PROBLEMAS (2 puntos cada problema)

1. Se mide aproximadamente el diámetro (D) de un círculo. Suponiendo que su magnitud se distribuye según la densidad

$$f_D(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a < x < b,\ (a > 0), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

i) Calcular la función de distribución y la función de densidad del área del círculo (A).

ii) Calcular la media y la varianza del área del círculo.

2. Se tienen 4 bolas iguales numeradas del 1 al 4. Se hace una extracción con reemplazamiento y se apunta el número. A continuación se hace una segunda extracción y se anota el mínimo de las dos extracciones realizadas. Sean las v.a. $X \equiv$ número observado en la primera extracción e $Y \equiv$ mínimo de las dos extracciones.

Se pide:

i) Obtener la función de masa de probabilidad conjunta de (X, Y).

ii) Calcular la función de distribución de Y.

iii) Sabiendo que el mínimo entre las dos extracciones ha sido 2, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída sea menor o igual que 3? ¿Y de qué sea un 1?

3. Sea (X, Y) una v.a. bidimensional con función de densidad conjunta

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} kx, & \text{si } (x, y) \in \mathcal{C}, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

siendo $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1,\ y < 1,\ x + y > 1\}$.

Se pide:

i) Hallar el valor de la constante k.

ii) Determinar si X e Y son independientes.

iii) Obtener la curva de regresión de Y sobre X.

iv) Calcular la función de densidad conjunta de (Z, T), siendo $Z = X - Y$ y $T = X + Y$.