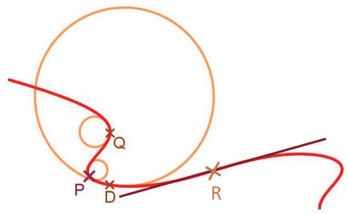
1.3. Curvatura de una curva regular

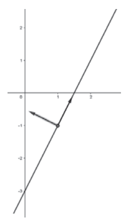


Obtener el vector aceleración:

$\gamma_1(t) = (\frac{1}{\sqrt{5}}t + 1, \frac{2}{\sqrt{5}}t - 1), \qquad t \in \mathbb{R}$

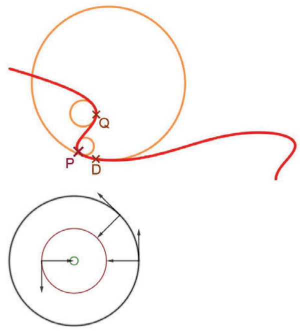
$\gamma_2(t) = (t^3 + 1, 2t^3 - 1), \qquad t \in \mathbb{R}$

Si alguna de ellas no tiene velocidad unitaria, reparametrizar a velocidad unitaria y calcular el vector aceleración de la curva reparametrizada.



Obtener la aceleración escalar de la curva:

$\gamma_3(t) = \left(x_0 + R\cos\left(\frac{t}{R}\right), y_0 + R\sin\left(\frac{t}{R}\right)\right), \quad t \in (-\pi, \pi),$
$R > 0$



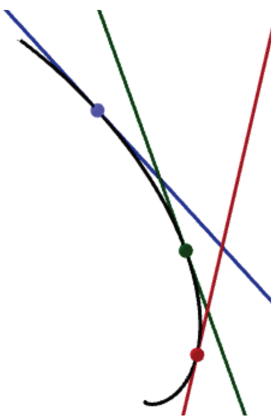
Curvatura de una curva con velocidad unitaria

Sea $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ curva parametrizada con velocidad unitaria.
Se define su **función curvatura** como: $\kappa : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\kappa(t) = \| \vec{\gamma}''(t) \|$$

Curvatura de una curva regular

Si $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ es curva regular, se define su **función curvatura** como la de una de sus reparametrizaciones a velocidad unitaria.



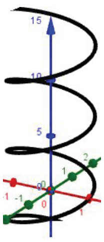
Consistencia de la definición de curvatura

Todas las reparametrizaciones a velocidad unitaria de una curva regular, tienen la misma aceleración escalar.

Calcular la curvatura

Hélice circular: $(\mathbb{R}, \gamma)$

$$\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt), \qquad a > 0$$



Cálculo de la curvatura de curvas regulares generales

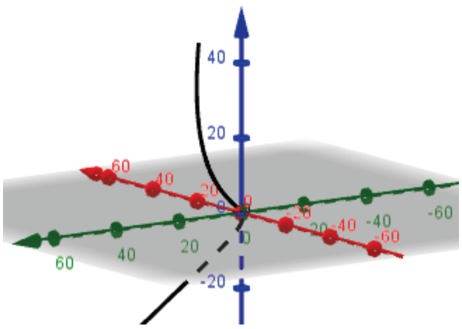
Sea $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Se verifica que:

$$\kappa(t) = \frac{\| \vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t) \|}{\| \vec{\gamma}'(t) \|^3}$$

Para obtener la curvatura de una curva regular $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$, se puede usar la fórmula anterior considerándola inmersa en el plano xy.

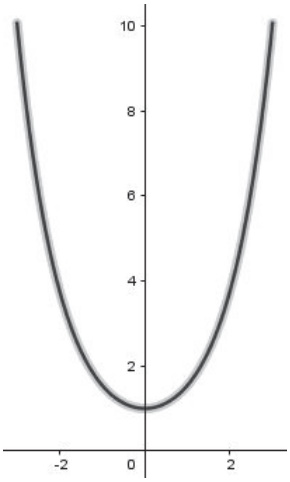
Obtener la curvatura

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad \gamma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$$



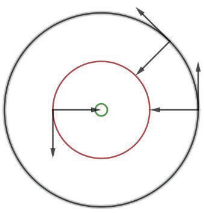
Obtener la curvatura

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = (t, \cosh(t))$$



Calcular la curvatura

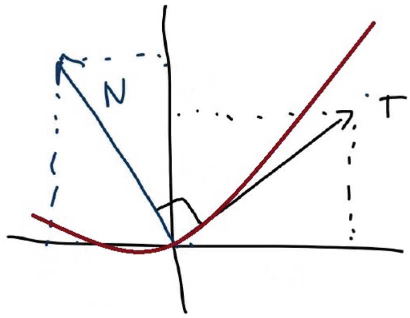
$$\gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$$



Vector normal a una curva plana

Sea $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ curva regular, para cada $t \in I$, sea $\vec{T}(t) = \frac{\vec{\gamma}'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|}$ el vector tangente. Se denomina **vector normal** a (I,γ) en $t \in I$, al vector que se obtiene girando $\vec{T}$ un ángulo $\frac{\pi}{2}$ en sentido positivo:

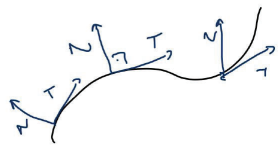
$$\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{T}$$



Diedro de Frenet

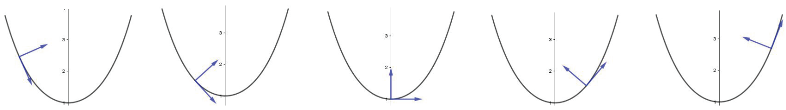
Se llama **diedro de Frenet**, de la curva regular (I,γ) con $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, a la base de $\mathbb{R}^2$ definida para cada $t \in I$ por:

$$B^{on+} = \left\{ \vec{T}(t),\, \vec{N}(t) \right\}$$



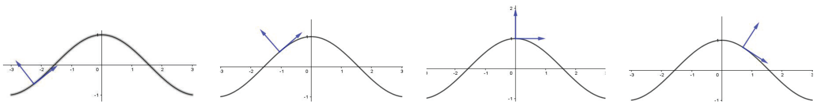
Obtener el diedro de Frenet

$$\gamma(t) = (t, \cosh(t))$$



Obtener el el diedro de Frenet

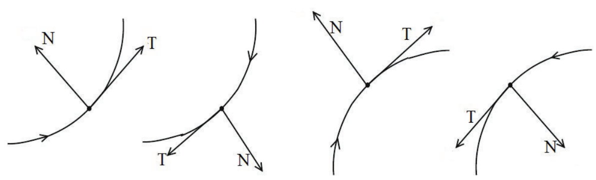
$$\gamma(t) = (t, \cos(t))$$



Curvatura con signo de una curva plana con velocidad unitaria

Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una curva regular con velocidad unitaria, se llama **curvatura con signo** a la función $\kappa_s : (a, b) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{\alpha}''(s) = \kappa_s(s)\vec{N}(s)$$



$\kappa_s > 0$ $\kappa_s < 0$ $\kappa_s < 0$ $\kappa_s > 0$

Curvatura con signo de una curva regular plana

La curvatura con signo de una curva regular plana es la curvatura con signo de cualquiera de sus reparametrizaciones a velocidad unitaria que conserve la orientación de la curva.

Obtención de la curvatura con signo de una curva regular plana

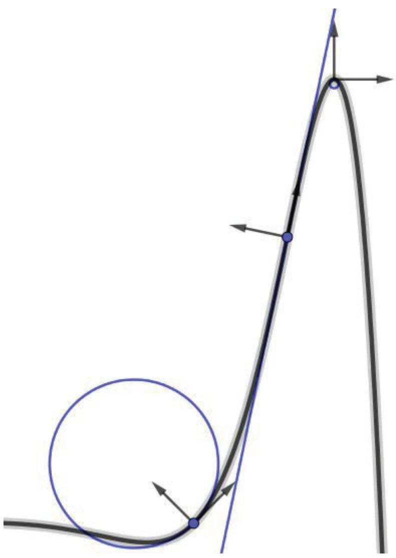
Sea $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una curva regular con parámetro arbitrario, la curvatura con signo es la función $\kappa_s : (a, b) \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)}{\| \vec{\gamma}'(t) \|^3} = \kappa_s(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Relación entre curvatura con signo y curvatura

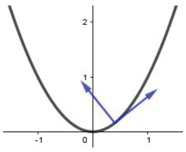
Para toda curva regular $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ se verifica que

$$|\kappa_s| = \kappa$$



Obtener la curvatura con signo

$$\gamma(t) = (t, t^2)$$



Calcular la curvatura con signo

$$\alpha(t) = (t,\ e^t \sin(t)) \qquad \text{en} \qquad t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{\pi}{2}, \quad t_2 = \frac{3\pi}{4}$$