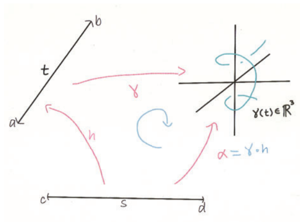
1.2. Reparametrizaciones



Puntos regulares y puntos singulares de una curva

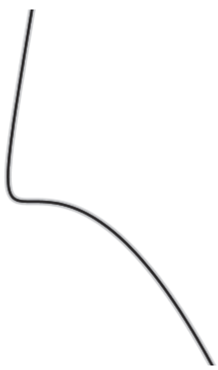
En una curva parametrizada $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$, un punto $t \in (a,b)$ se dice que es **regular** si se verifica que

$$\vec{\gamma}'(t) \neq \vec{0}$$

En caso contrario se dice que t es un punto **singular** de la curva.

Curvas regulares

Una curva parametrizada se dice que es una **curva regular** si todos sus puntos son regulares.



$$\alpha(t) = (t^2 - t, 2t^3), \qquad t \in (-1,1)$$

$$\beta(t) = (t^6 - t^3, 2t^9), \qquad t \in (-1,1)$$

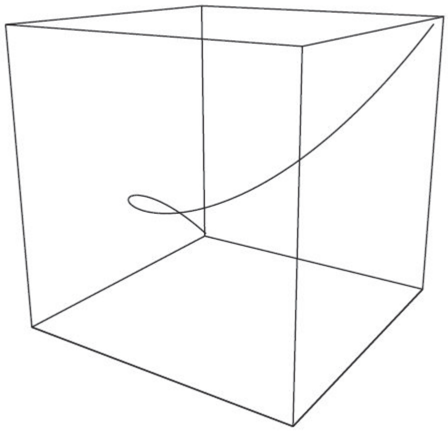
Regularidad de las curvas con velocidad unitaria

Toda curva parametrizada, con velocidad unitaria es regular.

Estudiar si es regular

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3), \qquad t \in \mathbb{R}$$

¿Tiene velocidad unitaria?



Determinar si son regulares

1. $\gamma_0(t) = (t^2, e^t - t)$, en $(-1, 1)$
2. $\gamma_1(t) = (t, t^2)$, en $(-1, 1)$
3. $\gamma_2(t) = (t^3, t^6)$, en $(-1, 1)$
4. $\gamma_3(t) = (1 - t, (1 - t)^2)$, en $(0, 2)$

γ_1, γ_2 y γ_3 son parametrizaciones de la curva de nivel $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

Aplicaciones de reparametrización

Dados dos intervalos abiertos $I, J \subseteq \mathbb{R}$, una aplicación

$$h : J \to I$$

es una **aplicación de reparametrización** o **difeomorfismo** si verifica:

1. h es biyectiva.
2. h es suave.
3. h^{-1} es suave.

h **conserva la orientación** si $h'(s) > 0 \quad \forall s \in J$

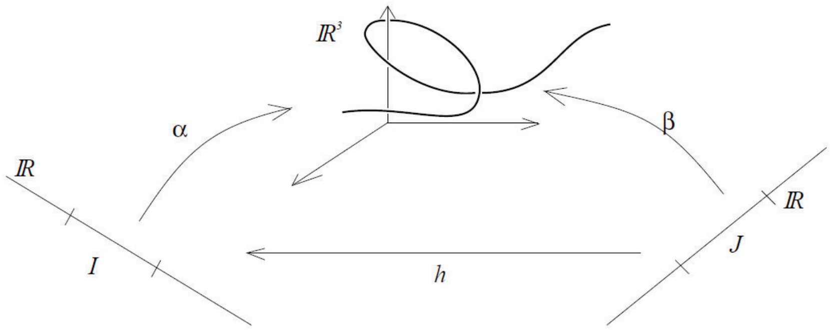
h **cambia la orientación** si $h'(s) < 0 \quad \forall s \in J$

Reparametrizaciones de curvas parametrizadas

Una curva parametrizada $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ es una **reparametrización** de la curva parametrizada $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ si se verifica que:

$$\beta(s) = \alpha(h(s)), \qquad \text{para todo} \qquad s \in J$$

para cierta aplicación de **reparametrización** $h : J \to I$.



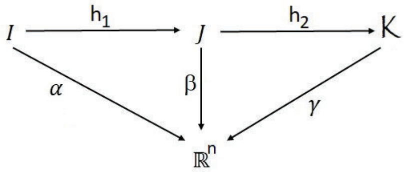
Comprobar que h es aplicación de reparametrización

Y obtener la reparametrización de la curva α.
$\alpha : (1,3) \to \mathbb{R}^3$, con $\alpha(t) = (t-1,\ t^2 - 2t + 1,\ 2)$, siendo
$h : (0,1) \to (1,3)$ con $h(s) = 2s + 1$

Relación de equivalencia entre curvas parametrizadas

La reparametrización es una relación de equivalencia en el conjunto de curvas parametrizadas:

1. Toda curva es una reparametrización de sí misma.
2. Si (I, α) es una reparametrización de (J, β), entonces (J, β) es una reparametrización de (I, α).
3. Si (I, α) es una reparametrización de (J, β) y (J, β) es una reparametrización de (K, γ) entonces (I, α) es una reparametrización de (K, γ)



Reparametrizar la curva

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)), \qquad t \in (0, 2\pi)$$

Con la aplicación de reparametrización $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(s) = \pi - s$. Estudiar si se conserva o se cambia la orientación.

Reparametrizar la curva

$$\alpha(t) = (t, 1 - t^2, 2t - 1), \qquad t \in (-1, 2)$$

Con la aplicación de reparametrización $\quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad$ definida por $\quad h(s) = 2s - 1.$
Estudiar si se conserva o se cambia la orientación.

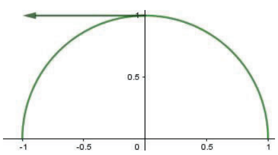
Estudiar si α y β son reparametrizaciones de γ

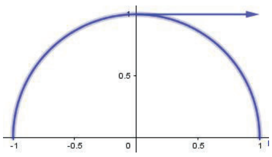
$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), \qquad t \in (0, \pi)$$

$$\alpha(s) = (\sin(s), \cos(s)), \qquad s \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\beta(u) = (u, \sqrt{1 - u^2}), \qquad u \in (-1, 1)$$

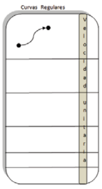
En caso afirmativo indicar si conserva o cambia la orientación.





Reparametrizaciones de curvas regulares

Sean (I, α) una curva regular y (J, β) una reparametrización de (I, α) $\Rightarrow$ (J, β) es también una curva regular.



La función longitud de arco bajo reparametrizaciones

La función longitud de arco es invariante por reparametrizaciones que conservan la orientación y cambia de signo si cambian la orientación.

La función longitud de arco de una curva regular es suave

Si $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ es una curva regular, entonces su función longitud de arco, empezando desde cualquier punto de su dominio, es una función suave y estrictamente creciente.

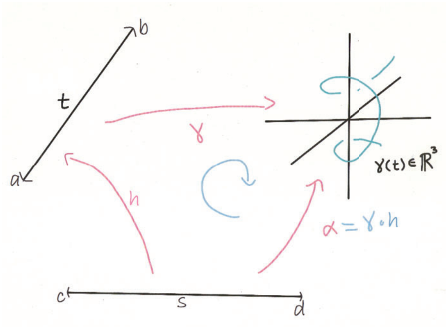
Caracterización de curvas reparametrizables a velocidad unitaria

Una curva parametrizada tiene una reparametrización con velocidad unitaria $\Leftrightarrow$ es una curva regular.

Algoritmo de reparametrización con velocidad unitaria

Dada la curva regular $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$

1. Comprobar que $\vec{\gamma}'(t) \neq \vec{0}$ para todo $t \in (a,b)$, verificando que $\| \vec{\gamma}'(t) \| \neq 0$
2. Obtener la función longitud de arco: $s(t) = L_{t_0}^t(\gamma) = \int_{t_0}^t \| \vec{\gamma}'(u) \| \, du$.
   Calcular $(c,d) = s((a,b))$.
3. Obtener la función: $h = s^{-1} : (c,d) \to (a,b)$.
4. La curva parametrizada pedida es $\alpha = \gamma \circ h$
5. Se puede verificar el resultado, comprobando que $\| \vec{\alpha}'(s) \| = 1$ para todo $s \in (c,d)$



Reparametrizar, si es posible, con velocidad unitaria

$$\gamma(t) = (\cos(2t+3), \sin(2t+3)), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Reparametrizar, si es posible, con velocidad unitaria

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), \qquad t \in (-1, 1)$$

Posibles reparametrizaciones con velocidad unitaria

Sea γ una curva regular y $s(t)$ su función longitud de arco.
Si $\phi(t) = \pm s(t) + c$, con $c \in \mathbb{R}$ y $h = \phi^{-1}$ entonces la reparametrización

$$\alpha = \gamma \circ h$$

tiene velocidad unitaria. Y recíprocamente, si $\alpha = \gamma \circ h$ es una reparametrización de γ con velocidad unitaria, entonces $h = \phi^{-1}$ para cierta función

$$\phi(t) = \pm s(t) + c$$

Reparametrizar, si es posible, con velocidad unitaria

$$\gamma(t) = (e^{kt}\cos(t), e^{kt}\sin(t)), \qquad t \in (0, \infty)$$