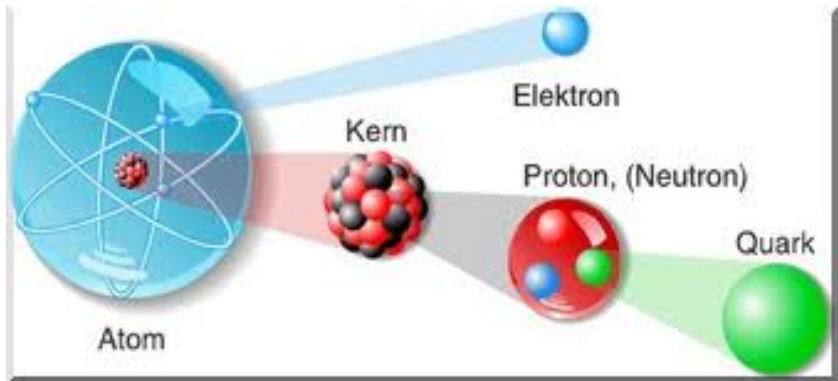


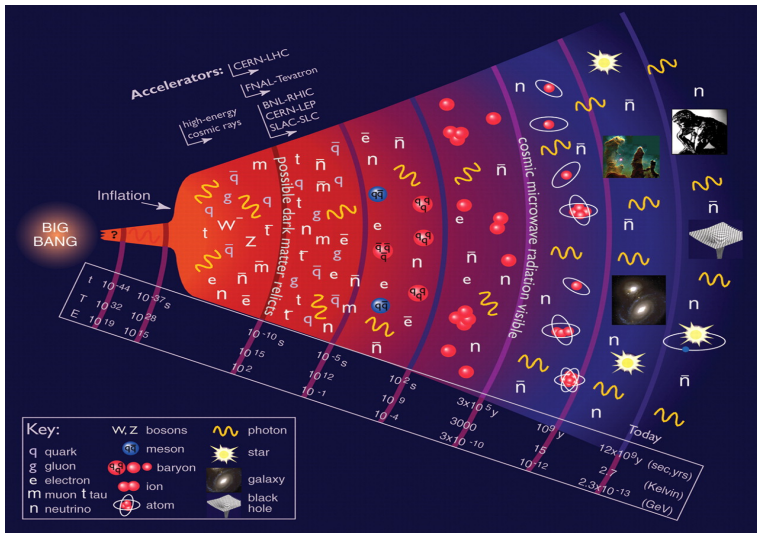
# Propiedades corpusculares de la radiación electromagnética

Fernando Barreiro

Universidad Autónoma de Madrid

Fundamentos Física III



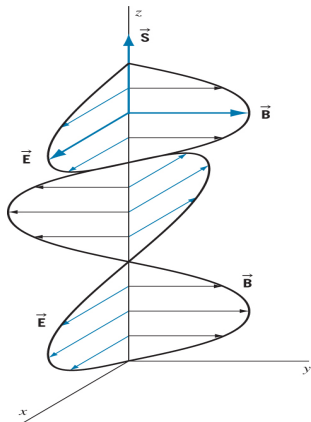


- En Física clásica se hace una clara distinción entre los fenómenos ondulatorios y los corpusculares
- A principios del siglo XX sin embargo se establece la dualidad onda-partícula.
- Vamos a empezar por discutir la evidencia experimental en favor de la naturaleza corpuscular de la luz
  - Efecto fotoeléctrico
  - Efecto Compton
  - Producción de pares electron-positrón ( $e^- e^+$ )
  - Radiación térmica
- Antes recordemos características ondas e.m. : interferencia, difracción, difracción por cristales

- Campo e.m. viene determinado por campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$
- Ej:  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$  es el campo creado por carga puntual a distancia  $r$
- Ej:  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\phi$  es el campo creado por corriente longitudinal  $I$  a distancia  $r$
- Si las cargas son aceleradas y/o la corriente varía con  $t \Rightarrow$  se produce una onda e.m. : los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  adquieren dependencia adicional en  $t$
- Dependiendo del caso la onda puede ser plana o esférica
- Ej: Onda plana según OZ :  $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kz - \omega t)$  ;  $\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(kz - \omega t)$
- $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  ;  $\omega = 2\pi\nu$  ;  $c = \lambda\nu = \omega/k$ .
- Polarización de la onda dada por  $\vec{E}_0$  con  $\vec{E} \times \vec{B} = OZ$  y  $B_0 = E_0/c$ .
- En nuestro ejemplo si  $\vec{E} \parallel OX \Rightarrow \vec{B} \parallel OY$
- Onda e.m. transmite energía de un punto a otro : flujo viene dado por vector de Poynting  $\vec{S}$
- $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 \sin^2(kz - \omega t) \vec{k}$  ;  $[\vec{S}] = W/m^2$

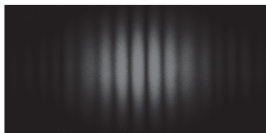
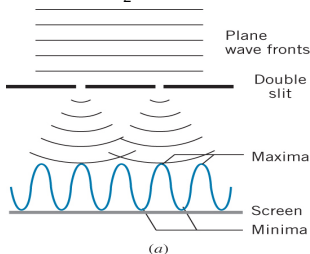
## Recordatorio ondas electromagnéticas

- Coloquemos detector radiación e.m.  $\perp$  dirección propagación onda
- Potencia absorbida receptor normal a OZ de area A :  
$$P = S \cdot A = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 A \sin^2(kz - \omega t) = \frac{1}{c\mu_0} E_0^2 A \sin^2(kz - \omega t)$$
- Intensidad :  $I = \frac{1}{c\mu_0} E_0^2 \cdot \sin^2(kz - \omega t)$  : prop.  $E_0^2$  y frecuencia  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$
- $\nu \sim 10^{15}$  Hz para luz visible. Si tiempo obs.  $T$  ( $T \sim 10^{-2}$  s ojo humano)
- $\langle I \rangle = 1/T \int_0^T I \cdot dt = \frac{1}{2c\mu_0} E_0^2$



# Recordatorio ondas electromagnéticas: Interferencia y difracción

- propiedad genuina mov. ondulatorio : principio superposición, permite entender como dos ondas se encuentran en un punto  $\Rightarrow$  **otra onda** distinta de las incidentes  $\Rightarrow$  fenómenos de interferencia y difracción.
- ejemplo más sencillo de interferencia, experimento doble rendija de Young : onda incidente se difracta en cada rendija cubriendo en pantalla área  $\gg$  sombra de la rendija. Interferencia puede ser:
  - constructiva :  $|X_1 - X_2| = n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
  - destructiva :  $|X_1 - X_2| = (n + \frac{1}{2})\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots$



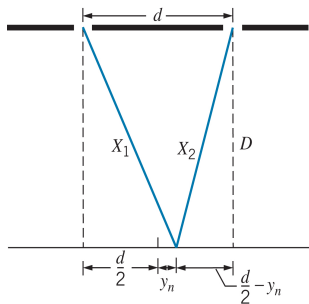
(a)

(b)

## Recordatorio ondas e.m.: Doble rendija de Young

$$y(t) = A \cos \omega \left( t - \frac{X_1}{c} \right) + A \cos \omega \left( t - \frac{X_2}{c} \right) = 2A \cos \omega \left( t - \frac{X}{c} \right) \cos \frac{\omega}{2c} (X_1 - X_2) \quad (1)$$

$$y(t) = 2A \cos \omega \left( t - \frac{X}{c} \right) \cos \frac{\omega}{2c} (d \sin \theta) = 2A \cos \omega \left( t - \frac{X}{c} \right) \cos \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \quad (2)$$

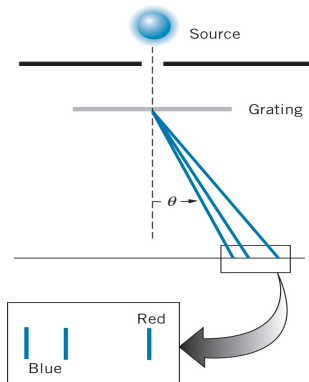


- $X_1^2 = D^2 + \left(\frac{d}{2} + y_n\right)^2$  ;  $X_2^2 = D^2 + \left(\frac{d}{2} - y_n\right)^2 \Rightarrow y_n = \frac{X_1^2 - X_2^2}{2d} \sim \frac{D(X_1 - X_2)}{d}$
- $D \gg d \Rightarrow X = 0.5(X_1 + X_2) \cong D$  y la amplitud es modulada
- Geometria:  $X_1 - X_2 = d \cdot y_n / D$  ;  $X_1 - X_2 \sim d \cdot \sin \theta$
- Máximos interferencia :  $\pi d \sin \theta / \lambda = n\pi \Rightarrow \sin \theta_n = n \cdot \frac{\lambda}{d} \Rightarrow y_n = n \cdot \frac{\lambda D}{d}$
- Línea nodal :  $\pi d \sin \theta / \lambda = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \theta_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{d}$



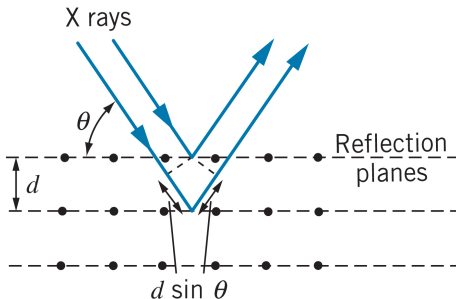
## Redes de difracción : difracción de rayos X en cristales

- Red difracción: generalización doble rendija Young a **muchas** rendijas
- Máximos asociados a distintos  $\lambda$ s aparecen a ángulos :  $d \sin \theta = n \cdot \lambda$
- Aquí  $d$ =espaciado red i.e. distancia rendijas consecutivas y  $n = 1, 2, 3, \dots$
- Quiero  $\sin \theta \sim 0.5 \Rightarrow d \sim \text{unas cuantas longitudes de onda}$
- Es  $\lambda$  luz visible  $\Rightarrow d \sim 1 \mu\text{m}$  : factible mecánicamente
- Para rayos X i.e.  $\lambda \sim 0.1 \text{ nm}$   $\Rightarrow d \sim \text{separación atómica}$
- Max von Laue y Lawrence Bragg : desarrollaron difracción por rayos X de estructuras cristalinas en 1915



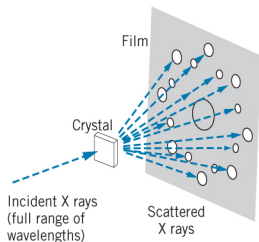
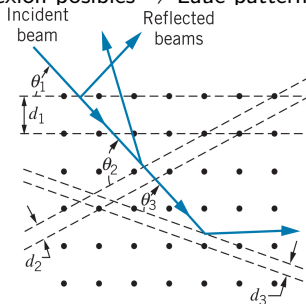
# Ley de Bragg

- Sea un haz de rayos X incidente sobre cristal: reflexión del haz por los átomos del cristal
- Supongamos distancia separación dos planos de átomos sea  $d$
- Haz reflejado por el segundo plano recorre distancia  $2d \cdot \sin \theta$  mayor que haz reflejado primer plano
- Para interferencia máxima :  $2d \cdot \sin \theta = n \lambda$ ,  $n=1,2,3,\dots$  : **ley de Bragg**
- Nótese diferencia en factor 2 con la expresión anterior para plano único

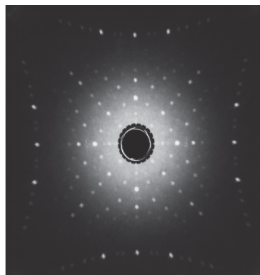


# Dispersión rayos X por cristal: Laue patterns

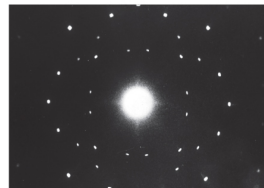
∃ muchos planos de reflexión posibles  $\Rightarrow$  Laue patterns



(a)



(b)



(c)



Ejemplo 1 : Irradiamos un muestra de CINA con un haz de rayos X de  $\lambda = 0.250 \text{ nm}$ . La primera reflexión de Bragg aparece a un ángulo de  $26.3^\circ$ . Determinar el espaciado atómico en el cristal de CINA. Determinar el ángulo de incidencia del haz de rayos X que producirá el segundo pico de Bragg.

Sol:

$$\bullet d = \frac{n\lambda}{2\sin\theta} = \frac{0.250 \text{ nm}}{2\sin 26.3^\circ} = 0.282 \text{ nm}$$

$$\bullet \sin\theta = \frac{n\lambda}{2d} = \frac{0.250 \text{ nm}}{0.282 \text{ nm}} = 0.8865 \Rightarrow \theta = 62.4^\circ$$

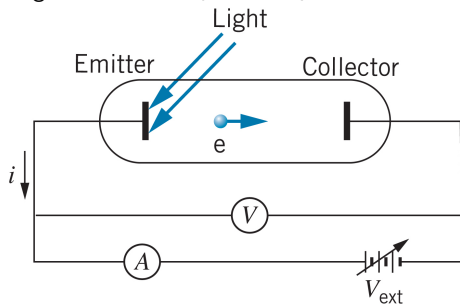
Ejemplo 2 : En un experimento de doble rendija se utiliza luz de Na con  $\lambda = 589.0 \text{ nm}$ . La separación entre rendijas es de  $1.05 \text{ mm}$  y la pantalla se encuentra a  $D = 2.357 \text{ m}$  de ellas. Determinar la separación entre máximos adyacentes sobre la pantalla.

Sol.:

$$\bullet \Delta y = y_{n+1} - y_n = \lambda \frac{D}{d} = 589 \text{ nm} \frac{2.357 \text{ m}}{1.05 \text{ mm}} = 1.32 \text{ mm}$$

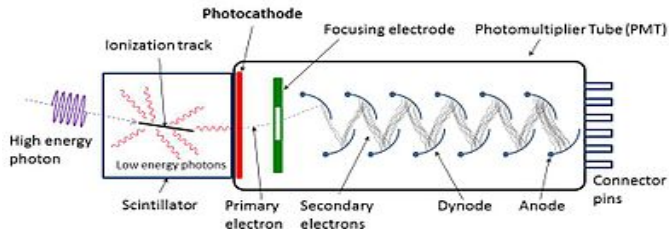
## Efecto fotoeléctrico

- Primero de una serie de experimentos que no pueden explicarse mediante teoría ondulatoria de la luz
- Heinrich Hertz 1887: superficie metálica iluminada por luz emite electrones que atraviesan un tubo de vacío para evitar pérdida de energía por colisiones  $\Rightarrow$  corriente eléctrica en colector
- Clásicamente: superficie metálica absorbe energía de la fuente luminosa hasta que esta exceda energía de enlace: emisión
- Valores típicos:  $\Phi(Na) = 2.28 \text{ eV}$ ,  $\Phi(Al) = 4.08 \text{ eV}$ ,  $\Phi(Cu) = 4.70 \text{ eV}$
- $\Delta V_{em,col} < 0 \Rightarrow \Delta U = -e\Delta V > 0 \Rightarrow$  electrones pierden  $E_{kin} \Rightarrow I \downarrow$
- Energía cinética máxima electrones emitidos,  $K_{max}$ , corresponderá  $\Delta V = V_s$  que haga  $I = 0$  i.e.  $K_{max} = e \cdot V_s$



# Efecto fotoeléctrico : principio funcionamiento fotomultiplicador

- en analogía como estímulo nervio óptico  $\Rightarrow$  impulso nervioso
- fotoelectrón producido al estimular con luz un fotocátodo, es acelerado por dinodos con efecto multiplicador dando origen a impulso eléctrico medible



# Aplicaciones fotomultiplicadores : Superkamiokande

- GUTs predicen  $p \rightarrow e^+ + \pi^0$  con  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  con  $\tau_{th} = 10^{36}$  años
- Superkamiokande : 50.000 Toneladas agua pura, en cilindro  $H = 40$  m y  $2R = 35$  m cubiertos por 11.000 PMTs en mina Kamioka a 1100 m de profundidad
- $\tau_{exp} > 10^{34}$  años



- $K_{max} \propto I$
- Cualquier  $\lambda$  de la luz incidente es buena
- Tiempo de emisión del orden de segundos

Ejemplo: Un láser de helio-neón de intensidad  $120 \text{ W/m}^2$  incide sobre una placa metálica de Na que puede emitir fotoelectrones si recibe al menos  $\Phi = 2.3 \text{ eV}$  de energía. Si el electrón está confinado en un área de radio  $r = 0.1 \text{ nm}$  cuanto tiempo necesitaría clásicamente esta placa de sodio para emitir fotoelectrones?

Sol:

- Área confinamiento electrón:  $A = \pi r^2 = 3.1 \times 10^{-20} \text{ m}^2$
- Energía absorbida electrón:  $P_{ave} \cdot \Delta t = \Delta E$
- $\Delta t = \frac{\Delta E}{P_{ave}} = \frac{\Phi}{I \cdot A} = \frac{(2.3 \text{ eV})(1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}{(120 \text{ W/m}^2)(3.1 \times 10^{-20} \text{ m}^2)} = 0.10 \text{ s}$

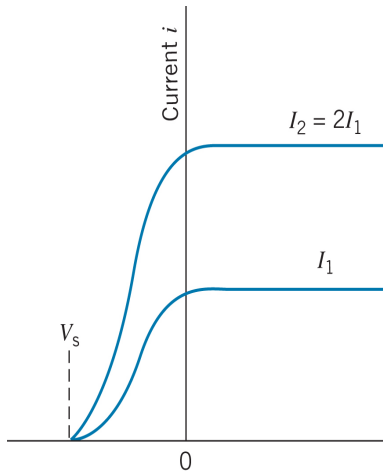
:



# Medidas experimentales efecto fotoeléctrico contradicen predicciones clásicas

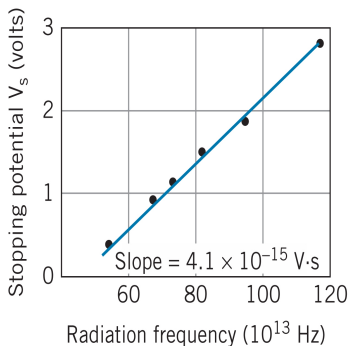
Los hechos experimentales sin embargo muestran

- $K_{max} \propto V_S$  no depende de la intensidad de la luz para un  $\lambda$  o  $\nu$  dada
- $\nexists$  fotoeléctrico por **debajo de una determinada**  $\nu_c$  de la fuente (**o por encima de una**  $\lambda_c$ )
- Tiempo de emisión de fotoelectrones ocurre a  $10^{-9}$  s



# Teoría cuántica efecto fotoeléctrico

- Einstein en 1905 usa ideas de Planck para explicar correctamente e.f.
- Energía radiación e.m. no se distribuye uniformemente sobre frente ondas
- Antes bien se concentra en cuantos, fotones, de energía  $E = h \cdot \nu = h \cdot c / \lambda$
- Fotones viajan a velocidad de la luz y su impulso es  $p = E/c = h/\lambda$
- Deben tener masa en reposo nula, si no su energía y momento serían  $\infty$
- Energía de un fotón es transmitida instantáneamente a un electrón
- Por tanto  $K_{\max} = h \cdot \nu - \Phi$  i.e. independiente intensidad luz
- Fotoelectrones no serán emitidos si  $h\nu$  por debajo de energía de enlace
- Robert Millikan midió (1915)  $K_{\max}$  función  $\nu \Rightarrow h = 6.57 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$



Ej. 1 : Determinar la energía y el momento de un fotón de longitud de onda 650 nm (luz roja)

Sol:

- $E = hc/\lambda = \frac{(6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{650 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 3.06 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1.91 \text{ eV}$
- $p = E/c = 1.91 \text{ eV}/c$

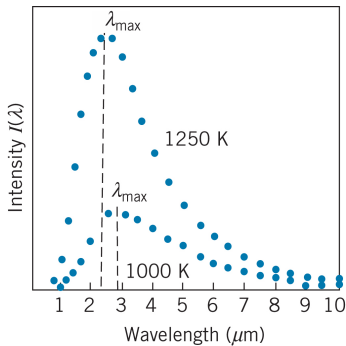
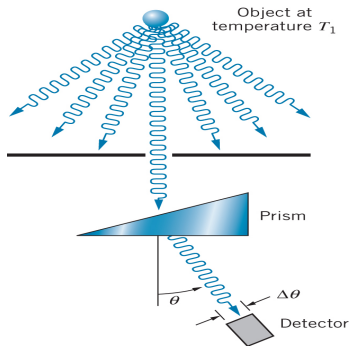
Ej. 2 : Si  $\Phi(Tu) = 4.52 \text{ eV}$  determinar a)  $\lambda_c$  b)  $K_{max}$  para radiación de 198 nm y c) el potencial de frenado  $V_s$ .

Sol:

- $\lambda_c = hc/\Phi = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{4.52 \text{ eV}} = 274 \text{ nm}$
- $K_{max} = h\nu - \Phi = hc/\lambda - \Phi = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{198 \text{ nm}} - 4.52 \text{ eV} = 1.74 \text{ eV}$
- $V_s = \frac{K_{max}}{e} = \frac{1.74 \text{ eV}}{e} = 1.74 \text{ V}$

# Radiación térmica

- Radiación térmica es la emitida por todos los cuerpos debida a su temperatura
- A temperatura ambiente esta radiación ocurre en la zona infraroja del espectro i.e. no es visible ( $\nu \sim 10^{13} \text{ Hz}$ )
- Finales s. XIX muchos experimentos tenían como objetivo medir la intensidad de la radiación como función de  $\lambda$  véase fig. adjunta para dispositivo exp y resultados a  $T = 1000 \text{ K}$  y  $1250 \text{ K}$  que indican a) área bajo la curva crece con  $T$  y b)  $\lambda_{\text{max}} \propto 1/T$ .
- $[I] = \text{W}/\text{m}^2 = \text{J}/\text{m}^2/\text{s}$



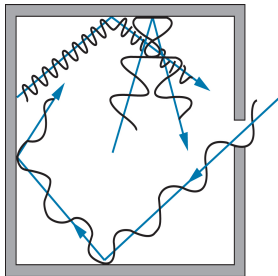
- Ley de Stefan:  $I = \sigma T^4$  siendo  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} W/m^2/K^4$  constante de Stefan-Boltzmann
- Ley de Wien :  $\lambda_{max} \cdot T = 2.8978 \cdot 10^{-3} m.K$  siendo  $\lambda_{max}$  la longitud de onda a la cual la intensidad alcanza un máximo

Ejemplo: Determinar la longitud de onda a la que un objeto a temperatura ambiente tiene su máximo de intensidad térmica. Determinar la temperatura a la que lo debemos calentar para que este pico de radiación ocurra en el rojo  $\lambda_{rojo} = 650 \text{ nm}$ . Determinar la razón entre las intensidades de radiación emitidas a ambas temperaturas.

- $\lambda_{max} = \frac{2.8975 \times 10^{-3} m.K}{293K} = 9.89 \mu m$
- $T_2 = \frac{2.8975 \times 10^{-3} m.K}{\lambda_{max}} = \frac{2.8975 \times 10^{-3} m.K}{650 \times 10^{-9} m} = 4460 K$
- $\frac{I_2}{I_1} = \frac{\sigma T_2^4}{\sigma T_1^4} = \left(\frac{4460}{293}\right)^4 = 5.37 \times 10^4$

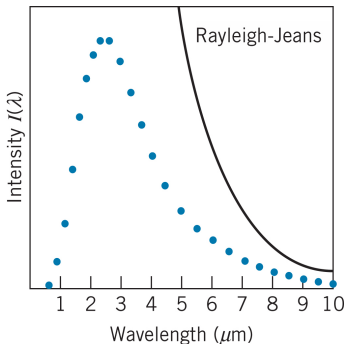
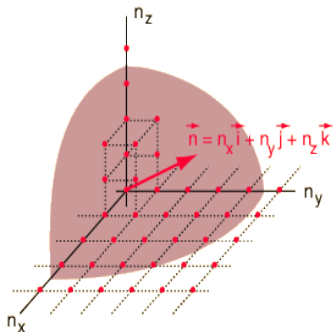
## Radiación cuerpo negro: características

- Análisis radiación térmica cuerpo arbitrario muy complejo, depende de sus propiedades superficiales i.e. de sus propiedades de emisión y reflexión  $\Rightarrow$
- Simplificación : cuerpo negro i.e. aquel absorbe toda radiación incidente y refleja ninguna  $\Rightarrow \square \vec{E} = 0$
- Caso particular como en figura adjunta : caja metálica hueca con paredes en equilibrio térmico a  $T$  y con una apertura. Denotemos por  $u(\lambda) \equiv$  densidad energía e.m.  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$  en la cavidad :  $[u] = J/m^3$ .
- La mitad de la radiación se mueve en dirección opuesta al agujero y la otra mitad se mueve en dirección a él pero a todos los ángulos, resultado :  $I(\lambda) = \frac{1}{2}u(\lambda) \frac{\langle A \cdot \cos\theta \cdot c \cdot \cos\theta \rangle}{A} = \frac{c}{4}u(\lambda) =$  intensidad radiada
- Recordatorio : ondas estacionarias cuerda longitud  $L$  extremos fijos :  $\lambda = 2L/n \Rightarrow n_2 - n_1 = 2L(1/\lambda_2 - 1/\lambda_1) \Rightarrow dn = |dn/d\lambda|d\lambda = 2L \frac{d\lambda}{\lambda^2}$



# Radiación cuerpo negro: teoría clásica

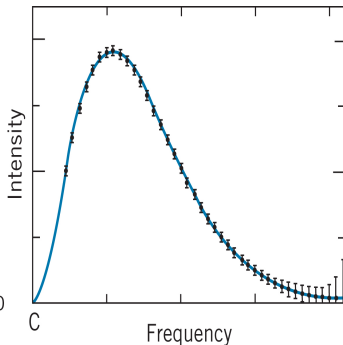
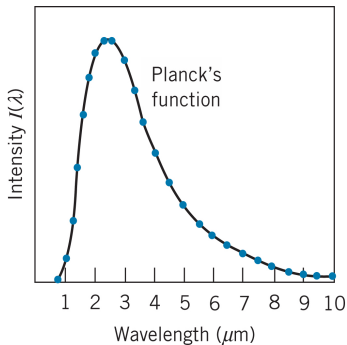
- Caja está llena con ondas e.m. estacionarias, campo eléctrico nodal en paredes:  $E = E_0 \sin \frac{n_1 \pi x}{L} \sin \frac{n_2 \pi y}{L} \sin \frac{n_3 \pi z}{L} \sin \frac{2\pi ct}{\lambda} \Rightarrow (n_1 \pi/L)^2 + (n_2 \pi/L)^2 + (n_3 \pi/L)^2 = (2\pi/\lambda)^2 \Rightarrow n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 4L^2/\lambda^2$
- Número modos:  $n(\lambda) = \frac{4\pi}{3} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{3/2} \cdot \frac{1}{8} \cdot 2_{pol} = \frac{8\pi V}{3\lambda^3}$
- Número ondas estacionarias  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ :  $N(\lambda)d\lambda = |dn/d\lambda|d\lambda = \frac{8\pi V}{\lambda^4} d\lambda$
- Cada onda individual contribuye  $N(E) = \frac{N}{kT} e^{-E/kT}$  (**oscilador clásico**)  $\Rightarrow$
- $\langle E \rangle = \frac{1}{N} \int_0^\infty EN(E)dE = (1/kT) \int_0^\infty Ee^{-E/kT} dE = kT$  si por partes
- Densidad de energía caja = (no. ondas/unidadV)  $\times$  ( $\langle E \rangle_{onda}$ )  
 $\Rightarrow u(\lambda)d\lambda = \frac{N(\lambda)d\lambda}{V} kT = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT d\lambda$  : ley de Rayleigh-Jeans
- $I(\lambda) = \frac{c}{4} u(\lambda) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT$  : catástrofe ultravioleta  $\equiv$  quiebra física clásica

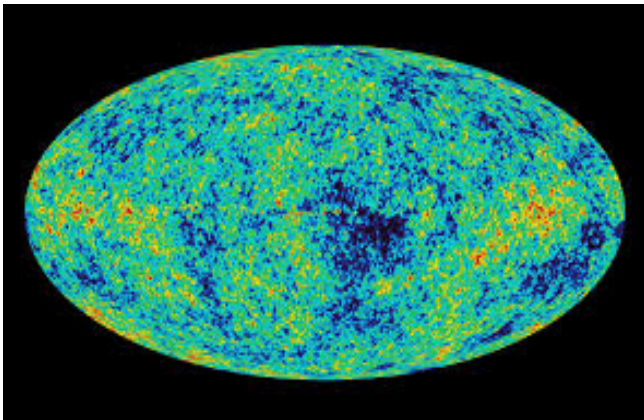


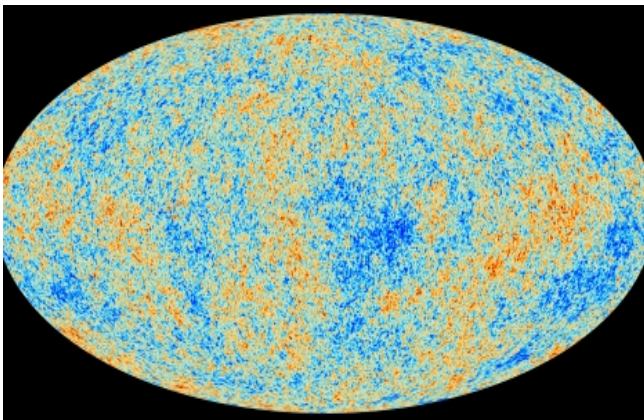
- Max Planck, 1900 considera que ondas estacionarias e.m. resultan de **oscilaciones atómicas** en paredes cavidad
- Átomos emiten o absorben energía en **cantidades discretas** :  
 $E_n = n\epsilon = n \cdot h \cdot \nu$ ,  $n=1,2,3.. \Rightarrow$  supresión  $\nu \uparrow$  i.e.  $\lambda \downarrow$
- Número osciladores con energía  $E_n$  :  $N_n = N(1 - e^{-\epsilon/kT})e^{-n\epsilon/kT}$
- Recordemos clásicamente i.e. Maxwell-Boltzmann :  $N(E) = \frac{N}{kT} e^{-E/kT}$
- En efecto: utilizamos la identidad  $\sum_0^\infty e^{nx} = \frac{1}{1-e^x} \Rightarrow \sum_0^\infty ne^{nx} = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}$
- $\sum_0^\infty N_n = \sum_0^\infty A e^{-E_n/kT} = A \sum_0^\infty e^{-n\epsilon/kT} = \frac{A}{1-e^{-\epsilon/kT}} = N$
- $\langle E \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^\infty N_n \cdot E_n = (1 - e^{-\epsilon/kT}) \sum_{n=0}^\infty n\epsilon e^{-n\epsilon/kT} \Rightarrow$
- $\langle E \rangle = (1 - e^{-\epsilon/kT}) \frac{\epsilon e^{-\epsilon/kT}}{(1 - e^{-\epsilon/kT})^2} = \frac{\epsilon e^{-\epsilon/kT}}{(1 - e^{-\epsilon/kT})} \Rightarrow$
- $\langle E \rangle = \frac{\epsilon}{(e^{\epsilon/kT} - 1)} = \frac{h\nu}{(e^{h\nu/kT} - 1)} \Rightarrow \langle E \rangle = kT, 0$  si  $\nu \rightarrow 0, \infty$
- $\langle E \rangle = \frac{\epsilon}{(e^{\epsilon/kT} - 1)} = \frac{h\nu}{(e^{h\nu/kT} - 1)} = \frac{hc/\lambda}{(e^{hc/\lambda kT} - 1)}$
- $I(\lambda) = \frac{c}{4} u(\lambda) = \frac{c}{4} \left(\frac{8\pi}{\lambda^4}\right) \left[\frac{hc/\lambda}{(e^{hc/\lambda kT} - 1)}\right]$
- $I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{(e^{hc/\lambda kT} - 1)}$



- Fórmula de Planck:  $I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{(e^{hc/\lambda kT} - 1)}$
- Ajusta perfectamente datos experimentales incluidos los de COBE para el CMB dando  $T = 2.725 \text{ }^\circ\text{K}$







Ejemplo 1 : El Sol tiene una temperatura superficial de  $6000 \text{ }^\circ K$ . Determinar la longitud de onda a la que el Sol tiene su pico de emisión.

Sol:

- De acuerdo con la ley de Wien  $\lambda = \frac{2.898 \times 10^{-3} \text{ m }^\circ K}{6000 \text{ }^\circ K} = 483 \text{ nm}$
- Esta longitud de onda se encuentra en el centro del espectro visible, en la zona de mayor sensibilidad del ojo humano

Ejemplo 2 : Si los datos del CMB se ajustan a la radiación de un cuerpo negro con  $T = 2.7 \text{ }^\circ K$ , determinar la longitud de onda a la que ocurre el pico de esta radiación. Determinar la energía, en eV, de los fotones en este pico.

Sol.:

- De acuerdo con la ley de Wien  $\lambda = \frac{2.898 \times 10^{-3} \text{ m }^\circ K}{2.7 \text{ }^\circ K} = 1.1 \text{ mm}$  i.e. región de microondas
- $E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{1.1 \text{ mm}} = 1.1 \times 10^{-3} \text{ eV}.$

- Ley de Planck ⇒ ley de Stefan

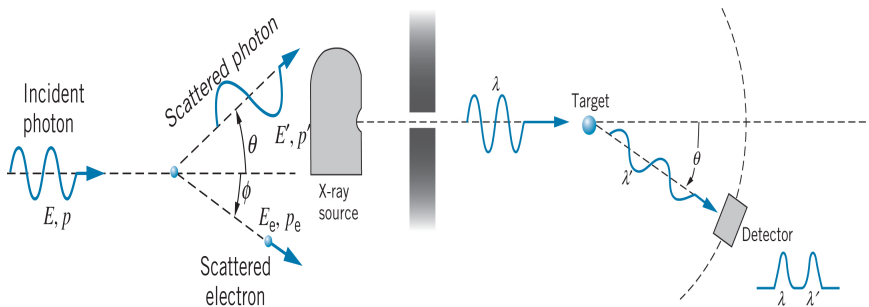
- $\int_0^\infty I(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \left[ \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \right] \frac{d\lambda}{(e^{hc/\lambda kT} - 1)}$
- Definamos  $x = hc/\lambda kT$  con  $dx = (-hc/\lambda^2 kT) d\lambda$
- $\int_0^\infty I(\lambda) d\lambda = 2\pi hc^2 \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \left(\frac{kT}{hc}\right) \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$
- $\int_0^\infty I(\lambda) d\lambda = \frac{2\pi k^4}{h^3 c^2} T^4 \frac{\pi^4}{15} = \sigma \cdot T^4$
- $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}$  : ley de Stefan permite determinar  $h$

- Ley de Planck ⇒ ley de Wien

- Para determinar  $\lambda_{max}$  necesito calcular  $dI(\lambda)/d\lambda$
- $\frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = 2\pi hc^2 \left[ \left(\frac{-5}{\lambda^6}\right) \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} + \left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \frac{(-e^{hc/\lambda kT})(-hc/\lambda^2 kT)}{(e^{hc/\lambda kT} - 1)^2} \right]$
- $-\frac{5}{\lambda} + \frac{(e^{hc/\lambda kT})(hc/\lambda^2 kT)}{(e^{hc/\lambda kT} - 1)} = 0$
- $(x - 5)e^x + 5 = 0 \Rightarrow x = 4.9651 = hc/\lambda_{max} kT$
- $\lambda_{max} T = \frac{hc}{4.9651k}$  : ley de Wien

Arthur Compton en 1923 realizó primeras medidas dispersión  $\gamma e \rightarrow \gamma e$

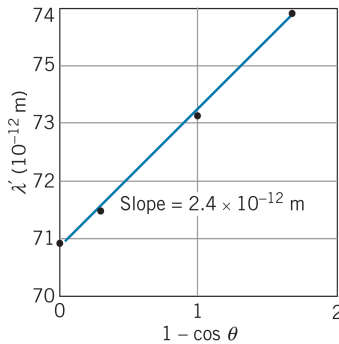
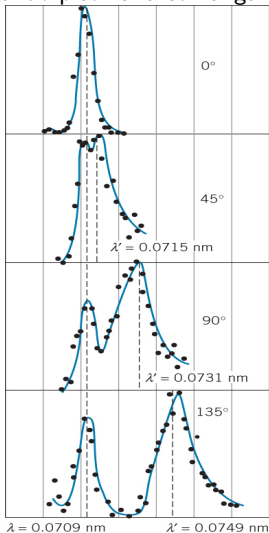
- $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta)$
- $\frac{h}{m_e c} = 0.002426 \text{ nm} \sim 2.43 \times 10^{-12} \text{ m} \equiv \text{longitud onda Compton}$
- $\tan\phi = \frac{E' \sin\theta}{E - E' \cos\theta}$



# Scattering Compton: continuación

Resultados experimentales muestran dos picos:

- Primer pico fijo  $\Leftrightarrow$  dispersión con núcleo o electrones capas internas,  $\Delta E_\gamma \sim 0$
- Segundo pico varía con ángulo dispersión, pendiente es la predicha  $h/m_e c$



Rayos X de  $\lambda = 0.24 \text{ nm}$  sufren dispersión Compton de modo que el haz dispersado es observado a un ángulo de  $\pi/3$  con relación al incidente. Determinar la longitud de onda y la energía de los fotones dispersados, así como la energía cinética y el ángulo de dispersión de los electrones.

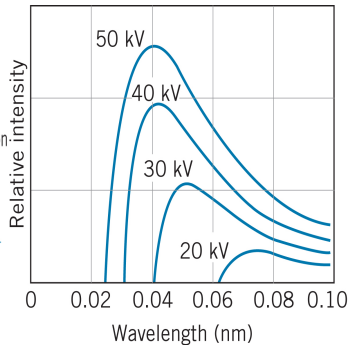
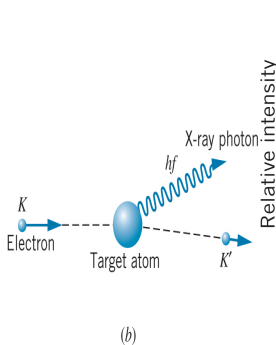
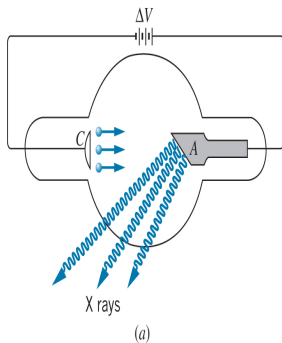
Sol.:

- $\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) = \lambda + \frac{hc}{m_e c^2} (1 - \cos\theta) = 0.24 + \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{511.000 \text{ eV}} (1 - 0.5) = 0.2412 \text{ nm}$
- $E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0.2412 \text{ nm}} = 5141 \text{ eV}$
- La energía del fotón incidente es  $E = \frac{hc}{\lambda} = 5167 \text{ eV} \Rightarrow K = 5167 - 5141 = 26 \text{ eV}$
- $\phi = \tan^{-1} \frac{E' \sin\theta}{E - E' \cos\theta} = \tan^{-1} \frac{(5141 \text{ eV})(\sin \pi/3)}{(5167 \text{ eV}) - (5141 \text{ eV} \cdot \cos \pi/3)} = 59.7^\circ$



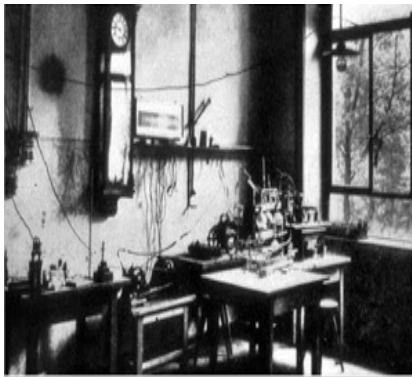
# Radiación de frenado, Bremsstrahlung, y producción de rayos X

- Partículas cargadas aceleradas emiten radiación de frenado i.e. fotones
- Electrones emitidos en cátodo C recogidos en ánodo A
- Pérdida energía potencial  $-e\Delta V \Leftrightarrow$  ganancia energía cinética  $K = e\Delta V$
- Electrones se ven frenados colisiones átomos de A  $\Rightarrow$  emisión de fotones
- Máxima  $\nu$  i.e. mínima  $\lambda$  :  $h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} = K = e\Delta V \Leftrightarrow \lambda_{min} = \frac{hc}{K} = \frac{hc}{e\Delta V}$
- Si  $V \sim 10^4$  V  $\Rightarrow \lambda_{min} \sim 0.1$  nm i.e.  $\nu_{max} \sim 10^{18}$  Hz i.e. región Rayos X
- **Bremsstrahlung:**  $e \rightarrow e + \gamma$  **inverso de e.f.**  $e + \gamma \rightarrow e$



# Radiación de frenado, bremsstrahlung, y producción de rayos X

- Wilhelm Konrad Roentgen, primer Premio Nobel de Física, cuya dotación donó a su Universidad
- No patentó su descubrimiento, según su famosa frase: Los rayos X deben ser libres
- Vista de su laboratorio, de la primera radiografía (la mano de su esposa Bertha) y de él mismo



- Máximos experimento doble rendija:  $y_n = n \frac{\lambda D}{d}$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Ley de Bragg difracción rayos X:  $2d \sin \theta = n \lambda$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$
- Máxima energía cinética fotoelectrones:  $K_{max} = eV_s = h\nu - \Phi$
- Frecuencia mínima (longitud de onda máxima) de la fuente en e.f. :  
 $\nu_c = \frac{\Phi}{h}$  ;  $\lambda_c = \frac{hc}{\Phi}$
- Ley de Stefan:  $I = \sigma T^4$
- Ley de Wien :  $\lambda_{max} T = 2.8978 \times 10^{-3} m \cdot ^\circ K$
- Formula de Rayleigh-Jeans :  $I(\lambda) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT$
- Fórmula de Planck:  $I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{(e^{hc/\lambda kT} - 1)}$
- Scattering Compton:  $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$
- Bremsstrahlung:  $\lambda_{min} = \frac{hc}{K} = \frac{hc}{e\Delta V}$