

Matemáticas I: Álgebra Lineal
Control I. 10-11-2016

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.

Este control constituye el 60 por ciento de la calificación de la asignatura.

Duración del examen: 1 hora y 45 minutos

(1) **Ejercicio (15 puntos)** Determina $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de \mathbb{R}^3 en que $e_1 = (1, 1, 0)_B$, $e_2 = (0, -1, 1)_B$ y $e_3 = (1, 1, 1)_B$, donde e_1, e_2, e_3 son los vectores de la base canónica.

(2) **Ejercicio (20 puntos)** Considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) (5 puntos) Estudia la dimensión del núcleo y de la imagen de una transformación lineal cuya matriz es M .

(b) (10 puntos) Calcula M^{34} .

(c) (5 puntos) Estudia el comportamiento asintótico de $(\frac{1}{3}M)^n$.

(3) **Ejercicio (25 puntos)** Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que cumple lo siguiente:

- Su núcleo viene definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

- Su imagen es el complemento ortogonal del núcleo de f .

- $v = (1, 1, 1, 1)$ es un autovector con autovalor asociado 2.

(a) (10 puntos) Construye la matriz en la base canónica de una f que cumpla las propiedades arriba señaladas.

(b) (5 puntos) Determina si f es única. Si la respuesta es afirmativa explica por qué, si es negativa construye otra posible f .

(c) (5 puntos) Determina si puedes imponer adicionalmente que $f(1, 1, 1, 1) = 0$ y que f tenga más autovectores.

(d) (5 puntos) Construye $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de modo que la dimensión de la imagen de $g \circ f$ sea uno.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

π_{A+I}

Controles: Álgebra lineal

(10-11-2016)

①

① la información que nos dan es π_{CB} y nos piden su inversa.

$$\pi_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la inversa, usamos Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_2 - F_1} \pi_{BC} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

② (a) como $\text{Rg} A = 3 \Rightarrow \text{Ker} f = 409 \quad \dim = 0$ ②
 $\text{Im} f = 123 \quad \dim = 3$

(b) Diagonalización

$$\det \begin{pmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 3 & 2-x & 3 \\ -3 & -1 & -2-x \end{pmatrix} = -x^3 + 2x^2 + x - 2$$

Autovaleos $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = -1; \lambda_3 = 2$

$\lambda_1 = 1$ $\text{Aut}(1) = \text{Ker}(A - \text{Id}) = \langle (1, 0, 1) \rangle$
 $\lambda_2 = -1$ $\text{Aut}(-1) = \text{Ker}(A + \text{Id}) = \langle (0, 1, -1) \rangle$
 $\lambda_3 = 2$ $\text{Aut}(2) = \text{Ker}(A - 2\text{Id}) = \langle (1, 1, -1) \rangle$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} =$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} =$$

(c) $\left(\frac{1}{3}\pi^4\right) = \frac{\pi^4}{3^4} = p \left(\begin{array}{ccc|c} 2^{1/3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{1/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{1/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{1/3} \end{array} \right) \xrightarrow{p^{-1}} \rightarrow$

3

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

Basis del núcleo: $\begin{cases} (1, 0, 0, -1) = v_1 \\ (0, 1, -1, 0) = v_2 \end{cases}$

Basis de la Imagen: $\begin{cases} (1, 0, 0, 1) = v_3 \\ (1, 1, 1, 1) = v_4 \end{cases}$

Información recibida: $f(v_1) = f(v_2) = 0$
 $f(v_3) = 2v_3$

y tenemos libertad para elegir $f(v_4)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

f(v_4) = 2v_3 + v_4

$$\pi(H)_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

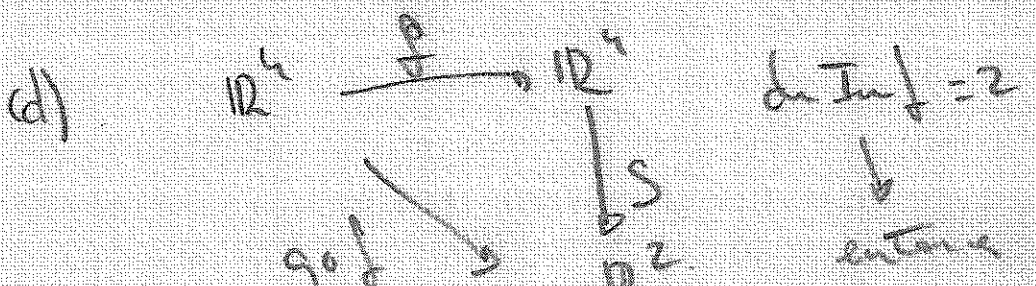
$$\pi(H)_{CC} = \pi(H)_{BC} \pi_{CB}$$

$$\pi_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

(b) Podemos elegir $f(\sigma_3) = 2\sigma_3$. Así nos queda

(c) Como $(1,1,1,1) \notin \ker f$, la condición no se puede hacer.

La elección de kernels de $f(\sigma_3) = \sigma_3$ garantiza ser \mathbb{C} .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70