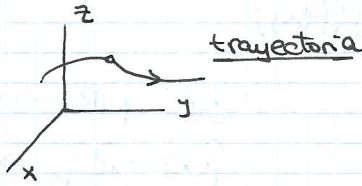


OBSER: Dado $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ se puede pensar en funciones de $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Ejemplo:

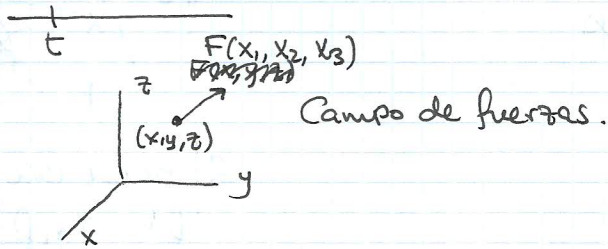
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \rightarrow f(t) = (x, x_2, x_3)$$



$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \rightarrow F(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$$



Usualmente una función

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por una

fórmula.

Ejemplo: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Se llama dominio de f al conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ donde la fórmula tiene sentido.

Ejemplo: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$f(x) = \sum \frac{x^n}{n!}$ esta serie converge $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$

Se llama imagen de f

$$\text{Im } f = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in \text{Dom } f\}$$

DEF: Dado $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función se llama gráfica de f

$$\text{Graf } f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \text{Dom } f\}$$

31-10-14

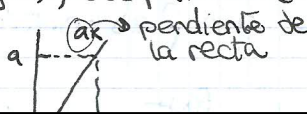
OPERACIONES CON FUNCIONES

Dadas dos funciones $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se pueden sumar $(f + g)(x)$

DEF $f(x) + g(x)$; multiplicar $(fg)(x) \stackrel{\text{DEF}}{=} f(x)g(x)$; en particular si $g \equiv \alpha$ $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

dividir si $g(x) \neq 0$ $(\frac{f}{g})(x) \stackrel{\text{DEF}}{=} \frac{f(x)}{g(x)}$

Siendo: $0(x) = 0 \in \mathbb{R}$ y $f(x) = x$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

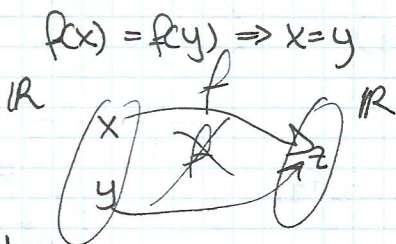
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas f_1 y $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. De modo que $\text{Im}f \subseteq \text{Dom}$ y se define ~~como~~ la composición de f con g $g \circ f(x) \stackrel{\text{DEF}}{=} g(f(x))$.

Ejemplo!: $h(x) = (x^2 + 2x + 2)^2$
 $g(x) = x^2$ $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2 + 2x + 2$
 y $h(x) = g \circ f(x)$

DEF!: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que f es inyectiva si



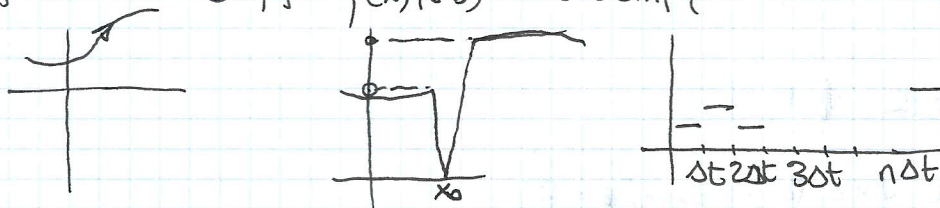
\mathbb{R} | en este caso se define f^{-1} la función inversa como
 $f^{-1}: \text{Im}f \rightarrow \mathbb{R}$
 $z \rightarrow f^{-1}(z)$

el único $x \in \text{Dom} f$ tal que $f(x) = z$ y por tanto $f^{-1} \circ f(x) = x$

Ejemplo!: $f(x) = x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$; $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Efectivamente $\sqrt{x^2} = x$

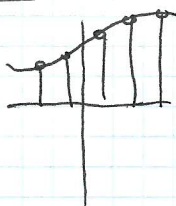
Gráficos de funciones

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\text{Gr}f = \{(x, f(x)) : x \in \text{Dom}f\}$



Nos interesan las funciones con un gráfico de "una pieza".

MUESTREAR!



DEF!: Sea $f(a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

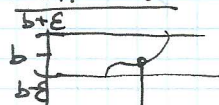
Sea $x_0 \in (a, b)$

a) decimos que existe el límite de f en el punto x_0 si
 $\exists b \in \mathbb{R}$ de modo que $\forall \epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ para el cual si
 $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$ depende de ϵ

NOTACIÓN:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$

b) se dice que f es continua en $x_0 \in (a, b)$ si $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Límites y operaciones

Teorema: sea $f, y (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que para $x_0 \in (a, b)$ existen $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ y $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = l_2$.

1) Existe $\lim_{x \rightarrow x_0} (f+y)(x) = l_1 + l_2$

2) " $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot y)(x) = l_1 \cdot l_2$

3) si $l_2 \neq 0 \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{y}(x) = \frac{l_1}{l_2}$

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x^2 = (\sqrt{2})^2 = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x \cdot x = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x \cdot \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^3 + 18} = \frac{7^2 + 3 \cdot 7 - 1}{7^3 + 18} \neq 0$$

Teorema: sea f_1 y dos funciones con f continua en x_0 y g y continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0 , es decir, $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ y si $\exists \lim_{x \rightarrow f(x_0)} g(x) = g(f(x_0)) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f = g(f(x_0))$.

3-11-14

Otros límites

Ej: $f(x) = \frac{1}{x} \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) \text{ GRANDE}$

si $x = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$

DEF: sea $f(a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$

A) se dice que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \stackrel{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \forall M > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq M$$

B) se dice que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \text{ si } \forall N < 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq N$$

Teorema: sea $g(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$:

A) si $y(x) \geq 0$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{y(x)} = \infty$

B) si $y(x) \leq 0$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{y(x)} = -\infty$

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$

c) se dice que el límite por la izquierda de f en x_0 es $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \stackrel{\text{DEF}}{\Leftrightarrow}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

DEF: $f(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que la recta $x = x_0$, $x_0 \in (a, b)$ es una asíntota vertical de f si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm \infty$ ó si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm \infty$



Limites en el infinito:

$f(-\infty, \infty) = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

DEF: $f: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que:

A) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \stackrel{DEF}{\Leftrightarrow} \forall \epsilon > 0 \exists M > 0$ tal que si $x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

B) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \stackrel{DEF}{\Leftrightarrow} \forall R > 0 \exists M > 0$ tal que si $x > M \Rightarrow f(x) > R$

C) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \stackrel{DEF}{\Leftrightarrow} \forall S < 0 \exists M > 0$ tal que si $x > M \Rightarrow f(x) < S$

DEF: Sea $f: (-\infty, \infty) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que f tiene asíntota horizontal en $y = l$ si

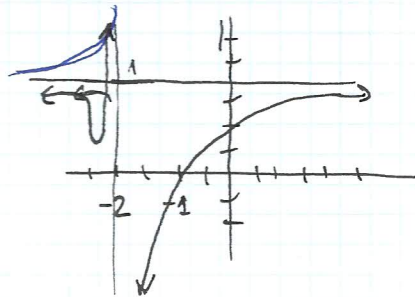
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ ó bien si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

Ej:

$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x+2} = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1$



$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x+2} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < -2 \\ -\infty & \text{si } x > -2 \end{cases}$ $x = -2$ Asíntota vertical

$y = 1$ tiene una asíntota (doble)

DEF: Sea $f: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que f tiene una asíntota oblicua en $y = ax + b$

si A) $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ y $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b$ ó bien B) $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ y $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax = b$

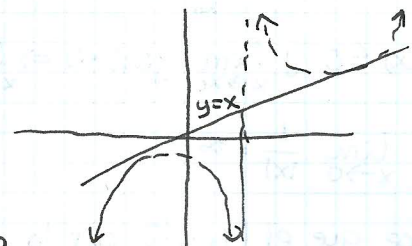
Ej: $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ Estudio: Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

f continua: $\mathbb{R} - \{1\}$

$x_0 \in \mathbb{R} - \{1\} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{x_0^2+1}{x_0-1}$

$-\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x-1} = \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \infty$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

CONTINUIDAD

teorema: $f(a,b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$ son equivalentes

a) f es continua en x_0

b) $\forall (x_n) \rightarrow x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

DEM: $a \Rightarrow b$

f continua en $x_0 \stackrel{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $0 \leq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \epsilon$

Sea $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0 \stackrel{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \forall \epsilon > 0 \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow |x - x_n| < \epsilon$

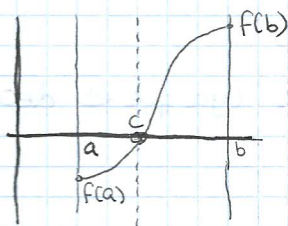
Importancia de las funciones continuas

teorema de Bolzano $f[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y si $f(a) \cdot f(b) < 0$

$\Rightarrow \exists c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$

DEM: Dos casos: (1) $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$

(2) $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$



$$a_1 = a \text{ y } b_1 = b$$

$$k = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

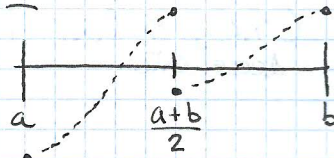
$$a_2 = a_1 \text{ si } f(k) \geq 0 \text{ (} b_2 = k \text{)}$$

$$a_2 = k \text{ si } f(k) < 0 \text{ (} b_2 = b_1 \text{)}$$

Repetimos el algoritmo

$$f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$$

$$f(a_1) < 0 \text{ y } f(b_2) \geq 0$$



Además $a_1 \leq a_2$ y $b_2 \leq b_1$ $a_3 = a_2$ si $f\left(\frac{a_2 + b_2}{2}\right) \geq 0$ ($b_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$)

$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$ si $f\left(\frac{a_2 + b_2}{2}\right) < 0$ ($b_3 = b_2$) se repite el proceso así $\exists (a_n)$ creciente con $f(a_n) < 0$; $\exists (b_n)$ decreciente con $f(b_n) \geq 0$.

OBSE: $b_n \geq a_n$ y $b_n - a_n \leq \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \leq \frac{1}{4}(b_{n-2} - a_{n-2}) \leq \frac{1}{2^n}(b - a)$

Corolario: sea $f[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y si $f(a) < \lambda < f(b)$ o $f(b) < \lambda < f(a)$ entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = \lambda$

$$\boxed{x^{15} + \frac{x^4 - 17x + 13}{(x^2 - 1)^2} = 0}$$
 ¿tiene solución? $\rightarrow f(x) = (x^2 - 1)^2 x^{15} + x^4 - 17x + 13 = 0$ (Grado 19)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

teorema: si $f[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces está acotada, e.d. $\exists M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$

Ejemplo: $f(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty ; \text{ no está acotada}$$



$f(x) = \frac{1}{x} \quad x \in (0,1)$
no tiene máximo
no tiene mínimo

teorema: si $f[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ entonces $\exists x_0 \in [a,b]$ MÁXIMO y $\exists x_1 \in [a,b]$ MÍNIMO.

7-10-14

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in [0,5]$

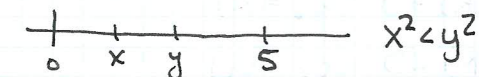
Dom $f = [0,5]$ Continua (sabemos que acotada y que tiene un máximo y un mínimo).

Mínimo f :

$$0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

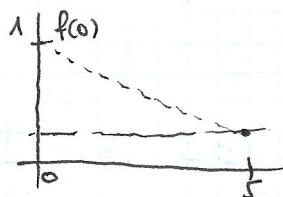
Máximo $x=0$

Mínimo $x=5$ (ya que es decreciente)



$$\frac{1}{1+y^2} < \frac{1}{1+x^2}$$

($x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$)
decreciente



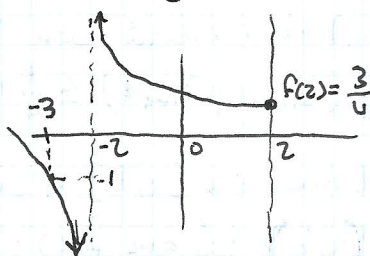
b) $g(x) = \frac{3}{2+x} \quad x \in [-3,2]$

Dom $g = [-3,2] \setminus [-2]$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3}{2+x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3}{2+x} = -\infty$$

No está acotado, no puede tener ni máximo ni mínimo.



$$x < y < -2$$

$$2+x < 2+y < 0$$

$$1 > \frac{2+y}{2+x}$$

$$\frac{1}{2+y} < \frac{1}{2+x} \quad \text{Decreciente}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Funciones uniformemente continuas

DEF: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

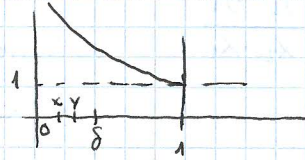
A intervalo. Se dice que f es uniformemente continua en A si $\forall \epsilon > 0$
 $\exists \delta > 0$ tal que si $\forall x, y \in A$ si $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

PROP: $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. A intervalo y f uniformemente continua en A ; entonces $\forall x_0 \in A \Rightarrow f$ continua en x_0

Ejemplos: $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

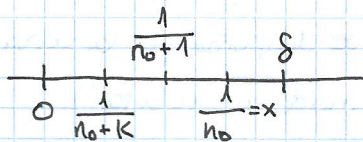
$(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty)$ continua en $(0,1)$



No es uniformemente continua en $(0,1)$; fijamos δ .

Sea $x, y \in (0, \delta)$

Ejemplo $n_0 \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n_0} < \delta$



$$x = \frac{1}{n_0}$$

$$|x-y| < \delta$$

$$y = \frac{1}{n_0+k} \Rightarrow |f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0+k} \right| = |n_0 - (n_0+k)|$$

$$= k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

3.15: $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

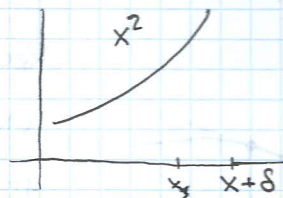
$$x \rightarrow f(x) = x^2$$

es continua $(1, \infty)$

No es uniformemente continua en el $(1, \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$$

Sea $\delta > 0$
 $x_1 \quad x+\delta$



$$|x^2 - (x+\delta)^2| = |x^2 - (x^2 + 2x\delta + \delta^2)|$$

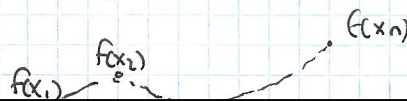
$$= 2x\delta + \delta^2 \geq x\delta \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

$\delta \nexists \exists 0$

teorema: $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

f continua sobre un intervalo cerrado y acotado, entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$

Significado



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99