB} = \gamma[E_{CM} + \beta p^{\parallel}_{CM}] \ ; \ p^{\parallel}_{LAB} = \gamma[p^{\parallel}_{CM} + \beta E_{CM}] \ ; \ p^{\perp}_{LAB} = p^{\perp}_{CM} \tag{26}$$

- Sistema c.m.
  - $\mathbf{p}_{\pi^0} = (m_{\pi^0}; 0, 0, 0)$
  - $\mathbf{p}_{\gamma_1} = (0.5m_{\pi^0}; +0.5m_{\pi^0}, 0, 0)$
  - $\mathbf{p}_{\gamma_2} = (0.5m_{\pi^0}; -0.5m_{\pi^0}, 0, 0)$
- Sistema laboratorio : transformamos Lorentz
  - $E_{\pi^0} = \gamma m_{\pi^0} \ ; \ p_{\pi^0} = \gamma\beta m_{\pi^0} \Rightarrow \mathbf{p}_{\pi^0} = m_{\pi^0}(\gamma; 0, 0, \gamma\beta)$
  - $E_{\gamma_1} = \gamma[0.5m_{\pi^0}] \ ; \ p^{\parallel}_{\gamma_1} = \gamma[\beta \cdot 0.5m_{\pi^0}] \Rightarrow \mathbf{p}_{\gamma_1} = \frac{m_{\pi^0}}{2}(\gamma; +1, 0, \gamma\beta)$
  - $E_{\gamma_2} = \gamma[0.5m_{\pi^0}] \ ; \ p^{\parallel}_{\gamma_2} = \gamma[\beta \cdot 0.5m_{\pi^0}] \Rightarrow \mathbf{p}_{\gamma_2} = \frac{m_{\pi^0}}{2}(\gamma; -1, 0, \gamma\beta)$
  - $\mathbf{p}_{\pi^0}$ es buen cuadrimomento porque $\gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = 1$
  - $\mathbf{p}_{\gamma_i}$ con $i = 1, 2$ son buenos cuadrimomentos para fotones porque $\gamma^2 - 1 - \gamma^2\beta^2 = \gamma^2(1-\beta^2) - 1 = 1 - 1 = 0$
  - Los dos fotones son igual de energéticos en el laboratorio.

Una particula de masa en reposo $M_0$ se desintegra en tres idénticas de masa en reposo $m_0$. La primera se mueve según -OX con velocidad $\beta_1 = 4/5$, la segunda según -OY con velocidad $\beta_2 = 3/5$. Determinar la velocidad y dirección de la tercera. Determinar $M_0$.

- Cuadrimomento inicial $\mathbf{p_i} = (M_0; 0, 0, 0)$
- $\gamma_1 = (1 - (16/25))^{-1/2} = 5/3 \Rightarrow \mathbf{p_1} = (\gamma_1 m_0; -\gamma_1\beta_1 m_0, 0, 0) = [(5/3)m_0; -(4/3)m_0, 0, 0]$
- $\gamma_2 = (1 - (9/25))^{-1/2} = 5/4 \Rightarrow \mathbf{p_2} = (\gamma_2 m_0; 0, -\gamma_2\beta_2 m_0, 0) = [(5/4)m_0; 0, -(3/4)m_0, 0]$
- $\mathbf{p_3} = (\gamma_3 m_0; \gamma_3\beta_3 m_0 cos\ \theta, \gamma_3\beta_3 m_0 sin\ \theta, 0)$
- Conservación impulso según OX : $(4/3)m_0 = \gamma_3\beta_3 m_0 cos\ \theta$
- Conservación impulso según OY : $(3/4)m_0 = \gamma_3\beta_3 m_0 sin\ \theta$
- Dividiendo dos últimas ecuaciones : $tan\ \theta = \frac{3/4}{4/3} = \frac{9}{16} \Rightarrow \theta = tan^{-1}(9/16)$
- Sumando cuadrados:
  $\gamma_3^2\beta_3^2 = \frac{\beta_3^2}{1-\beta_3^2} = (16/9) + (9/16) = \frac{337}{144} = 2.34 \Rightarrow \beta_3 = 0.836\ ;\ \gamma_3 = 1.8$
- Conservación energia: $M_0 = (5/3)m_0 + (5/4)m_0 + 1.8m_0 = 4.71m_0$

Las componentes del cuadripotencial vector $A_\mu = (A_0, \vec{A}) = (\Phi, \vec{A})$ transforman como:

- $\Phi' = \gamma(\Phi - uA_{\|})$
- $A'_{\|} = \gamma(A_{\|} - \frac{u}{c^2}\Phi)$
- $A'_{\perp} = A_{\perp}$

De donde se deducen las siguientes leyes de transformación para los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$:

- $\vec{E}'_{\|} = \vec{E}_{\|}$
- $\vec{B}'_{\|} = \vec{B}_{\|}$
- $\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{u} \times \vec{B})$
- $\vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{u} \times \vec{E})$

Es fácil probar que

- $\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E}' \cdot \vec{B}'$
- $E^2 - B^2 = E'^2 - B'^2$

NOTA : Por $\|$ ($\perp$) denotamos las componentes de un vector, $\vec{A} - \vec{E} - \vec{B}$, en una dirección paralela (resp. normal) a la dirección del movimiento relativo entre los dos sistemas referencia.

- $E'_x = E_x$
- $E'_y = \gamma(E_y - uB_z)$
- $E'_z = \gamma(E_z - uB_y)$
- $B'_x = B_x$
- $B'_y = \gamma(B_y + \frac{u}{c^2} E_z)$
- $B'_z = \gamma(B_z - \frac{u}{c^2} E_y)$
- Si $\vec{B'} = 0$ *en* $S' \Rightarrow \vec{B} = \vec{u} \times \vec{E}$
- Si $\vec{E'} = 0$ *en* $S' \Rightarrow \vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B}$
- Si $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son normales en un sistema de referencia, entonces debe existir otro en que el campo sea puramente eléctrico o puramente magnético

- Galileo : $x' = x - ut \quad ; \quad v_x' = v_x - u \quad ; \quad a_x' = a_x \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad t' = t$
- Postulados Einstein: Leyes de la Fisica iguales en cualquier sistema inercial. La velocidad de la luz es constante en todos ellos
- Transformación Lorentz:
  $x' = \gamma(x - ut) \quad ; \quad ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad ; y' = y \quad ; \quad z' = z$
- Dilatación temporal : $\tau = \gamma\tau_0$ con $\tau_0 =$ tiempo propio
- Contracción longitdes: $L = L_0/\gamma$ con $L_0 =$ longitud propia
- Ley adicion velocidades : $v_x = \frac{v_x' + u}{1 + \frac{v_x' \cdot u}{c^2}}$
- Efecto Doppler : $\nu' = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$
- Energia en reposo $E_0 = m_0 \cdot c^2$
- Masa relativista : $m(v) = \gamma m_0 \Rightarrow \vec{p} = m(v)\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$
- Energia total : $E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 \Rightarrow \gamma = E/E_0$
- Cuadrivector energia impulso : $(E; c\vec{p}) = (\gamma m_0 c^2; \gamma m_0 c\vec{v}) \Rightarrow \beta = c|\vec{p}|/E$
- Energia cinética relativista :
  $K = E - E_0 = (\gamma - 1)m_0 c^2 \Rightarrow 0.5 m_0 v^2 \quad si \ \beta << 1$
- Invariante : $m_0^2 c^4 = E^2 - c^2\vec{p}^2 \Leftrightarrow E = \sqrt{c^2\vec{p}^2 + m_0^2 c^4} \Rightarrow E = pc \ en \ L.R.$
- En un sistema aislado: impulso y energia relativista se conservan.

Sean dos sistemas, S y S', el segundo se mueve con velocidad $u$ respecto al primero a lo largo de OX.

- $x = \gamma \cdot [x' + ut'] \Rightarrow dx = \gamma[dx' + udt'] = \gamma[v'_x + u] \cdot dt'$
- $t = \gamma \cdot [t' + (u/c^2)x'] \Rightarrow dt = \gamma[1 + u \cdot v'_x/c^2] \cdot dt'$

Dividiendo las dos primeras ecuaciones:

- $v_x = \frac{v'_x+u}{1+uv'_x/c^2} \Rightarrow dv_x = \frac{dv'_x}{1+uv'_x/c^2} - \frac{(v'_x+u)dv'_x}{(1+uv'_x/c^2)^2} \cdot \frac{u}{c^2} = \frac{dv'_x}{\gamma^2(1+uv'_x/c^2)^2}$

Dividiendo por la expresión para $dt$ resulta:

- $a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3(1+uv'_x/c^2)^3} \Rightarrow a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3}$ si $v'_x = 0$

Si en el sistema **instantáneo** propio, S', tenemos $a'_x = g$ entonces resulta

- $\int_0^t g \cdot dt = \int_0^u \gamma^3(u)du \Rightarrow gt = \frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \Rightarrow u = \frac{gt}{\sqrt{1+g^2t^2/c^2}} = \frac{dx}{dt}$
- $dx = \frac{gtdt}{\sqrt{1+g^2t^2/c^2}} \Rightarrow x(t) = \frac{c^2}{g}[\sqrt{1 + g^2t^2/c^2} - 1]$

Por ejemplo si quiero calcular el tiempo necesario para que $\beta = 0.5$

$$\beta = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \Rightarrow z = \frac{gt}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \frac{c}{\sqrt{3}g} = \frac{3 \times 10^7 s}{\sqrt{3}} \sim 7 \ meses \tag{27}$$

Una nave espacial de longitud propia $L_0$ navega con velocidad constante, $v$, relativa a un sistema inercial S. El morro de la nave, A', pasa por el punto A de S en $t = t' = 0$. En ese instante se emite una sonda luminosa desde el morro A' a la cola B'.

- Cuanto tardará la sonda en llegar a B' en tiempos de S'
- En que instante $t_1$ medido en S llega la sonda luminosa a la cola
- En que instante $t_2$ medido en S pasa la cola B' por A

Solución:

- $t' = L_0/c = \tau_0$
- $t_1 = \gamma(t' + vx'/c^2) = \gamma(L_0/c - L_0 v/c^2) = \gamma \frac{L_0}{c}(1 - \beta) = \frac{L_0}{c} \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}}$
- $t_2 = \frac{L_0}{\gamma v}$