Tema 2 - Sistemas en el Dominio Temporal

Cuestiones resueltas

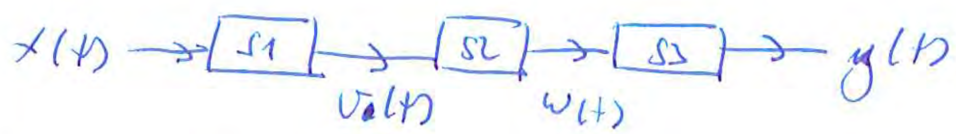
CUESTIONES TEMA 2

C1 Ecuación para la asociación en serie de:

(S1) $y_1(t) = x_1^2(t)$

(S2) $y_2(t) = e^{x_2(t)}$

(S3) $y_3(t) = x_3(t-1)$



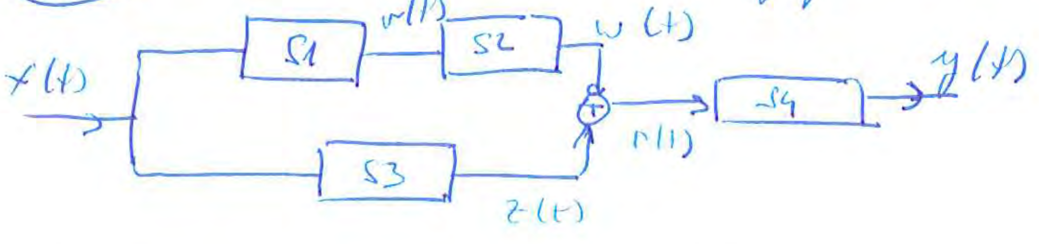
$v(t) = x^2(t)$

$w(t) = e^{v(t)} = e^{x^2(t)}$

$y(t) = w(t-1) = e^{x^2(t-1)}$

$\Rightarrow \boxed{y(t) = e^{x^2(t-1)}}$ Ecuación del sistema total.

C2 Asociación arbitraria de la figura (c), con:



(S1) $y_1(t) = x_1^2(t)$ (S3) $y_3(t) = 2x_3(t)$

(S2) $y_2(t) = x_2(t+3)$ (S4) $y_4(t) = \int_{-\infty}^{t} x_4(z)\,dz$

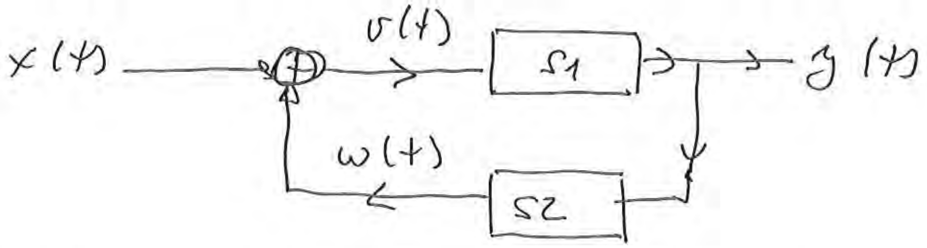
Por tanto:

$v(t) = x^2(t)$; $w(t) = v(t+3) = x^2(t+3)$;

$z(t) = 2x(t)$; $r(t) = w(t) + z(t) = 2x(t) + x^2(t+3)$;

$y(t) = \int_{-\infty}^{t} r(z)\,dz \Rightarrow \boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{t} (2x(z) + x^2(z+3))\,dz}$

(C3) Asociación realimentada en (d):



$(S1)\ y_1(t) = x_1^2(t)$ $\qquad$ $(S2)\ y_2(t) = x_2(t-1)$

Tenemos que:

$$v(t) = x(t) + w(t) = x(t) + y(t-1)$$
$$w(t) = y(t-1)$$
$$\boxed{y(t) = v^2(t) = (x(t) + y(t-1))^2}$$

(C4) Indique razonadamente si los sistemas tienen memoria:

(1) $y(t) = t \cdot x(t)$. <u>Sin memoria</u>, ya que la salida en el instante actual "t" sólo depende de la entrada en el mismo instante "t".

(2) $y(t) = x(t+4)$. <u>Con memoria</u>, ya que la salida en el instante actual "t" depende de la entrada en "$t+4$".

(3) $y(t) = \sum_{k=-3}^{0} x(t-k) = x(t+3) + x(t+2) + x(t+1) + x(t)$.

<u>Con memoria</u>, ya que la salida en "t" depende de la entrada en "$t+3$", "$t+2$", "$t+1$".

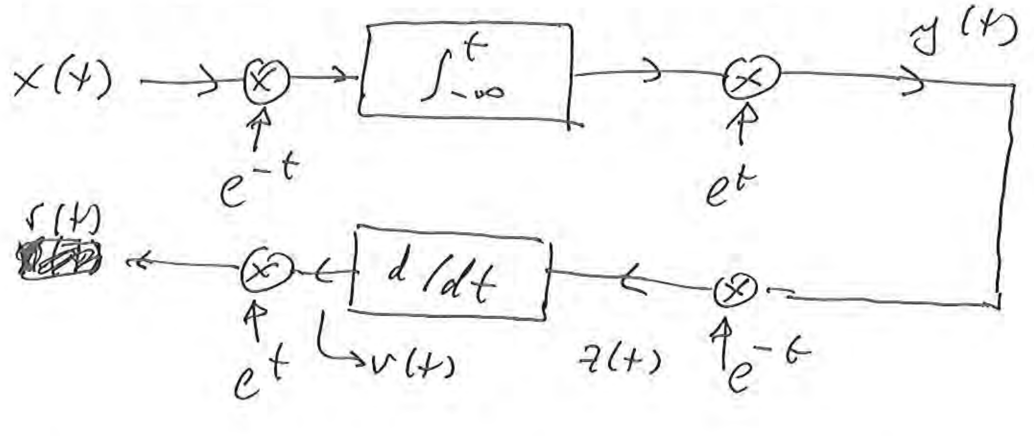
(4) $y(t) = x(-t)$. Con memoria, ya que por ejemplo, la salida en $t = 3$ seg depende de la entrada en $t = -3$ seg.

(5) $y(t) = \cos(3t) \cdot x(t)$. Sin memoria, ya que la salida en el instante actual "t" sólo depende de la entrada en el mismo instante "t". (Nótese que el coseno, aunque depende de "$3t$", no es ni la entrada "x" ni la salida "y", sino solo un factor de multiplicación).

(6) $y(t) = x(t) + 0'5\, y(t-2)$. Con memoria, ya que la salida en el instante actual "t" depende de la salida en "$t-2$".

$\boxed{\text{P12 - EJEMPLOS}}$ Demostrar con subsistemas que es invertible:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{t-\tau} x(\tau)\, d\tau = e^{t} \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau} x(\tau)\, d\tau$$



Comprobamos y hacemos la ecuación del sistema inverso:

$$z(t) = e^{-t} \cdot y(t)$$

$$v(t) = \frac{dz(t)}{dt} = -e^{-t} \cdot y(t) + e^{-t} \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\boxed{r(t) = e^{t} \cdot v(t) = \frac{dy(t)}{dt} - y(t)}$$

Sistema inverso, en el que la entrada es "$y(t)$", y la salida se denomina $r(t)$. Si está bien hecho, entonces $r(t) = x(t)$. ¿Lo comprobamos?

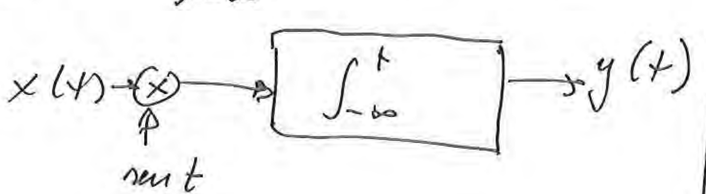
Recordamos que $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{t-\tau} x(\tau)\, d\tau$

$$r(t) = \frac{dy(t)}{dt} - y(t) = e^{t} \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau} x(\tau)\, d\tau +$$

$$+ e^{t} \cdot \left[e^{-t} x(t) \right] - e^{t} \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau} x(\tau)\, d\tau = \boxed{x(t)}$$

Demostramos ahora con subsistema que no es invertible:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \operatorname{sen}(\tau) x(\tau)\, d\tau.$$



Al multiplicar por sen t, puedo multiplicar algunos valores por cero, y se perderá información ⇒ No invertible.

Busco un contraejemplo. Dos señales distintas que den la misma salida:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = \delta(t) \rightarrow y_1(t) = 0 \\ x_2(t) = -\delta(t) \rightarrow y_2(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\text{No invertible.}}$$

E5. Estudiar la invertibilidad de:

(1) $y(t) = x(t-4)$. Es un sistema retardado, y por tanto no se destruye información. El sistema inverso puede obtenerse por inspección simple de la ecuación.

$$\boxed{z(t) = y(t+4)}$$

(2) $y(t) = \cos[x(t)]$. ¿Se destruye información? Sabemos que el coseno es una función periódica, y que hay ambigüedad para ángulos separados por 2π radianes. Por tanto, busco dos señales de entrada distintas que me den la misma salida, y esto me servirá de contraejemplo.

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = 0 \;\; \forall t \rightarrow y_1(t) = 1 \\ x_2(t) = 2\pi \;\; \forall t \rightarrow y_2(t) = 1 \end{array}\right\} \underline{\text{No invertible.}}$$

(3) $y(t) = t \cdot x(t)$. Al multiplicar por "t", se destruye información para "$t=0$". Busco dos señales que sean distintas en $t=0$, como contraejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = \delta(t) \Rightarrow y_1(t) = 0 \\ x_2(t) = -\delta(t) \Rightarrow y_2(t) = 0 \end{array}\right\} \underline{\text{No es invertible.}}$$

(4) $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$. La derivada destruye información al derivar constantes: busco contraejemplo.

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = 2, \; \forall t \rightarrow y_1(t) = 0 \\ x_2(t) = -1, \; \forall t \rightarrow y_2(t) = 0 \end{array}\right\} \underline{\text{No es invertible}}$$

[Nota: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ sí es invertible]

C6 Estudiar la causalidad de los siguientes sistemas:

(1) $y(t) = x(-t)$.

No es causal, porque puedo encontrar instantes de tiempo en los que la salida depende del futuro, por ejemplo,

$t = -2 \Rightarrow y(-2) = x(2)$

No es anticausal, porque puedo encontrar instantes de tiempo en los que la salida depende del pasado, por ejemplo,

$t = 2 \Rightarrow y(2) = x(-2)$

$\Rightarrow$ Sistema "no causal".

(2) $y(t) = x(t) \cdot \cos(t+1)$. La salida en cada instante no depende del futuro, por tanto es causal.

[Notese que $\cos(t+1)$ es un factor multiplicativo, y no tiene que ver ni con la entrada ni con la salida en $t+1$].

(3) $y(t) = A \cdot x(t)$. La salida en cada instante no depende ni del futuro ni del pasado de las señales entrada y salida. Por tanto, es causal.

(4) $y(t) = \int_{-\infty}^{t+2} x(z)\,dz = \int_{-\infty}^{t} x(z)\,dz + \int_{t}^{t+2} x(z)\,dz$

No es causal, ya que necesita conocer el futuro de la señal de entrada (entre t y $t+2$) para integrarla. No es anticausal porque necesita conocer el pasado de la entrada $\Rightarrow$ Sistema no causal.

(T) Par $\{v(t)\} = \frac{1}{2}\left[v(t) + v(-t)\right]$

$y(t) = \text{Par}\{x(t-1)\} = \frac{1}{2}\left[x(t-1) + x(-t-1)\right]$

No es causal, por ejemplo para $t=-10$:

$$y(-10) = \frac{1}{2}\left(x(-11) + x(9)\right)$$

la salida depende del futuro $(t=9)$ de la entrada. El mismo ejemplo sirve para ver que la salida en ese instante depende también del pasado, por lo que no es anticausal.

$\Rightarrow$ Sistema no causal.

(C7) Estudiar la estabilidad de los sistemas:

(1) $y(t) = \left[x(t)\right]^2$. Demostramos que es estable, con la demostración para el caso general:

$$|x(t)| \leq k_x \Rightarrow |y(t)| = |x^2(t)| =$$
$$= |x(t)|^2 \leq \boxed{k_x^2 = k_y.} \Rightarrow \text{Estable.}$$

(2) Sistema derivador. Demostramos que es inestable con un contraejemplo: busco una entrada acotada para el cual la salida no está acotada.

$$x(t) = u(t) \Rightarrow |x(t)| \leq 1 \quad \forall t$$

$y(t) = \delta(t)$, no está acotada en $t=0$ $(\delta(0) = \infty)$

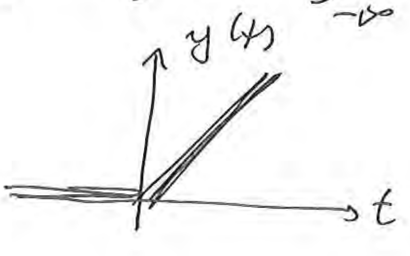
$\Rightarrow$ No es estable.

(3) Sistema integrador: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$

Demuestro que no es estable con un contraejemplo: busco una señal de entrada acotada cuya salida no esté acotada.

$x(t) = k$ (cte $\forall t$) $\Rightarrow$ $y(t) = \infty \ \forall t$.
(acotada)

Otro ejemplo: $x(t) = u(t)$, acotada, $|x(t)| \leq 1 \ \forall t$
pero $y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau = t \cdot u(t)$.



$y(t)$ no está acotada. $\nexists K_y \,/\, |y(t)| \leq K_y$
$\Rightarrow$ Sistema inestable.

(4) $y(t) = t \cdot x(t)$. Multiplico por "t", que es un factor que crece continuamente. Busco un contraejemplo.
$x(t) = u(t)$, acotada ya que $|x(t)| \leq 1 \ \forall t$
Sin embargo, $y(t) = t \cdot u(t)$ no está acotada.
$\Rightarrow$ Sistema inestable.

(5) $y(t) = x(-t)$. Demostramos que es estable:
$|x(t)| \leq K_x \Rightarrow |y(t)| = |x(-t)| \leq \boxed{K_x = K_y}$
$\Rightarrow$ Sistema estable.

(6) $y(t) = x(t-2) + 3\,x(t+2)$

$$|x(t)| \leq k_x \Rightarrow |y(t)| = |x(t-2) + 3\,x(t+2)| \leq$$
$$\leq \underbrace{|x(t-2)|}_{\leq k_x} + 3\underbrace{|x(t+2)|}_{\leq k_x} \leq \boxed{4k_x = k_y} \Rightarrow \underline{\text{Estable.}}$$

(7) $y(t) = \text{Impar}\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$

$$|x(t)| \leq k_x \Rightarrow |y(t)| = \left|\frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\Big[\underset{k_x}{\underset{\wedge|}{|x(t)|}} + \underset{k_x}{\underset{\wedge|}{|x(-t)|}}\Big] = \boxed{k_x = k_y} \Rightarrow \underline{\text{Estable.}}$$

(8) $y(t) = e^{x(t)}$.

$$|x(t)| \leq k_x \Rightarrow |y(t)| = |e^{x(t)}| \leq e^{|x(t)|} \leq \boxed{e^{k_x} = k_y}$$
$$\Rightarrow \underline{\text{Estable.}}$$

(C8) Estudiar la invarianza temporal.

(1) $y(t) = \cos\{x(t)\}$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \cos\{x_1(t)\}$$

$$y_1(t-t_0) = \underline{\cos\{x_1(t-t_0)\}} \overset{\text{Invariante}}{=}$$

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = \cos\{x_2(t)\} = \underline{\cos\{x_1(t-t_0)\}}$$

(2) $y(t) = t + x(t)$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = t + x_1(t)$$

$$\rightarrow y_1(t-t_0) = \underline{t - t_0 + x_1(t-t_0)} \overset{\text{Variante}}{\neq}$$

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = t + x_2(t) = \underline{t + x_1(t-t_0)}$$

(3) $y(t) = t \cdot x(t)$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = t \cdot x_1(t)$$

$$\rightarrow y_1(t-t_0) = \underline{(t-t_0)\, x_1(t-t_0)} \overset{\text{Variante}}{\neq}$$

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = t \cdot x_2(t) = \underline{t \cdot x_1(t-t_0)}$$

(4) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\, d\tau$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\, d\tau \rightarrow y_1(t-t_0) = \underline{\int_{-\infty}^{2t-2t_0} x_1(\tau)\, d\tau}$$

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau - t_0)\, d\tau =$$

$$\begin{bmatrix} \tau - t_0 = \sigma \\ d\tau = d\sigma \\ \dots \end{bmatrix} = \underline{\int_{-\infty}^{2t-t_0} x_1(\sigma)\, d\sigma}$$

$$\Rightarrow \text{Variante}$$

(5) $x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{x_1(t+\Delta) - x_1(t)}{\Delta}$; $y_1(t-t_0) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{x_1(t-t_0+\Delta) - x_1(t-t_0)}{\Delta}$

$x_2(t) = x_1(t-t_0) \Rightarrow y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{x_2(t+\Delta) - x_2(t)}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{x_1(t+\Delta-t_0) - x_1(t-t_0)}{\Delta}$ // INVARIANTE TEMPORAL

C9 Estudiar linealidad:

(1) $y(t) = t \cdot x(t)$.

$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = t \cdot x_1(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = t \cdot x_2(t)$.

$x_3(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \rightarrow y_3(t) = t \cdot x_3(t) =$

$= t\,(a x_1(t) + b x_2(t)) = a t x_1(t) + b t x_2(t) = a y_1(t) + b y_2(t)$

$\Rightarrow$ lineal.

(2) $y(t) = x^2(t)$

$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$

$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \rightarrow y_3(t) = x_3^2(t) =$

$= (a x_1(t) + b x_2(t))^2 = a^2 x_1^2(t) + b^2 x_2^2(t) +$

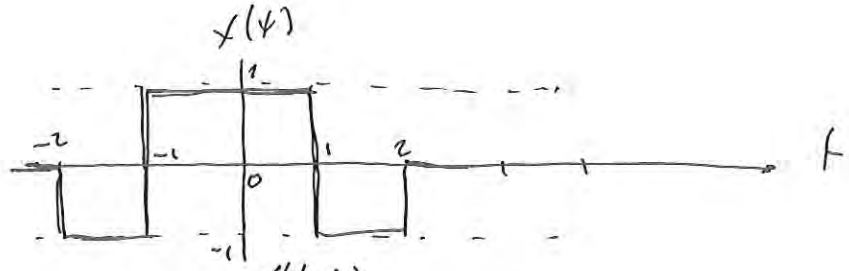
$+ ab\, x_1(t)\, x_2(t) \neq a y_1(t) + b y_2(t)$

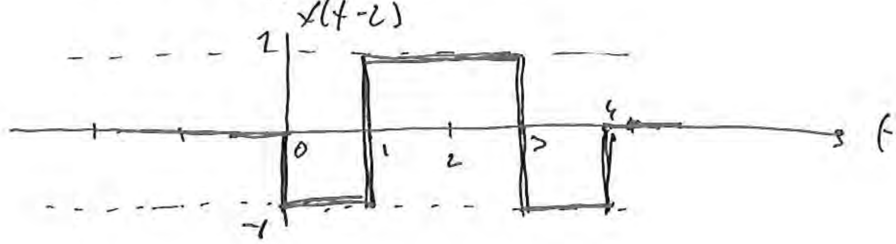
$\Rightarrow$ No lineal.

(3) $y(t) = 2x(t) + 3$

$x(t) = 0 \Rightarrow y(t) = 3 \;\forall t$, por tanto, como $y(t) \neq 0$, no puede ser un sistema lineal.

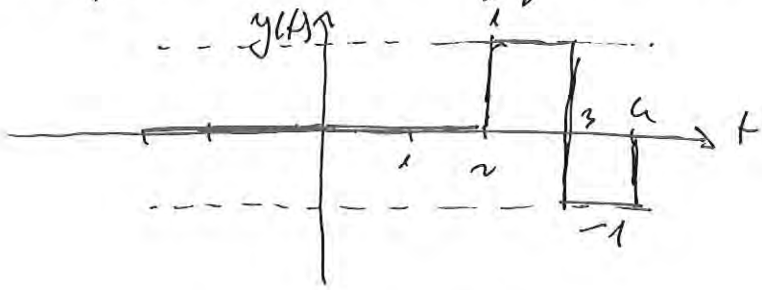
C10





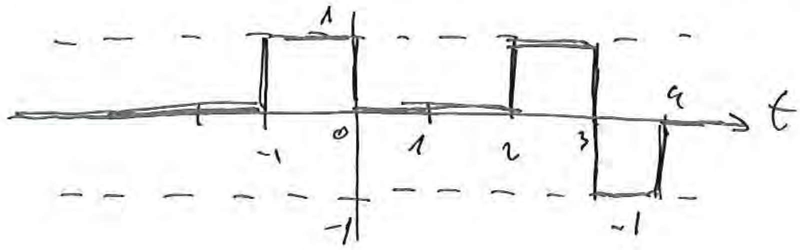
$$(S1)\quad y(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ x(t)+x(t-2), & t\geq 0\end{cases}$$

La respuesta para la $x(t)$ de la figura será:



$$(S2)\quad y(t)=\begin{cases}0, & x(t)<0\\ x(t)+x(t-2), & x(t)\geq 0\end{cases}$$

Esto es, cuando la entrada es no negativa, la salida es la suma de la entrada con la entrada desplazada, así:



(S1) Propiedades. Reescribimos: $\boxed{y(t) = [x(t) + x(t-2)]\,u(t)}$

- Sistema con memoria, ya que utiliza la entrada en "$t-2$".
- No utiliza el futuro, por tanto es causal.
- Destruye información en $t<0$. Busco un contraejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = \delta(t+3) \rightarrow y_1(t) = 0 \\ x_2(t) = \delta(t+5) \rightarrow y_2(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No invertible.}$$

- Linealidad. $x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = [x_1(t) + x_1(t-2)]\cdot u(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = [x_2(t) + x_2(t-2)]\,u(t)$

$$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \rightarrow$$
$$\rightarrow y_3(t) = [x_3(t) + x_3(t-2)]\cdot u(t) =$$
$$= [a x_1(t) + b x_2(t) + a x_1(t-2) + b x_2(t-2)]\cdot u(t) =$$
$$= a y_1(t) + b y_2(t) \Rightarrow \text{Es lineal.}$$

- Invarianza.

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = [x_1(t) + x_1(t-2)]\cdot u(t) \rightarrow$$
$$\rightarrow y_1(t-t_0) = [x_1(t-t_0) + x_1(t-t_0-2)]\,u(t-t_0).$$
$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = [x_2(t) + x_2(t-2)]\cdot u(t) =$$
$$= [x_1(t-t_0) + x_1(t-t_0-2)]\cdot u(t).$$
$$\Rightarrow \text{Es variante.}$$

- Estabilidad.

Será estable ya que o bien vale 0 (más acotado que eso nada) o vale la suma de $x(t)$ y de $x(t-2)$, que si $|x(t)| \le k_x < \infty \Rightarrow |y(t)| \le k_x + k_x = 2k_x < \infty$.

(S2) Podríamos reescribir como:

$$y(t) = [x(t) + x(t-2)] \cdot u(x(t)).$$

Para verlo de otra forma, utilizamos la definición que nos dan:

- Con memoria y causal (razonamiento similar).

- Destruye información cuando $x(t) < 0$. Busco contraejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = -3 \ \forall t \rightarrow y_1(t) = 0 \\ x_2(t) = -1 \ \forall t \rightarrow y_2(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No invertible.}$$

- Linealidad. $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \begin{cases} 0, & x_1(t) < 0 \\ x_1(t) + x_1(t-2), & x_1(t) \geq 0 \end{cases}$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = \begin{cases} 0, & x_2(t) < 0 \\ x_2(t) + x_2(t-2), & x_2(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$x_3(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & x_3(t) < 0 \\ x_3(t) + x_3(t-2), & x_3(t) \geq 0 \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} 0, & a x_1(t) + b x_2(t) < 0 \\ a x_1(t) + b x_2(t) + a x_1(t-2) + b x_2(t-2), & a x_1(t) + b x_2(t) \geq 0 \end{array}\right\}$$

$$\neq y_1(t) + y_2(t) \quad (\text{¿Por qué?}) \Rightarrow \text{No es lineal.}$$

- Invarianza. $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & x_1(t) > 0 \\ x_1(t) + x_1(t-2), & x_1(t) \geq 0 \end{array}\right\}$

$$\rightarrow y_1(t-t_0) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & x_1(t-t_0) > 0 \\ x_1(t-t_0) + x_1(t-t_0-2), & x_1(t-t_0) \geq 0 \end{array}\right\}$$

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & x_2(t) < 0 \\ x_2(t) + x_2(t-2), & x_2(t) \geq 0 \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} 0, & x_1(t-t_0) < 0 \\ x_1(t-t_0) + x_1(t-t_0-2), & x_1(t-t_0) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Invariante.}$$

- El sistema es estable por la misma razón que el anterior.

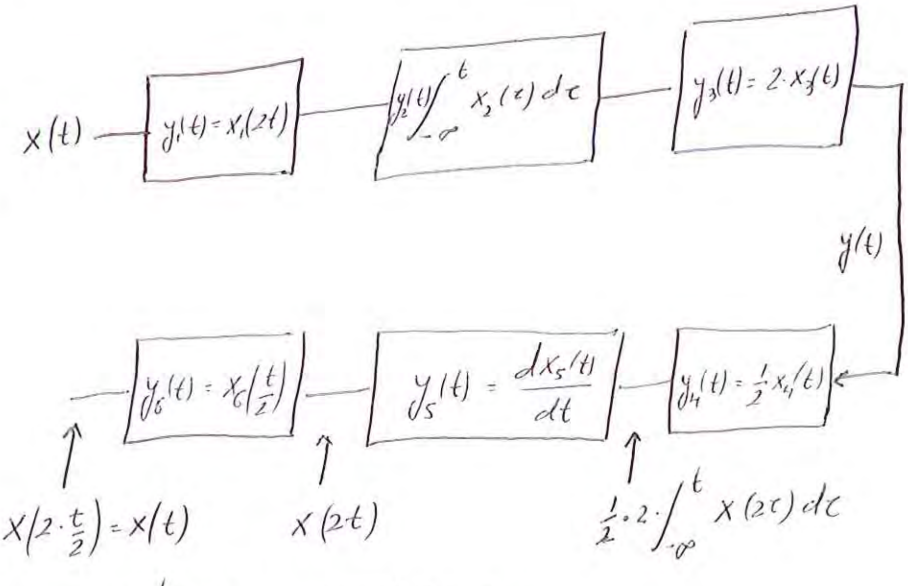
(14')

C 11) Estudiar las propiedades del sistema

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\, d\tau$$

- Es un sistema "con memoria" pues necesita saber el valor de la entrada desde menos infinito.
- Es no causal, ya que necesita información del futuro ya que por ejemplo para saber $y(t=2) = \int_{-\infty}^{4}$ necesito saber el valor de la entrada hasta en $t=4$ para poder integrar.
- $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(2l)\cdot 2 \cdot dl = 2\cdot \int_{-\infty}^{t} x(2l)\, dl$

$\tau = 2l$
$d\tau = 2\cdot dl$
si $\tau = -\infty \Rightarrow l = -\infty$
si $\tau = 2t \Rightarrow l = t$



Es invertible y su sistema inverso es:

$$z(t) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta \to 0} \frac{l\left(\frac{t}{2} + \Delta\right) - l\left(\frac{t}{2}\right)}{\Delta}$$

- El sistema no es estable ya que una entrada acotada como por ejemplo $x_1(t) = 1$ produce una salida infinita (al integrar desde $-\infty$).

- Estudiamos la invarianza temporal.

$$x_1(t) \Rightarrow \quad y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\, d\tau$$

$$y_1(t-t_0) = \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x_1(\tau)\, d\tau$$

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \Rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau - t_0)\, d\tau$$

Para poder comparar hacemos el cambio de variable

$$\left\{\begin{array}{l} \tau - t_0 = l \\ d\tau = dl \\ \text{si } \tau = -\infty \Rightarrow l = -\infty \\ \text{si } \tau = 2t \Rightarrow l = 2t - t_0 \end{array}\right\} \Rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t-t_0} x_1(l)\, dl$$

Conclusión: $y_1(t-t_0) \neq y_2(t)$ ya que los límites de integración son distintos, luego el sistema es "variante temporal".

- Estudiamos la linealidad.

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\, d\tau \\ x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\, d\tau \end{array}\right\} \Rightarrow y_1(t) + y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\, d\tau$$

Si $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y_3(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_3(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{2t} \left[x_1(\tau) + x_2(\tau)\right] d\tau$

$y_1(t) + y_2(t) = y_3(t)$, ya que la integral de una suma es la suma de las integrales, luego cumple aditividad.

$$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\, d\tau \; ; \quad \alpha \cdot y_1(t) = \alpha \cdot \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\, d\tau$$

$$x_2(t) = \alpha \cdot x_1(t) \Rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{2t} \alpha \cdot x_1(\tau)\, d\tau = \alpha \cdot \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\, d\tau$$

Cumple por lo tanto escalado. Conclusión ES LINEAL.

C12

Sistema del que se conoce:

(1) $x_1(t) = \delta(t) \rightarrow y_1(t) = 4\,u(t)$

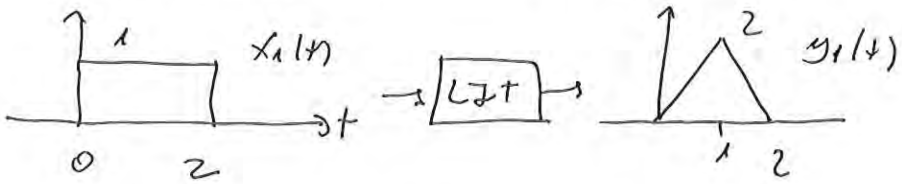
(2) $x_2(t) = u(t-1) \rightarrow y_2(t) = t \cdot \operatorname{sen}(4t) \cdot u(t)$

(3) $x_3(t) = \delta(t-4) \rightarrow y_3(t) = 4\,\delta(t-2)$

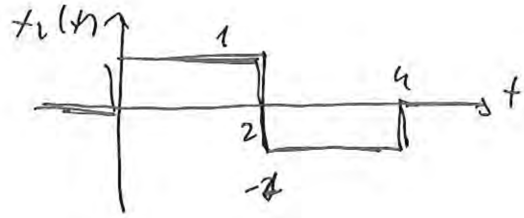
(4) $x_4(t) = \delta(t) + \delta(t-4) \rightarrow y_4(t) = 4\,u(t)$.

- Tiene memoria, en (3), responde al impulso en $t=4$ con otro impulso en $t=2$. Abajo vemos que no es causal y todos los no causales tienen memoria.
- Causalidad. Por (3) no puede ser causal, y por (1) no puede ser anticausal (¿por qué?) ⟹ No causal.
- Invertibilidad: (1) y (4) dan la misma salida para entradas diferentes → no invertible.
- Estabilidad: en (2), una entrada acotada produce una salida no acotada (¿por qué? Dibujar ambas) ($\lim_{t\to\infty}$?)
- Linealidad: $x_4(t) = x_1(t) + x_3(t)$, y sin embargo $y_4(t) \neq y_1(t) + y_3(t) \Rightarrow$ no es lineal.
- Invarianza: $x_3(t) = x_1(t-4)$, y sin embargo vemos que $y_3(t) \neq y_1(t-4) \Rightarrow$ No es invariante.

C13 Sistema LIT: $x_1(t) \to y_1(t)$

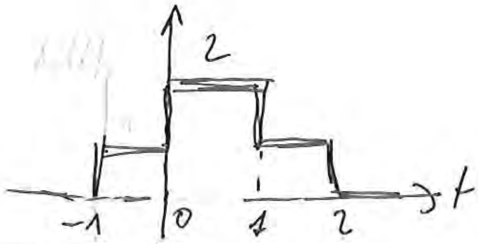


• ¿Respuesta a $x_2(t)$? ¿Y a $x_3(t)$?



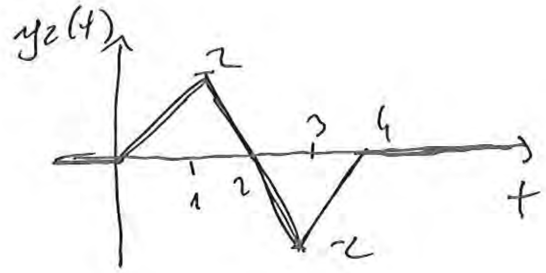
$x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-2) \Rightarrow$

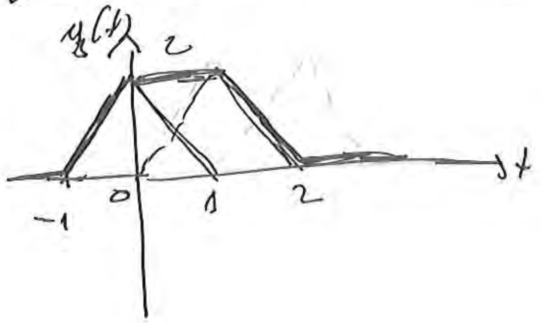
$y_2(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$



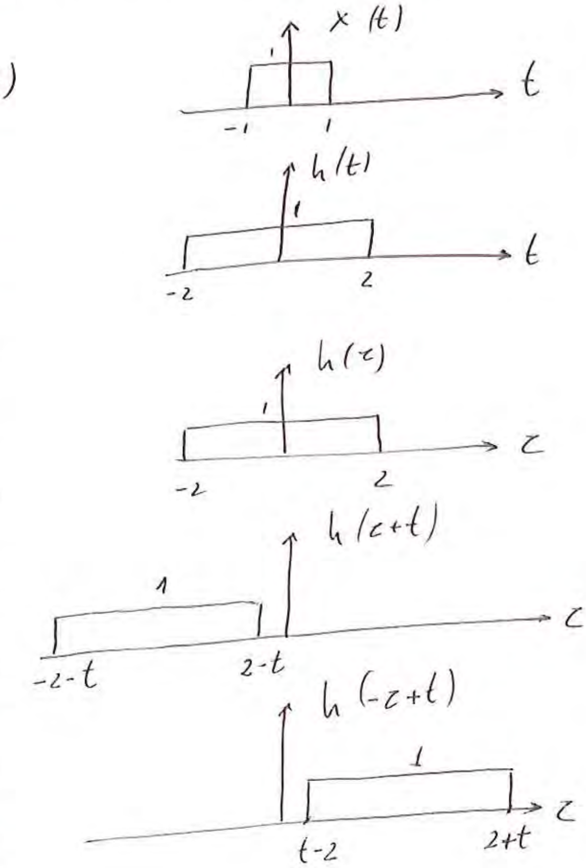
$x_3(t) = x_1(t) + x_1(t+1) \Rightarrow$

$y_3(t) = y_1(t) + y_1(t+1)$

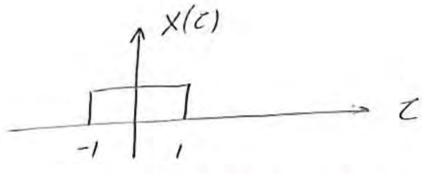


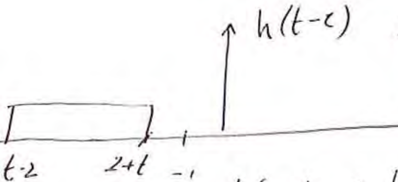


C14 Calcular las convoluciones de la figura: $y(t) = x(t) * h(t)$



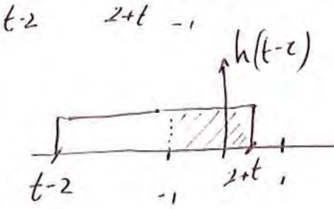
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$





$2+t < -1$

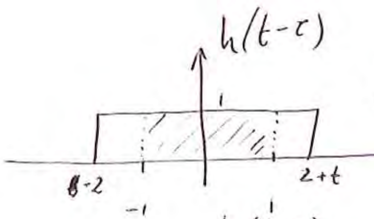
$\boxed{t < -3} \Rightarrow \boxed{y(t) = 0}$



$$\left.\begin{array}{l} 2+t > -1 \Rightarrow t > -3 \\ 2+t < 1 \Rightarrow t < -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{-3 < t < -1}$$

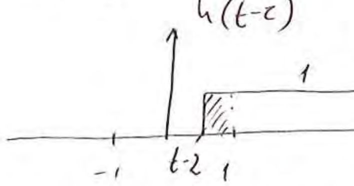
$$y(t) = \int_{-1}^{2+t} 1 \cdot 1\, d\tau = \tau \Big|_{-1}^{2+t}$$

$$\boxed{y(t) = 2+t-(-1) = t+3}$$



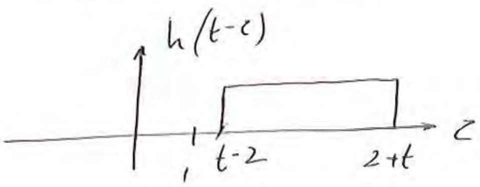
$$\left.\begin{array}{l} 2+t > 1 \Rightarrow t > -1 \\ t-2 < -1 \Rightarrow t < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{-1 < t < 1}$$

$$\boxed{y(t) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, d\tau = \tau \Big|_{-1}^{1} = 1-(-1) = 2}$$



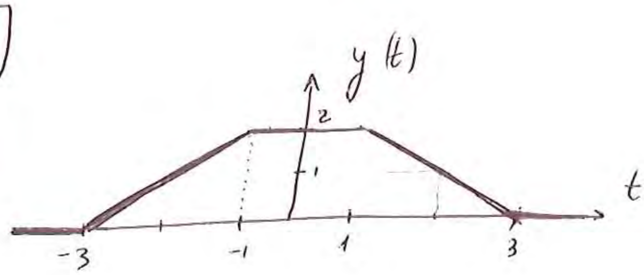
$$\left.\begin{array}{l} t-2 < 1 \Rightarrow t < 3 \\ t-2 > -1 \Rightarrow t > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{1 < t < 3}$$

$$\boxed{y(t) = \int_{t-2}^{1} 1 \cdot 1\, d\tau = \tau \Big|_{t-2}^{1} = 1-(t-2) = -t+3}$$



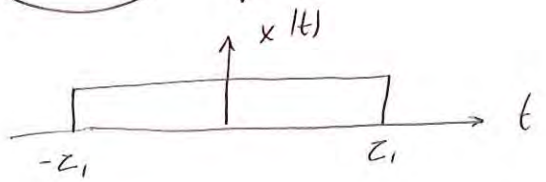
$t-2 > 1 \Rightarrow \boxed{t > 3}$

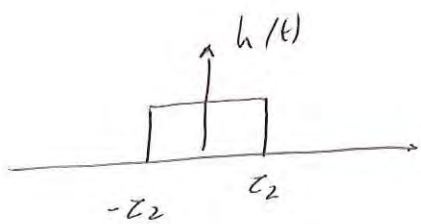
$$\boxed{y(t) = 0}$$



Agrupando:
$$y(t) \begin{cases} 0 & \text{si } t < -3 \\ t+3 & \text{si } -3 \leq t < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \leq t < 1 \\ -t+3 & \text{si } 1 \leq t < 3 \\ 0 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

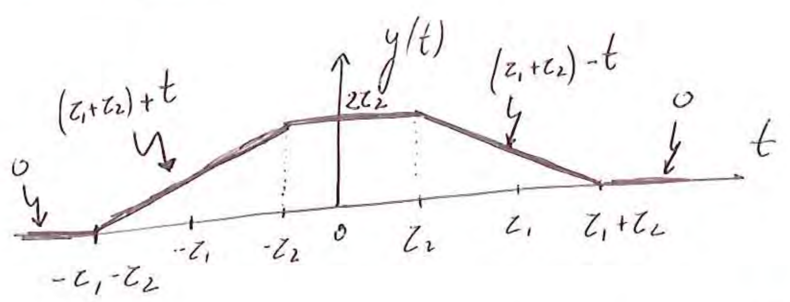
C14 $y(t) = x(t) * h(t)$



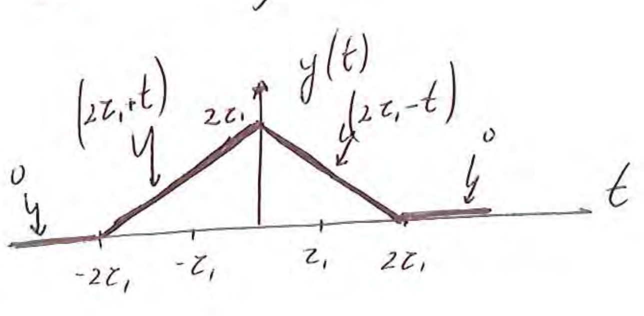


Según el dibujo $\tau_1 > \tau_2$

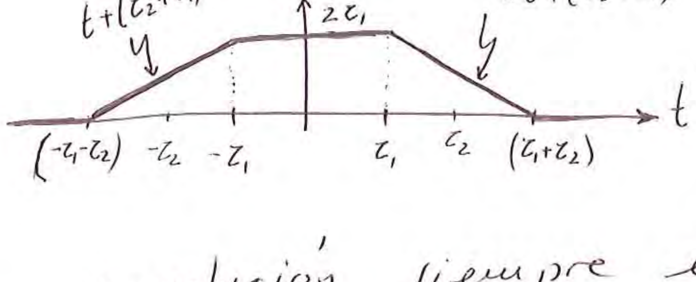
Haciendo el mismo procedimiento que en apartado anterior saldrá:



Si en el dibujo $\tau_1 = \tau_2$ entonces:

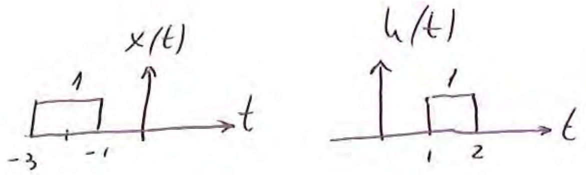


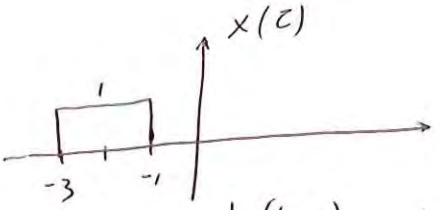
Si en el dibujo $\tau_1 < \tau_2$ entonces:

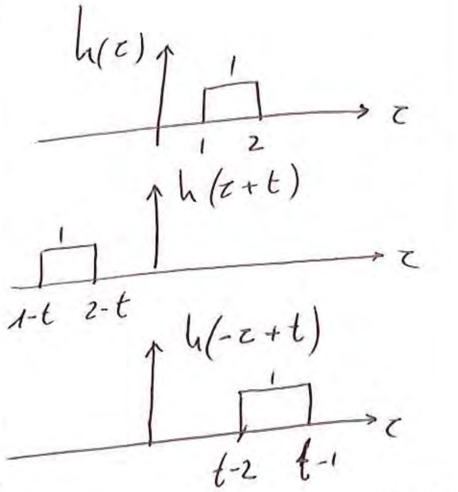


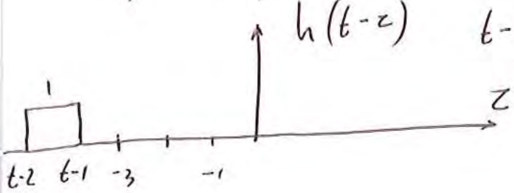
NOTA: Una convolución siempre empieza a tener valor distinto de cero en la suma de los límites inferiores de ambas señales (en este caso $-\tau_1-\tau_2$) y termina en la suma de los límites superiores (en este caso $\tau_1+\tau_2$).

C14 $y(t) = x(t) * h(t)$ con



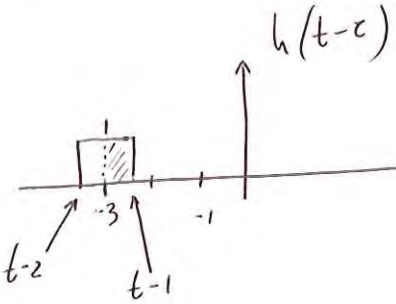






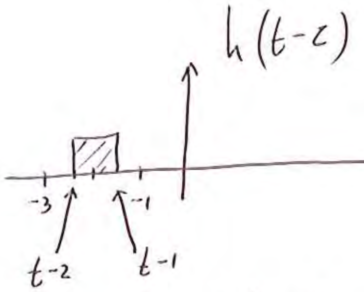
$t-1<-3 \Rightarrow \boxed{t<-2}$

$\boxed{y(t)=0}$



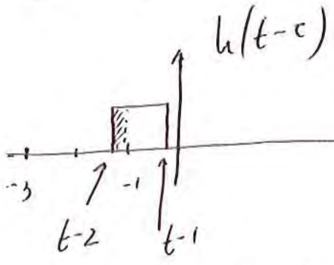
$t-1>-3 \Rightarrow t>-2$
$t-2<-3 \Rightarrow t<-1$ $\Rightarrow \boxed{-2<t<-1}$

$$\boxed{y(t) = \int_{-3}^{t-1} 1\cdot 1\, d\tau = \tau\Big|_{-3}^{t-1} = t-1-(-3) = t+2}$$



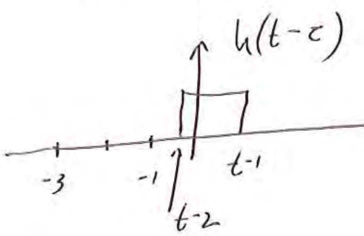
$t-1<-1 \Rightarrow t<0$
$t-2>-3 \Rightarrow t>-1$ $\Big\}\ \boxed{-1<t<0}$

$$\boxed{y(t) = \int_{t-2}^{t-1} 1\cdot 1\, d\tau = \tau\Big|_{t-2}^{t-1} = t-1-(t-2) = 1}$$



$t-1>-1 \Rightarrow t>0$
$t-2<-1 \Rightarrow t<1$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{0<t<1}$

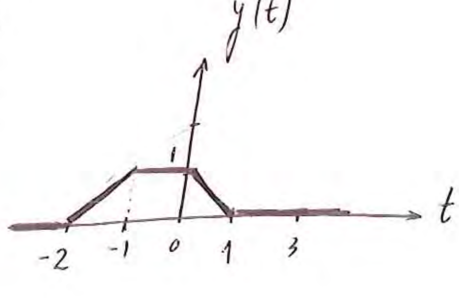
$$\boxed{y(t) = \int_{t-2}^{-1} 1\cdot 1\, d\tau = \tau\Big|_{t-2}^{-1} = -1-(t-2) = -t+1}$$



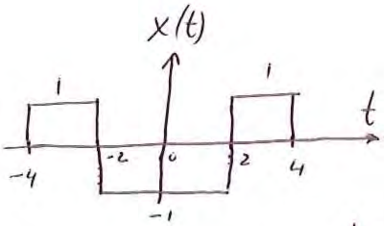
$t-2>-1 \Rightarrow \boxed{t>1}$

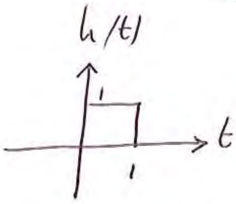
$y(t) = 0$

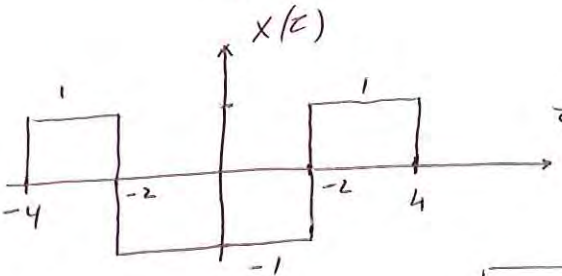
Agrupamos: $y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<-2 \\ t+2 & \text{si } -2\le t<-1 \\ 1 & \text{si } -1\le t<0 \\ -t+1 & \text{si } 0\le t<1 \\ 0 & \text{si } t\ge 1 \end{cases}$

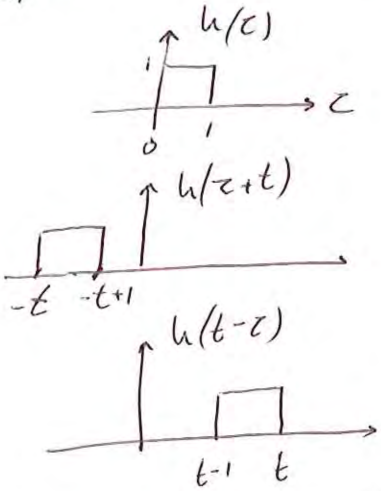


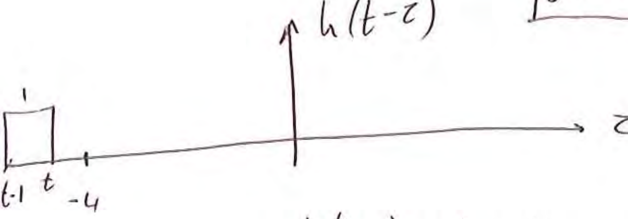
C14 $y(t) = x(t) * h(t)$ con





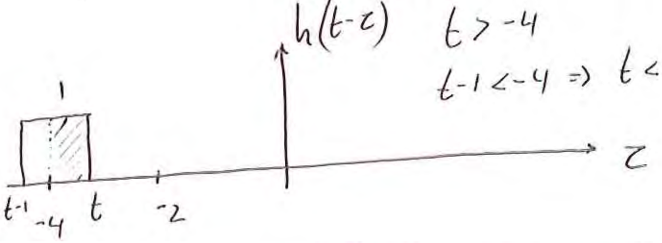






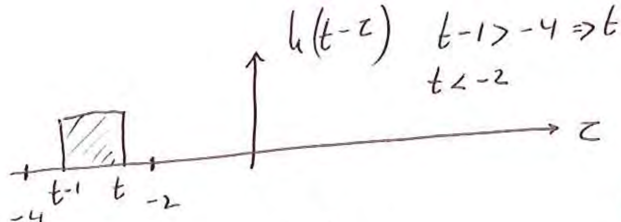
$\boxed{t < -4}$

$\boxed{y(t) = 0}$



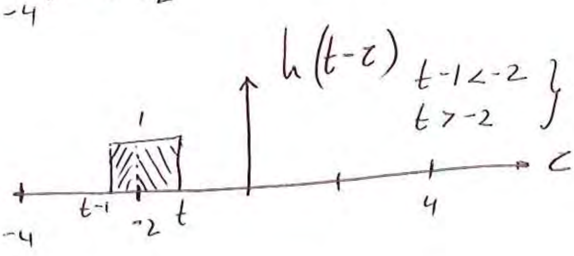
$t > -4$
$t-1 < -4 \Rightarrow t < -3$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{-4 < t < -3}$

$$\boxed{y(t) = \int_{-4}^{t} 1 \cdot 1 \, d\tau = \tau \Big|_{-4}^{t} = t - (-4) = t + 4}$$



$t-1 > -4 \Rightarrow t > -3$
$t < -2$ $\Big\}$ $\boxed{-3 < t < -2}$

$$\boxed{y(t) = \int_{t-1}^{t} 1 \cdot 1 \, d\tau = \tau \Big|_{t-1}^{t} = t - (t-1) = \boxed{1}}$$

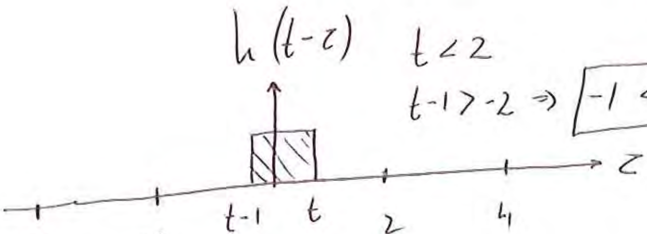


$t-1 < -2$
$t > -2$ $\Big\}$ $\boxed{-2 < t < -1}$

$$y(t) = \int_{t-1}^{-2} 1 \cdot 1 \, d\tau + \int_{-2}^{t} (-1) \cdot (1) \, d\tau =$$

$$= \tau \Big|_{t-1}^{-2} - \tau \Big|_{-2}^{t} = -2 - (t-1) - \left[t - (-2)\right]$$

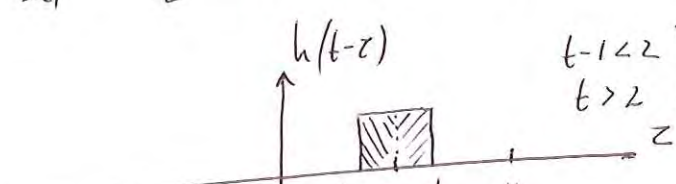
$$\boxed{y(t) = -2 - t + 1 - t - 2 = -2t - 3}$$



$t < 2$
$t-1 > -2 \Rightarrow \boxed{-1 < t < 2}$

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} (-1) \cdot 1 \, d\tau = -\left(\tau\right]_{t-1}^{t} = -\left[t - (t-1)\right]$$

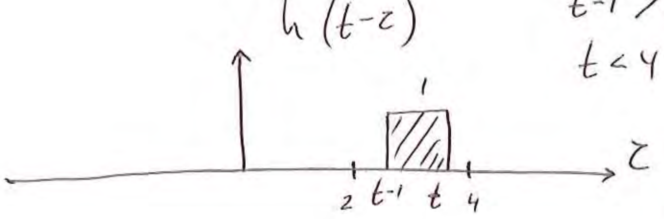
$$\boxed{y(t) = -1}$$



$t-1 < 2$
$t > 2$ $\Big\}$ $\boxed{2 < t < 3}$

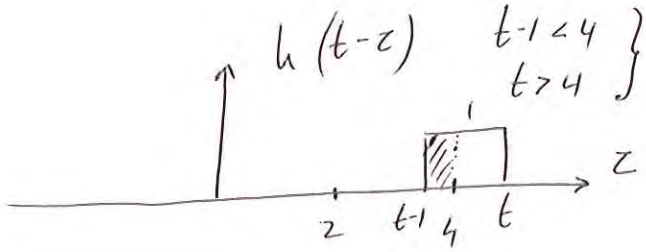
$$y(t) = \int_{t-1}^{2} (-1) \cdot 1 \, d\tau + \int_{2}^{t} 1 \cdot 1 \, d\tau = -\left[2 - (t-1)\right] + t - 2$$

$$\boxed{y(t) = 2t - 5}$$



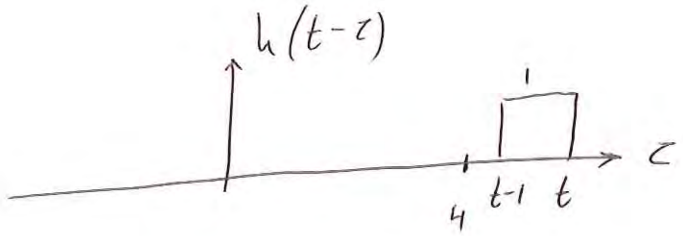
$$\left.\begin{array}{l} t-1>2 \\ t<4 \end{array}\right\} \boxed{3<t<4}$$

$$\boxed{y(t) = \int_{t-1}^{t} 1 \cdot 1 \, d\tau = t-(t-1) = 1}$$



$$\left.\begin{array}{l} t-1<4 \\ t>4 \end{array}\right\} \boxed{4<t<5}$$

$$\boxed{y(t) = \int_{t-1}^{4} 1 \cdot 1 \, d\tau = 4-(t-1) = -t+5}$$

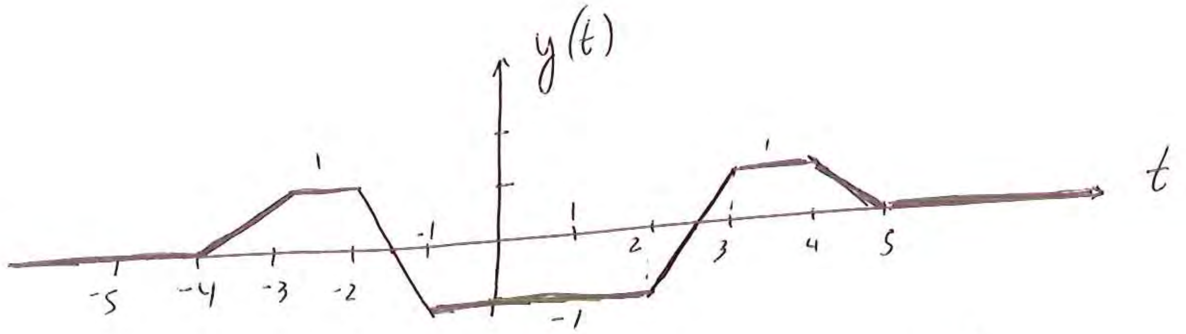


$$t-1>4 \Rightarrow \boxed{t>5}$$

$$\boxed{y(t) = 0}$$

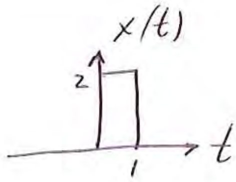
Agrupamos:

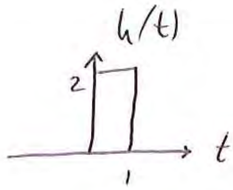
$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<-4 \\ t+4 & \text{si } -4 \leq t < -3 \\ 1 & \text{si } -3 \leq t < -2 \\ -2t-3 & \text{si } -2 \leq t < -1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq t < 2 \\ 2t-5 & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq t < 4 \\ -t+5 & \text{si } 4 \leq t < 5 \\ 0 & \text{si } t \geq 5 \end{cases}$$

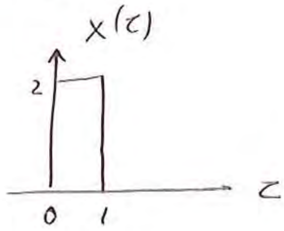


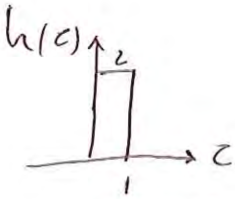
Se cumple que empieza en $(-4+0)$ y termina en $(4+1)$.

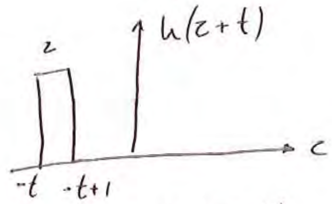
(C 14) $y(t) = x(t) * h(t)$ con

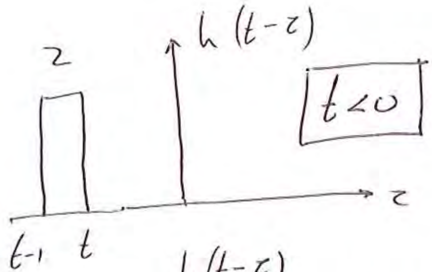




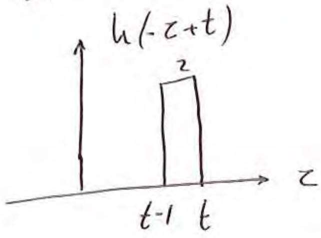


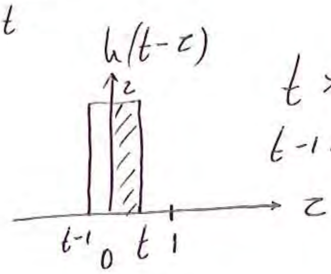






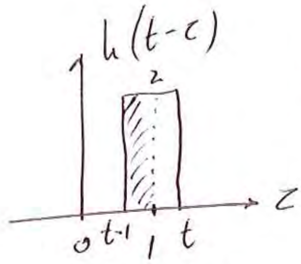
$\boxed{t<0}$ $\boxed{y(t) = 0}$





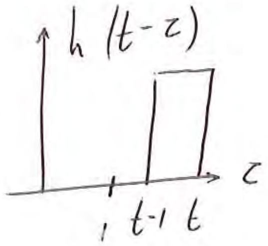
$\left.\begin{array}{l} t>0 \\ t-1<0 \end{array}\right\}$ $\boxed{0<t<1}$

$$\boxed{y(t)} = \int_0^t 2\cdot 2\, d\tau = 4\left[\tau\right]_0^t = 4(t-0) = \boxed{4t}$$



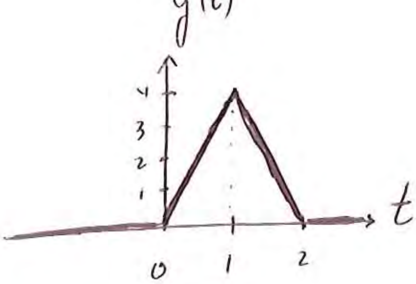
$\left.\begin{array}{l} t-1<1 \\ t>1 \end{array}\right\}$ $1<t<2$

$$\boxed{y(t)} = \int_{t-1}^{1} 2\cdot 2\, d\tau = 4\left[1-(t-1)\right] = 4(2-t) = \boxed{8-4t}$$

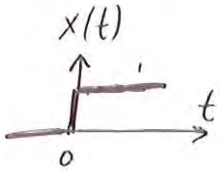


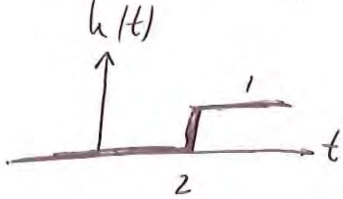
$t-1>1 \Rightarrow \boxed{t>2}$ $\boxed{y(t) = 0}$

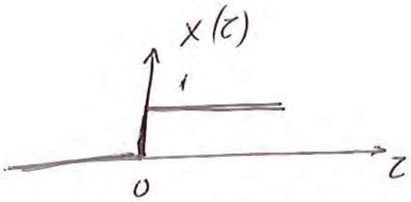
Agrupamos: $y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<0 \\ 4t & \text{si} \quad 0\leq t<1 \\ 8-4t & \text{si} \quad 1\leq t<2 \\ 0 & \text{si} \quad t\geq 2 \end{cases}$

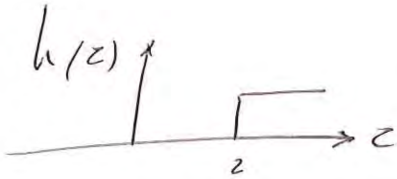


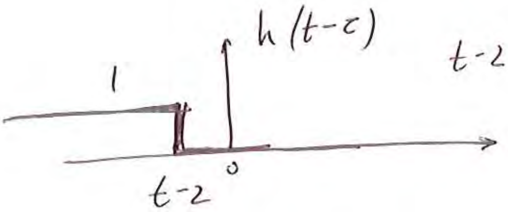
C14 $\quad y(t) = x(t) * h(t)$ con





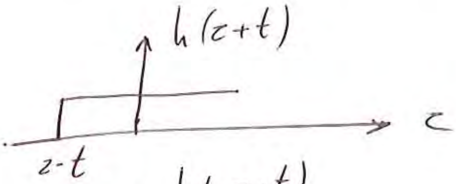


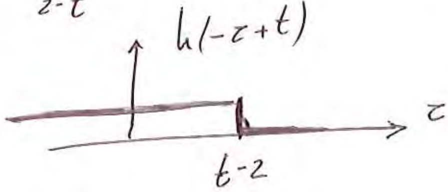


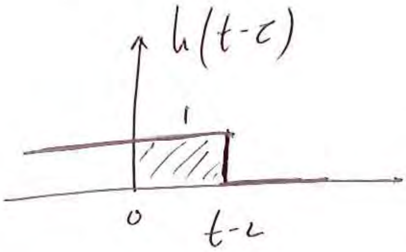


$t-2<0 \Rightarrow \boxed{t<2}$

$\boxed{y(t)=0}$





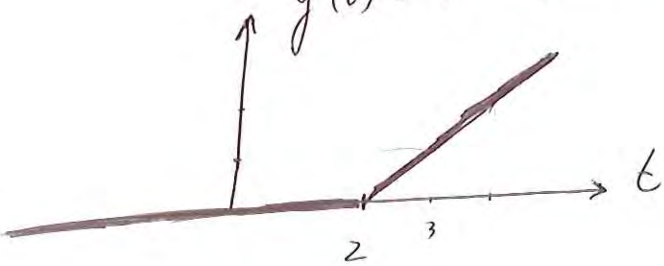


$t-2>0 \Rightarrow \boxed{t>2}$

$$\boxed{y(t) = \int_0^{t-2} 1\cdot 1\, d\tau = \tau \Big|_0^{t-2} = t-2}$$

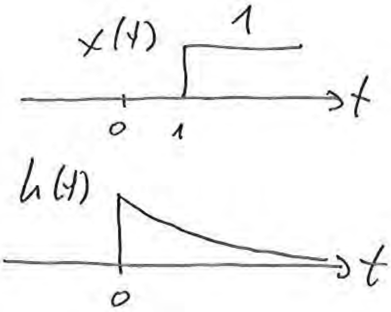
Agrupamos:
$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<2 \\ t-2 & \text{si } t\geq 2 \end{cases}$$

$$y(t) = (t-2)\cdot u(t-2)$$

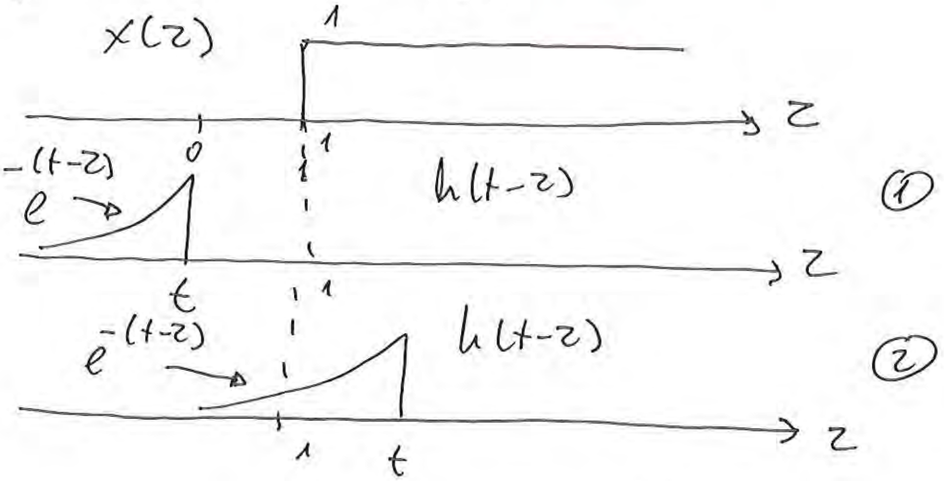


C15 Convolución $x(t) = u(t-1)$

$h(t) = e^{-t} \cdot u(t)$



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$



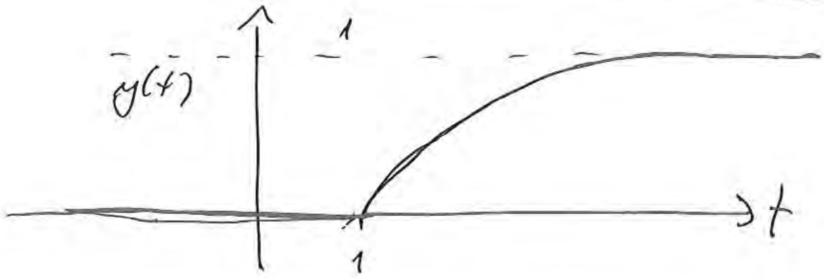
① Para $t < 1 \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \, d\tau = 0$

② Para $t \geq 1 \rightarrow y(t) = \int_{1}^{t} 1 \cdot e^{-(t-\tau)} \, d\tau =$

$$= e^{-t} \cdot \int_{1}^{t} e^{\tau} \, d\tau = e^{-t} \left[e^{\tau} \right]_{1}^{t} = e^{-t} \left[e^{t} - e \right] =$$

$$= 1 - e^{-t+1}$$

Por tanto, $\boxed{y(t) = \left(1 - e^{-t+1}\right) u(t-1)}$



C16 Convolucionar $x(t) = u(t) - u(t-1)$
con $h(t) = \delta(t-2)$

$$y(t) = [u(t) - u(t-1)] * \delta(t-2) = u(t) * \delta(t-2) - [u(t-1) * \delta(t-2)]$$

$$\boxed{y(t) = u(t-2) - u(t-3)}$$

C17 Convolucionar $x(t) = u(t) - u(t-1)$
con $h(t) = \delta(t)$.

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = [u(t) - u(t-1)] * \delta(t) = u(t) - u(t-1)}$$

C18 Convolucionar $x(t) = \Lambda(t)$ con $h(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \Lambda(t) * [\delta(t+1) - \delta(t-1)] =$$
$$= \Lambda(t) * \delta(t+1) - [\Lambda(t) * \delta(t-1)]$$

$$\boxed{y(t) = \Lambda(t+1) - \Lambda(t-1)}$$

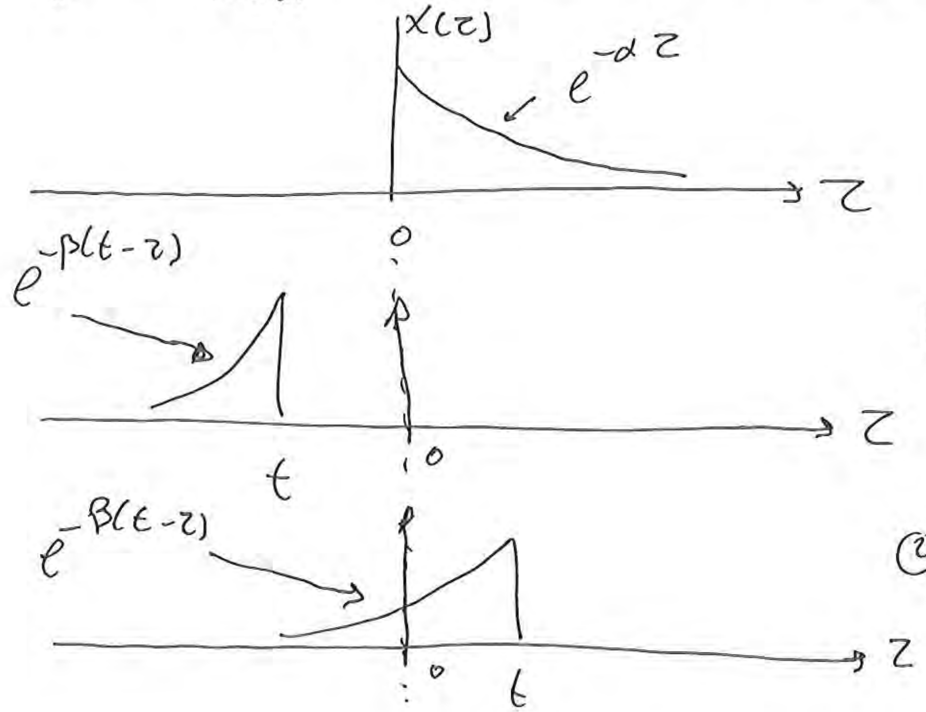
(16) • Convolucionar $x(t) = u(t) - u(t-1)$

$$h(t) = \delta(t-2)$$

$$y(t) = (u(t) - u(t-1)) * \delta(t-2) = \underline{\underline{u(t-2) - u(t-3)}}$$

(19) • Convolucionar
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= e^{-\alpha t} \cdot u(t) \\ h(t) &= e^{-\beta t} \cdot u(t) \end{aligned}\right\}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = x(t) * h(t)$$



(1) $t < 0 \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \, d\tau = 0$ //

(2) $t \geq 0 \Rightarrow y(t) = \int_0^t e^{-\alpha \tau} e^{-\beta(t-\tau)} d\tau =$

$$= e^{-\beta t} \int_0^t e^{-(\alpha-\beta)\tau} d\tau \overset{(*)}{=} e^{-\beta t} \cdot \frac{1}{-(\alpha-\beta)} \left[e^{-(\alpha-\beta)\tau} \right]_0^t =$$

$$= \frac{e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \left[e^{-(\alpha-\beta)t} - 1 \right] = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}$$ //

(*) Válido para $\alpha \neq \beta$

Para $\alpha = \beta$, retomamos desde ese punto la integral:

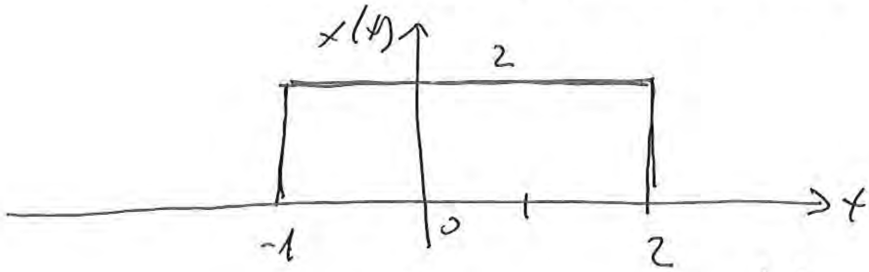
$$I = e^{-\beta t} \int_0^t \underbrace{e^{-(\alpha-\beta)\tau}}_{1 \text{ si } \alpha=\beta} d\tau = e^{-\beta t} [\tau]_0^t = t \cdot e^{-\beta t}$$

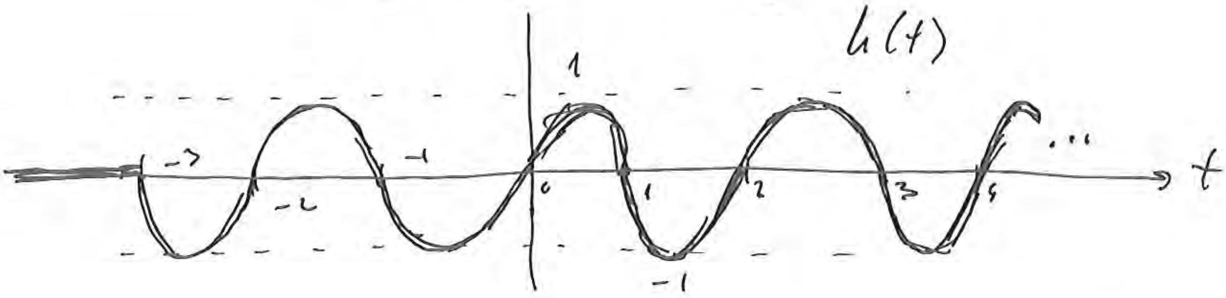
Por tanto:

$$\boxed{\begin{array}{ll} y(t) = \left[\dfrac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \right] \cdot u(t) & (\alpha \neq \beta) \\ y(t) = t \cdot e^{-\beta t} \cdot u(t) & (\alpha = \beta) \end{array}}$$

[¿Puedes dibujar el caso $\alpha = \beta$?]

21 • Convolucionar
$$\left. \begin{array}{l} x(t) = 2u(t+1) - 2u(t-2) \\ h(t) = \text{sen}(\pi t) \cdot u(t+3) \end{array} \right\}$$

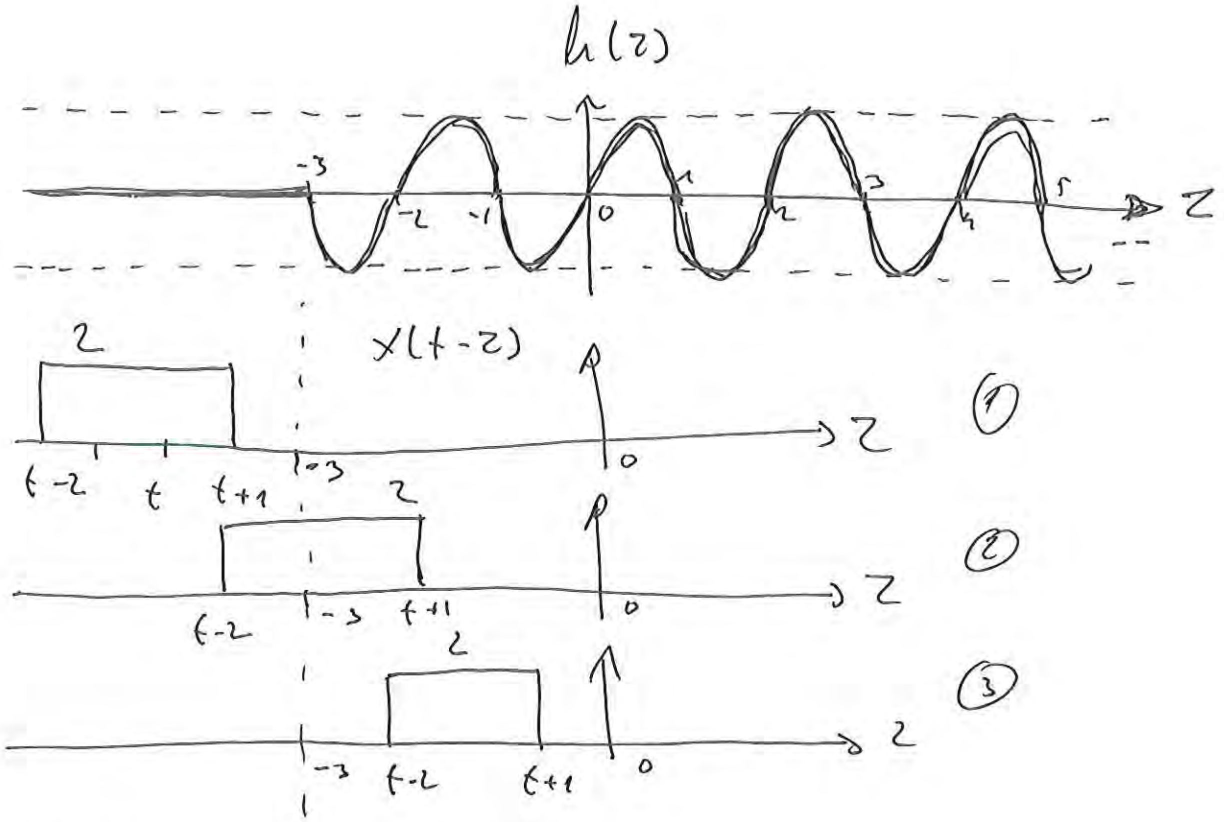




[Nota: $\text{sen}(\pi t) \to \omega_0 = \pi = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = 2$ seg]

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$



① $t+1<-3 \Rightarrow \underline{\underline{t<-4}}$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\,d\tau = 0$$

② $\left.\begin{array}{l} t+1 \geq -3 \\ t-2<-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t\geq -4 \\ t<-1 \end{array}\right\}$ $\underline{\underline{-4\leq t<-1}}$

$$y(t)=\int_{-3}^{t+1} 2\cdot \operatorname{sen}(\pi\tau)\,d\tau = \dots = \frac{2}{\pi}\left[\cos(\pi t)-1\right]$$

③ $t-2\geq -3 \Rightarrow \underline{\underline{t\geq -1}}$

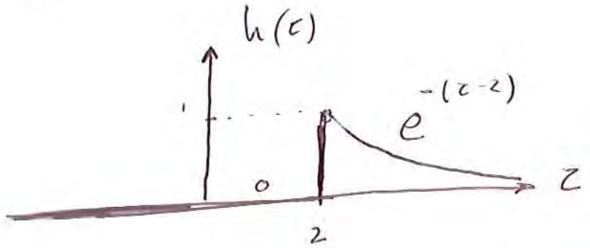
$$y(t)=\int_{t-2}^{t+1} 2\cdot \operatorname{sen}(\pi\tau)\,d\tau = \dots = \frac{4}{\pi}\cdot\cos(\pi t)$$

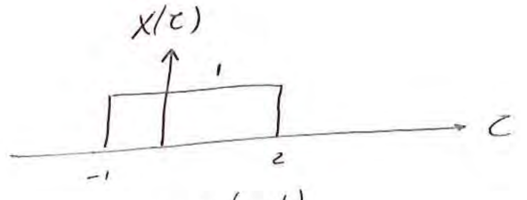
Por tanto: $\boxed{y(t)=\begin{cases} 0, & t<-4 \\ \frac{2}{\pi}\left[\cos(\pi t)-1\right] & -4\leq t<-1 \\ \frac{4}{\pi}\cos(\pi t) & t\geq -1 \end{cases}}$

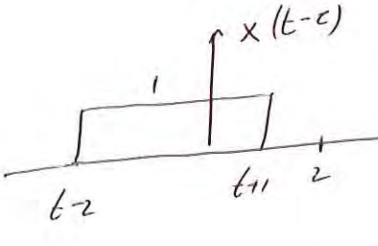
C 20 Convolucionar $x(t)=u(t+1)-u(t-2)$

con $h(t)=e^{-(t-2)}\cdot u(t-2)$

$$y(t)=x(t)*h(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)\,d\tau$$

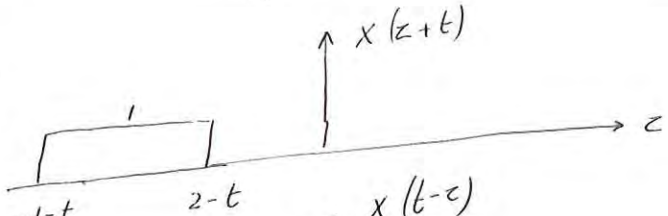


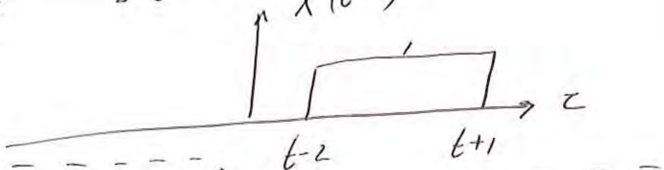


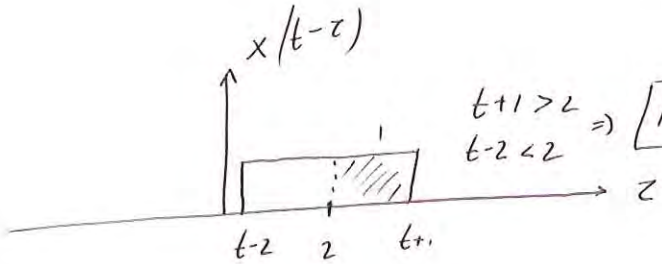


$t+1<2 \Rightarrow \boxed{t<1}$

$\boxed{y(t)=0}$







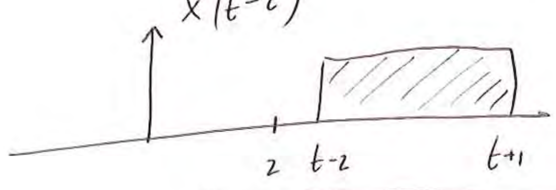
$t+1>2$
$t-2<2$ $\Rightarrow \boxed{1<t<4}$

$$y(t)=\int_2^{t+1} e^{-(\tau-2)}\cdot 1\,d\tau=\int_2^{t+1} e^{-\tau}\cdot e^{2}\,d\tau$$

$$=e^2\int_2^{t+1} e^{-\tau}\,d\tau=e^2\cdot\frac{1}{-1}\cdot e^{-\tau}\Big|_2^{t+1}$$

$$=-e^2\left(e^{-(t+1)}-e^{-2}\right)=$$

$$=-e^{1-t}+1 \Rightarrow \boxed{y(t)=1-e^{-t+1}}$$



$t-2>2 \Rightarrow \boxed{t>4}$

$$y(t)=\int_{t-2}^{t+1} e^{-(\tau-2)}\cdot 1\,d\tau=\int_{t-2}^{t+1} e^{-\tau}\cdot e^{2}=e^{2}\cdot\frac{1}{-1}\cdot e^{-\tau}\Big|_{t-2}^{t+1}$$

$$=-e^2\left[e^{-(t+1)}-e^{-(t-2)}\right]=\boxed{-e^{-t+1}+e^{-t+4}}$$

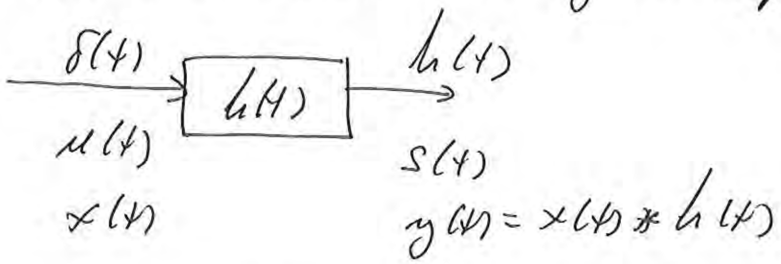
Agrupamos: $\boxed{y(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<1\\ 1-e^{-t+1} & \text{si } 1\leq t<4\\ e^{-t+4}-e^{-t+1} & \text{si } t\geq 4\end{cases}}$

Tener en cuenta para los problemas

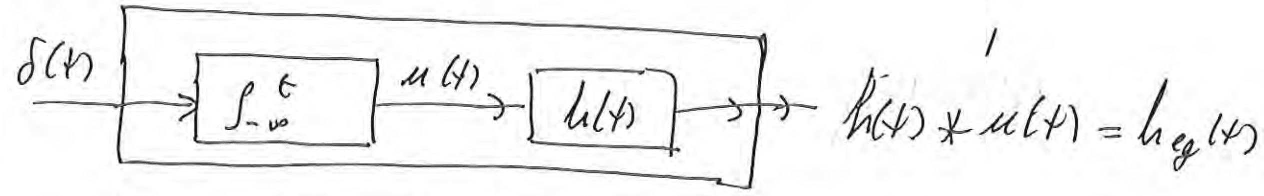
- Los sistemas integrador y derivador son SLIT

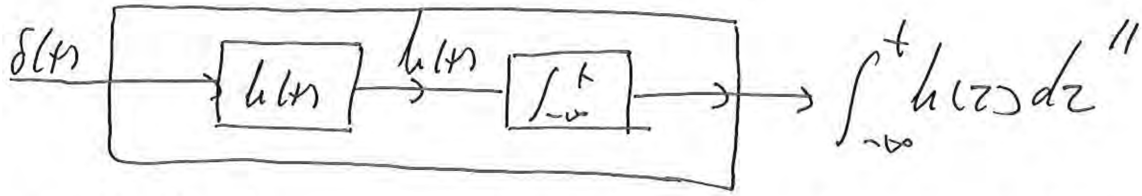
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \qquad y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

- Asociación en serie de un SLIT y un integrador:



Como $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$, podemos comprobar que:

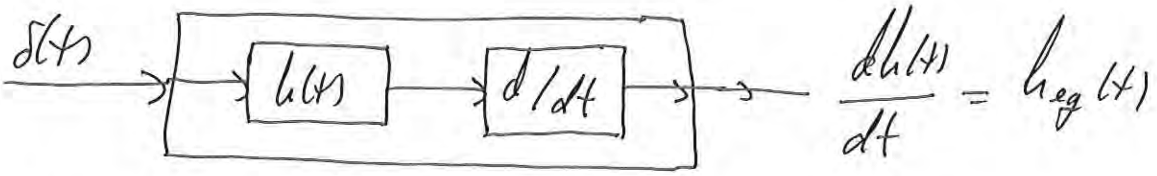


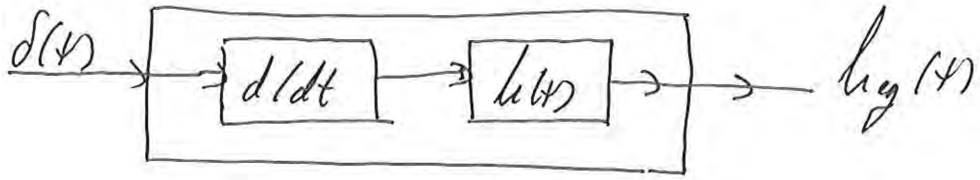


Por tanto, la asociación serie de un SLIT de respuesta $h(t)$ con un integrador tiene como respuesta equivalente:

$$\boxed{h_{eq}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau = h(t) * u(t)}$$

• Asociación en serie de un SLIT y un derivador.





Por tanto, la asociación serie de un SLIT y un derivador tiene como respuesta al impulso:

$$\boxed{h_{eq}(t) = \frac{dh(t)}{dt}}$$

[Nota: aunque se describe en el Oppenheim, no trabajamos en la asignatura con la derivada del impulso, pero existe y se llama "doblete".]

C22 | Calcular $y(t) = x(t) * h(t)$ para:

$$x(t) = u(t+2)$$
$$h(t) = \delta(t-2) - \delta(t+2)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = u(t+2) * [\delta(t-2) - \delta(t+2)] =$$
$$= u((t-2)+2) - u((t+2)+2) = u(t) - u(t+4)$$

C23 | Calcule y dibuje el resultado de las siguientes convoluciones:
[Nota: dibujar para $T = 2$].

(1) $y_1(t) = h(t) * h(t) \Rightarrow \ldots \Rightarrow y_1(t) = x_1(t)$

(2) $y_2(t) = \dfrac{dx_1(t)}{dt} * h(t) = x_1(t) * \dfrac{dh(t)}{dt} =$

$$= x_1(t) * (\delta(t) - \delta(t-T)) = x_1(t) - x_1(t-T)$$

(3) $y_3(t) = \dfrac{dx_2(t)}{dt} * h(t) = \ldots = x_2(t) - x_2(t-T)$

(4) $y_4(t) = x_1(t) * h(t) = \ldots$

(5) $y_5(t) = x_2(t) * h(t) = \ldots$

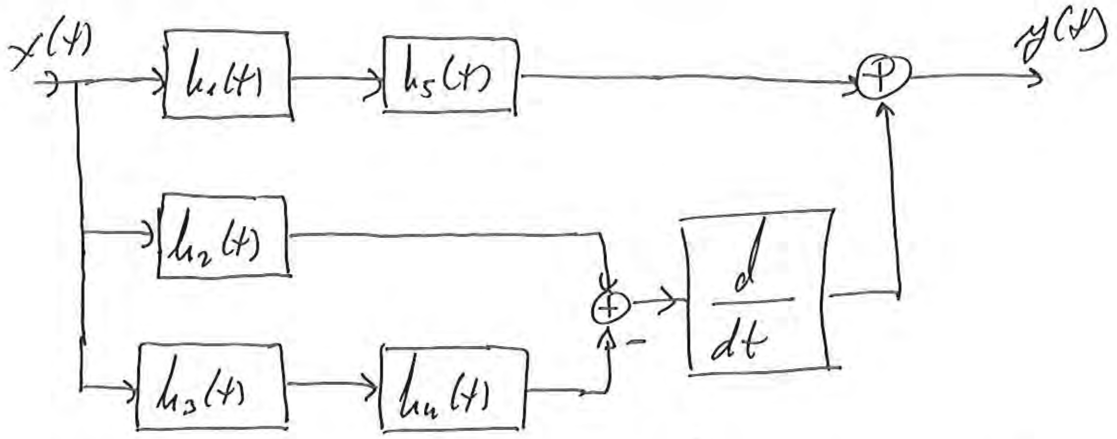
(6) $y_6(t) = x_1(t) * [dh(t)/dt] = \left[\dfrac{dx_1(t)}{dt}\right] * h(t) = y_2(t)$

(7) $y_7(t) = x_2(t) * [dh(t)/dt] = \ldots = y_3(t)$

(8) $y_8(t) = \dfrac{dh(t)}{dt} * \dfrac{dh(t)}{dt} = [\delta(t) - \delta(t-T)] * [\delta(t) - \delta(t-T)] =$

$$= \delta(t) - \delta(t-T) - \delta(t-T) + \delta(t-T-T) =$$
$$= \delta(t) - 2\delta(t-T) + \delta(t-2T)$$

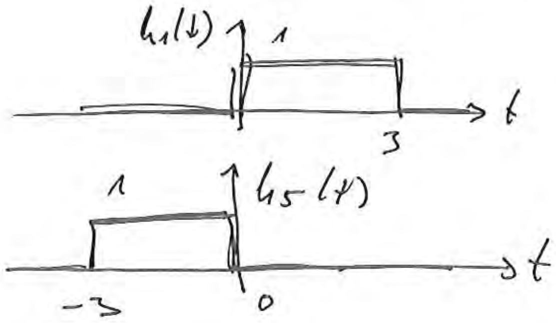
(24) Sistema formado por interconexiones. ¿Sistema equivalente?

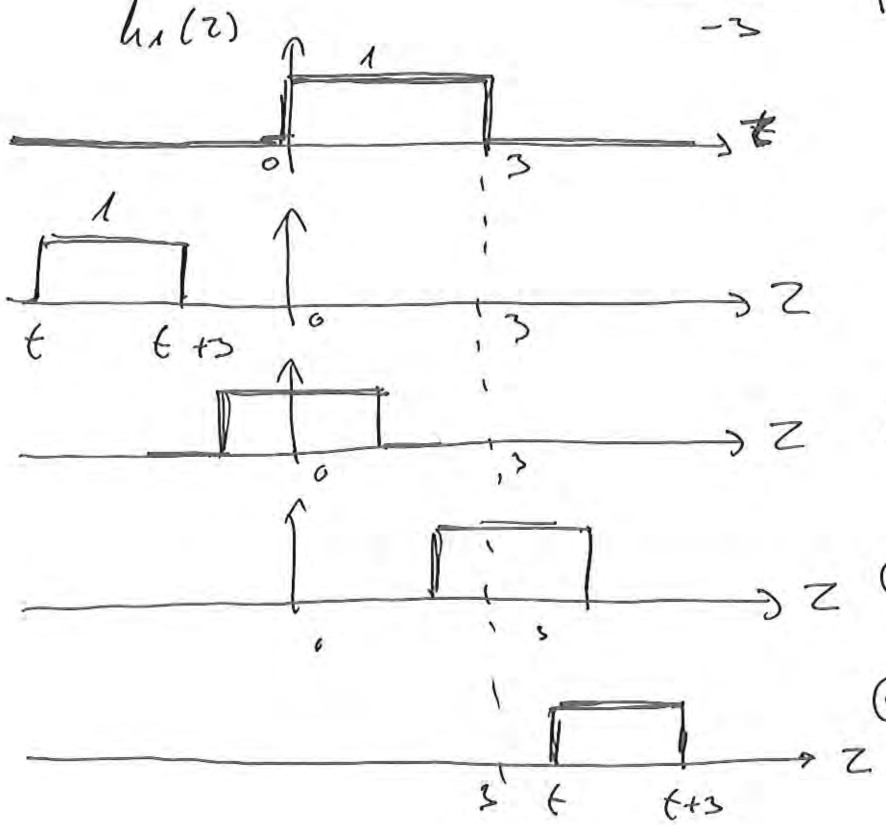


$$h_1(t) = u(t) - u(t-3)$$
$$h_2(t) = h_3(t) = t \cdot u(t)$$

$$h_4(t) = \delta(t-1)$$
$$h_5(t) = h_1(-t)$$

- $h_6(t) = h_1(t) * h_5(t) =$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau)\, h_5(t-\tau)\, d\tau$$





① y ④ $h_6(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot d\tau = 0$

① $t+3 < 0 \rightarrow t < -3$

④ $t > 3$

② $\left.\begin{array}{l} t+3 \geq 0 \\ t < 0 \end{array}\right\}$ $\underline{\underline{-3 \leq t < 0}}$

$h_6(t) = \int_{0}^{t+3} d\tau = [\tau]_0^{t+3} = t+3-0 = t+3$

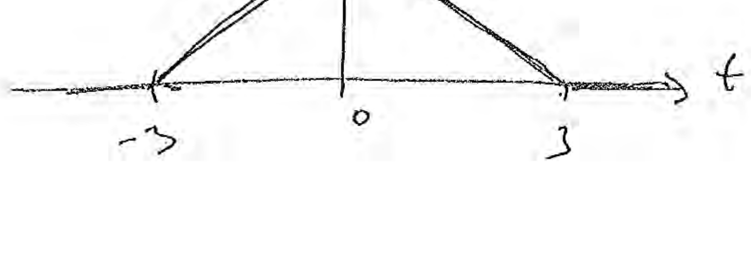
③ $\left.\begin{array}{l} t+3 \geq 3 \\ t < 3 \end{array}\right\}$ $\underline{\underline{0 \leq t < 3}}$

$h_6(t) = \int_{t}^{3} d\tau = [\tau]_t^3 = \underline{\underline{3-t}}$

Por tanto, $h_6(t) = \begin{cases} t+3, & -3 \leq t < 0 \\ 3-t, & 0 \leq t < 3 \\ 0, & \text{---} \end{cases}$

O equivalentemente: $h_6(t) = (t+3) \cdot u(t+3) +$
$+ [(3-t)-(t+3)] \cdot u(t) +$

$+ [0-(3-t)]\, u(t-3)$



- $h_7(t) = h_3(t) * h_4(t) = [t \cdot u(t)] * \delta(t-1) =$
  $= (t-1)\cdot u(t-1)$

- $h_8(t) = h_2(t) - h_7(t) = t \cdot u(t) - (t-1)\cdot u(t-1)$

- $h_9(t) = \dfrac{d h_8(t)}{dt} = u(t) + \cancel{t\cdot\delta(t)} - u(t-1) - \cancel{(t-1)\delta(t-1)}$
  $= u(t) - u(t-1)$

- $h_{eq}(t) = h_6(t) + h_9(t) = (t+3)\, u(t+3) - 2t\, u(t)$
  $+ 2t\, u(t-3) + u(t) - u(t-1) = (t+3)\, u(t+3) +$
  $+ (1-2t)\, u(t) - u(t-1) + 2t\, u(t-3)$ //

[Nota: para representar, ayuda tener en cuenta que $h_{eq}(t) = h_6(t) + h_9(t)$, $h_6(t)$ lo tenemos ya dibujado y $h_9(t)$ es fácil. No dejes de atreverte.]

Cuestión 25.

Indique, razonadamente, si cada uno de los siguientes sistemas tiene o no memoria:

- $y[n] = n \cdot x[n]$

No tiene memoria, ya que para conocer la salida del sistema en un instante de tiempo n_0 necesita únicamente la entrada en ese mismo instante de tiempo n_0.

- $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

Con memoria, ya que necesito conocer la entrada en "todos" los momentos anteriores.

$$y[n] = \ldots + x[n-3] + x[n-2] + x[n-1] + x[n]$$

- $y[n] = x[-n]$

Con memoria, porque por ejemplo para saber el valor de la salida en $n=4$, necesito conocer la entrada en $n=-4$; $y[4] = x[-4]$

Cuestion 26.

Indique si los siguientes sistemas son o no invertibles.

- $y[n] = \{x[n]\}^2$

Huele a "no invertible". Busco contraejemplo.

$$\left.\begin{array}{l} x_1[n] = 2 \ \forall n \Rightarrow y_1[n] = 4 \ \forall n \\ x_2[n] = -2 \ \forall n \Rightarrow y_2[n] = 4 \ \forall n \end{array}\right\} \Rightarrow \text{NO INVERTIBLE}$$

- $y[n] = n \cdot x[n]$

Huele a "no invertible". Busco contraejemplo con entradas iguales en todos los puntos salvo en $n=0$ que es donde "destruye" información.

$$x_1[n] = \delta[n] \Rightarrow y_1[n] = n \cdot \delta[n] = 0 \cdot \delta[n] = 0 \quad \forall n$$

$$x_2[n] = 2 \cdot \delta[n] \Rightarrow y_2[n] = n \cdot 2 \cdot \delta[n] = 0 \cdot 2 \cdot \delta[n] = 0 \quad \forall n$$

NO INVERTIBLE

- $$y[n] = \begin{cases} x[n-1] & si \quad n \geq 1 \\ 0 & si \quad n=0 \\ x[n] & si \quad n \leq -1 \end{cases}$$

Hay que darse cuenta que no destruimos información.
Este sistema da un corte en $n=0$ pero desplaza
la señal una posición a la derecha. No eliminamos
el valor de la entrada en $n=0$ sino que lo
pasamos a $n=1$. El alumno podrá buscar todos
los contraejemplos que quiera y verá que siempre
dos señales de entrada distintas producirán
salidas distintas.

El sistema inverso será $z[n] = \begin{cases} y[n+1] & si \quad n \geq 0 \\ y[n] & si \quad n \leq -1 \end{cases}$

Veamos si al sustituir $y[n]$ por su valor en todos los casos obtengo como salida la misma entrada $x[n]$

$$z[n] = \begin{cases} y[n+1] \overset{si\ n \geq 0}{=} x[(n+1)-1] = x[n] \\ z[0] = y[1] = x[0] \\ y[n] = x[n] \quad si \quad n \leq 1 \end{cases}$$

INVERTIBLE

Cuestión 27.

Indique razonadamente, si cada uno de los siguientes sistemas son o no causales.

- $y[n] = x[-n]$

El sistema "no es causal", puesto que por ejemplo para calcular la salida en $n=-1$, necesito conocer la entrada en $n=1$ ($y[-1] = x[1]$). Utiliza el futuro en algunos casos.

- $y[n] = x[n] - x[n-2]$

Utiliza solo el presente y el pasado, luego el sistema es CAUSAL.

- $y[n] = x[4n+1]$

Utiliza el futuro, ya que por ejemplo para conocer la salida en $n=1$ necesita el valor de la entrada en $n=5$ ($y[1] = x[5]$). Por lo tanto no es causal.

- $y[n] = \text{Par}\{x[n-1]\}$

Utiliza el futuro. Por ejemplo

$$y[-1] = \frac{1}{2}x[-1-1] + \frac{1}{2}x[1-1] = \frac{1}{2}x[-2] + \frac{1}{2}x[0]$$

NO ES CAUSAL

$\text{Par}\{z[n]\} = \frac{1}{2}z[n] + \frac{1}{2}z[-n]$

Si $z[n] = x[n-1]$

$\Rightarrow z[-n] = x[-n-1]$

Luego

$\text{Par}\{x[n-1]\} = \frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{2}x[-n-1]$

Cuestión 28.

Indique si cada uno de los sistemas es o no estable.

- $y[n] = \{x[n]\}^2$

Si $|x[n]| \leq k_x \ \forall n$

$$|y[n]| = |\{x[n]\}^2| = |x[n]|^2 \leq k_x^2 = k_y \ \forall n$$

Es ESTABLE

- $y[n] = \text{sen}\{x[n]\}$

Valga lo que valga $x[n]$, la función seno siempre va a estar acotada por ± 1, así que ESTABLE.

- $y[n] = n \cdot x[n]$

El sistema "huele" a no estable. Busco un contraejemplo. Si $x[n] = 1 \ \forall n \Rightarrow |x[n]| \leq 1 \ \forall n$, sin embargo $\lim_{n\to\infty} |y[n]| = \lim_{n\to\infty} |n \cdot x[n]| =$

$$= \lim_{n\to\infty} |n| \cdot |x[n]| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} |n| \cdot 1 = \infty$$

NO ESTABLE.

Cuestión 29.

Indique si estos sistemas son o no invariantes.

- $y[n] = n + x[n]$

$x_1[n] \Rightarrow y_1[n] = n + x_1[n] \Rightarrow y_1[n-n_0] = n-n_0 + x_1[n-n_0]$

$x_{\rightarrow}[n] = x_1[n-n_0] \Rightarrow y_{\rightarrow}[n] = n + x_{\rightarrow}[n] = n + x_1[n-n_0]$

¿$y_{\rightarrow}[n] = y_1[n-n_0]$? NO $\Rightarrow$ VARIANTE TEMPORAL

- $y[n] = \text{sen}\; x[n])$

$x_1[n] \Rightarrow y_1[n] = \text{sen}(x_1[n]) \Rightarrow y_1[n-n_0] = \text{sen}(x_1[n-n_0])$

$x_{\rightarrow}[n] = x_1[n-n_0] \Rightarrow y_{\rightarrow}[n] = \text{sen}(x_{\rightarrow}[n]) = \text{sen}(x_1[n-n_0])$

¿$y_{\rightarrow}[n] = y[n-n_0]$? SI $\Rightarrow$ INVARIANTE TEMPORAL

- $y[n] = n \cdot x[n]$

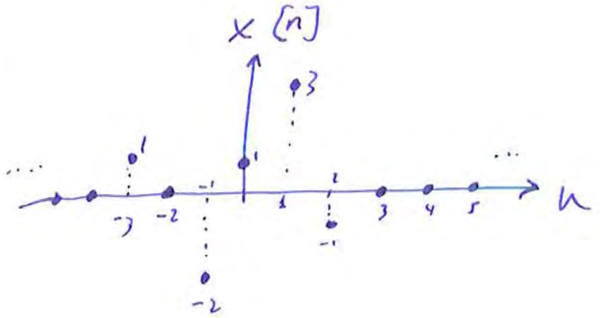
$x_1[n] \Rightarrow y_1[n] = n \cdot x_1[n] \Rightarrow y_1[n-n_0] = (n-n_0) \cdot x_1[n-n_0]$

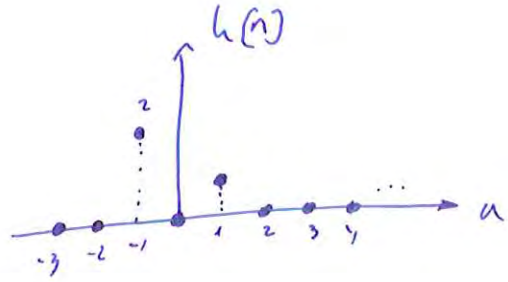
$x_{\rightarrow}[n] = x_1[n-n_0] \Rightarrow y_{\rightarrow}[n] = n \cdot x_{\rightarrow}[n] = n \cdot x_1[n-n_0]$

¿$y_{\rightarrow}[n] = y_1[n-n_0]$? NO $\Rightarrow$ VARIANTE TEMPORAL

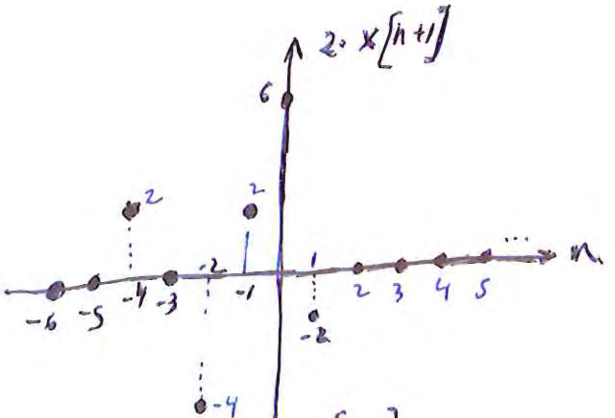
Cuestión 30.

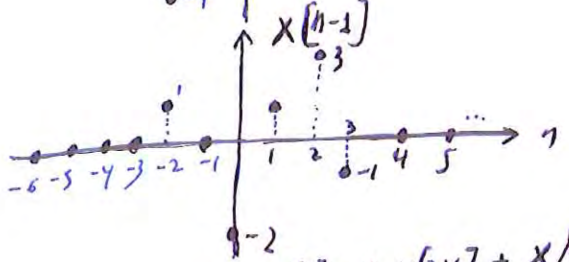
Obtenga la convolución discreta entre los siguientes pares de señales:

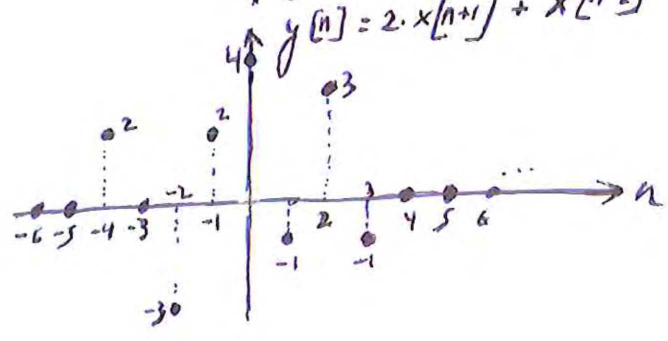
- 

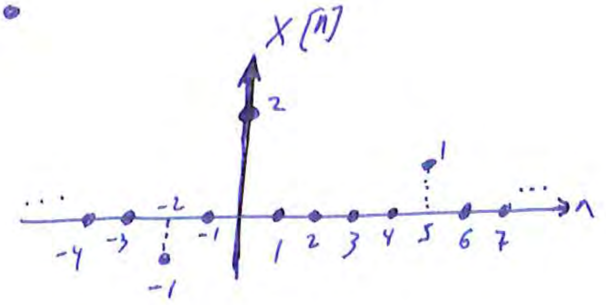


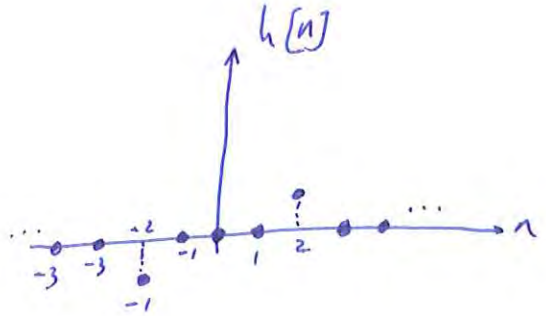
$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * \{2 \cdot \delta[n+1] + \delta[n-1]\}$$
$$= x[n] * \{2 \cdot \delta[n+1]\} + x[n] * \delta[n-1] =$$
$$= 2 \cdot x[n+1] + x[n-1]$$





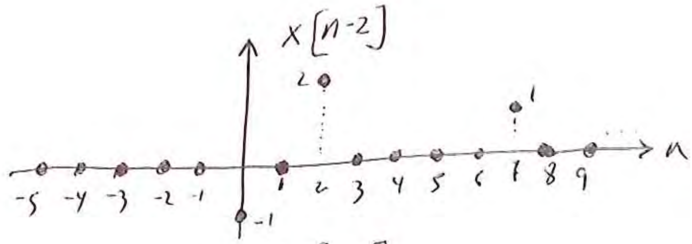


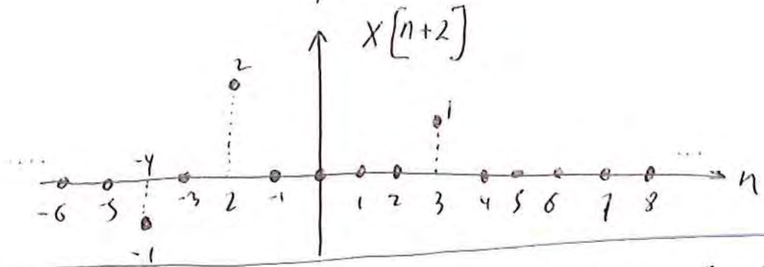
• 



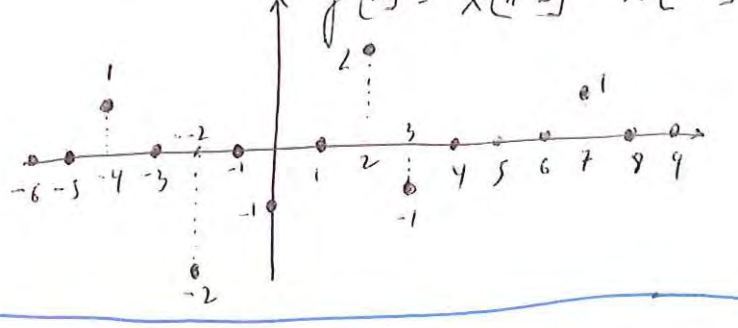
$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * \{-\delta[n+2] + \delta[n-2]\}$$

$$= -x[n+2] + x[n-2]$$

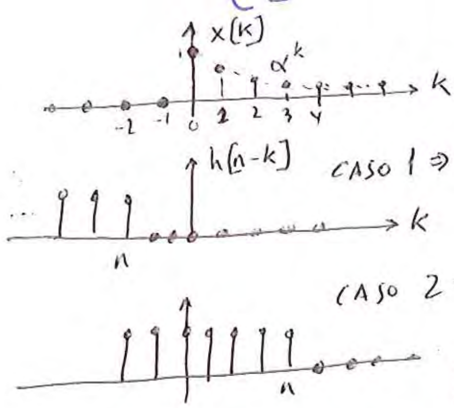




$$y[n] = x[n-2] - x[n+2]$$



• $x[n] = \alpha^{n} \cdot u[n]$ con $h[n] = u[n]$ (para $0 < \alpha < 1$)

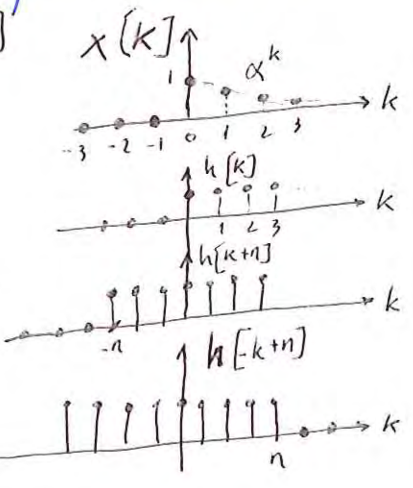


$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

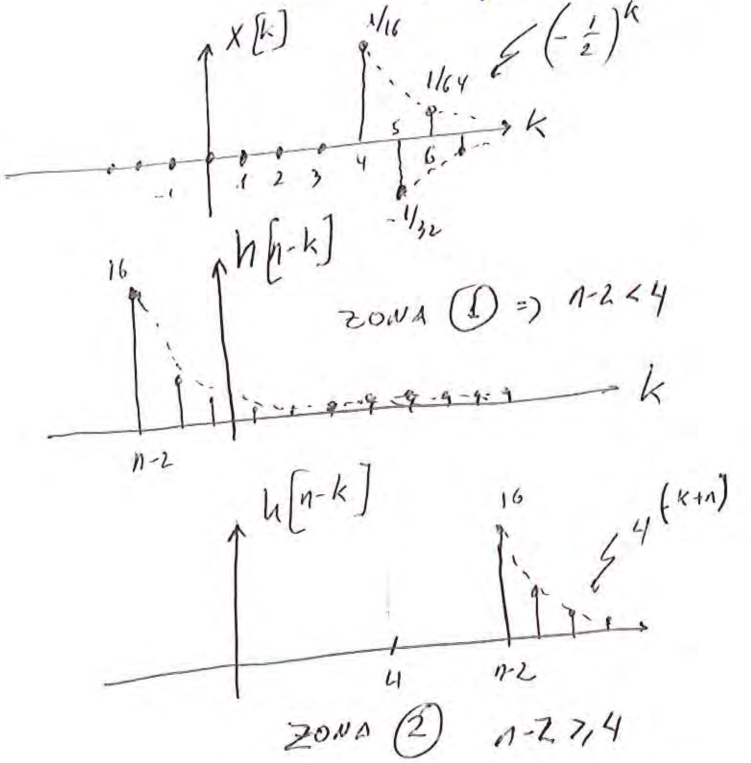
CASO 1 ⇒ $n < 0$ ⇒ $y[n] = 0$

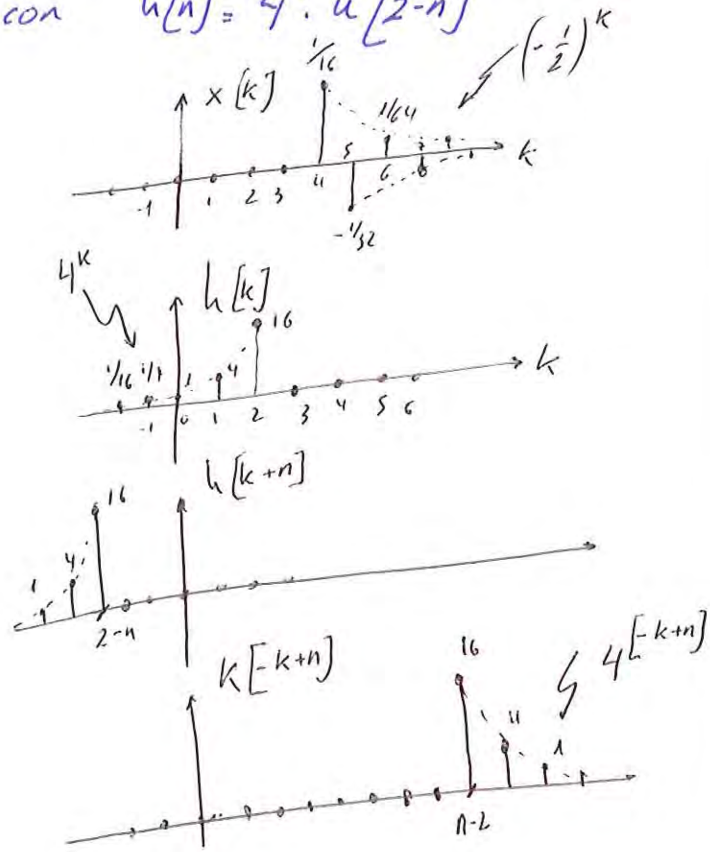
CASO 2 ⇒ $n \geq 0$ ⇒ $y[n] = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \alpha^{k} = \dfrac{\alpha^{n} \cdot \alpha - 1}{\alpha - 1} =$

$$\boxed{y[n] = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1} \cdot u[n]}$$



- $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n-4]$ con $h[n] = 4^n \cdot u[2-n]$





ZONA ① $\Rightarrow n < 6 \Rightarrow$

$$\boxed{y[n]} = \sum_{k=4}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot (4)^{-k+n} = 4^n \cdot \sum_{k=4}^{\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^k =$$

$$= 4^n \cdot \frac{\left(-\frac{1}{8}\right)^{\infty} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - \left(-\frac{1}{8}\right)^4}{-\frac{1}{8} - 1} = 4^n \frac{0 - 2^{-12}}{-\frac{9}{2^3}} =$$

$$= 4^n \frac{2^{-9}}{9} = \left(2^2\right)^n \cdot \frac{2^{-9}}{9} = \boxed{\frac{1}{9} \cdot 2^{2n-9}}$$

ZONA ② $\Rightarrow n \geq 6 \Rightarrow$

$$y[n] = \sum_{k=n-2}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (4)^{-k+n} = 4^n \sum_{k=n-2}^{\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^k =$$

$$= 4^n \frac{\left(-\frac{1}{8}\right)^{\infty} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-2}}{-\frac{1}{8} - 1} = 4^n \frac{0 - \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-2}}{-\frac{9}{8}} = 4^n \cdot \frac{8}{9} \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-2} =$$

$$= 2^{2n} \cdot \frac{2^3}{9} \left(-2^{-3}\right)^{n-2} = \frac{1}{9} \cdot 2^{2n+3} \cdot (-2)^{-3n+6}$$

AGRUPANDO $\Rightarrow$

$$y[n] = \begin{cases} \frac{1}{9} \cdot 2^{2n-9} & \text{si } n < 6 \\ \frac{1}{9} \cdot 2^{(2n+3)} \cdot (-2)^{-3n+6} & \text{si } n \geq 6 \end{cases}$$

Tema 2 - Sistemas en el Dominio Temporal

Problemas resueltos

(P1) Sistema dado por $y(t) = x(\operatorname{sen} t)$

(1) ¿Es causal? Nótese que $y(t)$ sólo se construye con los valores de $x(t)$ entre $t=-1$ y $t=1$.
Por tanto, utilizará el futuro (para instantes anteriores a $t=-1$), por ejemplo,

$$t = -\pi \rightarrow y(-\pi) = x(\operatorname{sen}(-\pi)) = x(0)$$

y no es causal. También usará el pasado (para instantes de tiempo posteriores a $+1$), por ejemplo,

$$t = \pi \rightarrow y(\pi) = x(\operatorname{sen} \pi) = x(0)$$

y el sistema no es anticausal. $\Rightarrow$ NO CAUSAL

(2) ¿Es lineal? Usamos el procedimiento general.

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(\operatorname{sen} t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2(\operatorname{sen} t)$$
$$x_3(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t) \rightarrow y_3(t) = x_3(\operatorname{sen} t) =$$
$$= a\,x_1(\operatorname{sen} t) + b\,x_2(\operatorname{sen} t) = a\,y_1(t) + b\,y_2(t)$$

$\Rightarrow$ Es lineal.

Problema 2.

- $y(t) = x(t-2) + x(t+2)$ ¿memoria? ¿invariante temporal? ¿lineal? ¿causal? ¿estable?

- Con memoria puesto que necesita conocer la entrada en instantes pasados y futuros.
- No es causal puesto que utiliza información del futuro, por ejemplo $y(1) = x(-1) + x(3)$
- Es estable puesto que si $x(t)$ esta acotada ($|x(t)| \le k_x \ \forall \ t$) la salida estará acotada por $2k_x$. $\Rightarrow |y(t)| = |x(t-2) + x(t+2)| \le |x(t-2)| + |x(t+2)| \le k_x + k_x = 2k_x = k_y$.
- Para conocer la invarianza temporal aplico el procedimiento.

$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = x_1(t-2) + x_1(t+2)$

Desplazo la salida $y_1(t-t_0) = x_1(t-t_0-2) + x_1(t-t_0+2)$

Ahora calculo la salida para x_1 desplazada t_0.

$x_{\rightarrow}(t) = x_1(t-t_0) \Rightarrow y_{\rightarrow}(t) = x_{\rightarrow}(t-2) + x_{\rightarrow}(t+2)$

$y_{\rightarrow}(t) = x_1(t-2-t_0) + x_1(t+2-t_0)$

¿$y_1(t-t_0) = y_{\rightarrow}(t)$? SI $\Rightarrow$ INVARIANTE TEMPORAL

- Para calcular linealidad verifico si cumple aditividad y escalado.

Aditividad
$$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = x_1(t-2) + x_1(t+2)$$
$$x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = x_2(t-2) + x_1(t+2)$$
$$y_1(t) + y_2(t) = x_1(t-2) + x_2(t-2) + x_1(t+2) + x_2(t+2)$$

Ahora calculo la salida a la suma de las entradas

$$x_+(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y_+(t) = x_+(t-2) + x_+(t+2) =$$
$$= x_1(t-2) + x_2(t-2) + x_1(t+2) + x_2(t+2)$$

¿$y_+(t) = y_1(t) + y_2(t)$? SÍ $\Rightarrow$ cumple ADITIVIDAD

Escalado
$$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = x_1(t-2) + x_1(t+2)$$
$$\alpha y_1(t) = \alpha \cdot x_1(t-2) + \alpha \cdot x_1(t+2)$$

Ahora calculo la salida a la entrada escalada

$$x_\uparrow(t) = \alpha \cdot x_1(t) \Rightarrow y_\uparrow(t) = x_\uparrow(t-2) + x_\uparrow(t+2) =$$
$$= \alpha \cdot x_1(t-2) + \alpha \cdot x_1(t+2)$$

¿$y_\uparrow(t) = \alpha \cdot y_1(t)$? SÍ $\Rightarrow$ cumple ESCALADO

Como cumple aditividad y escalado a la vez, entonces es <u>LINEAL</u>.

- $y(t) = x(t) \cdot \cos(3t)$ ¿memoria? ¿causal? ¿estable? ¿invariante temporal? ¿lineal?

- Sin memoria puesto que para conocer la salida en un instante de tiempo, solo necesito conocer el valor de la entrada en ese mismo instante de tiempo. Ej $y(1) = x(1) \cdot \cos 3$. Hay que darse cuenta que $\cos(3)$ no es el futuro. La función coseno no depende de la entrada. Es un coeficiente cualquiera.
- Es causal. Todo sistema sin memoria es causal.
- Es estable, ya que si $x(t)$ está acotada, como el coseno también está acotado, lo estará la salida. $|y(t)| = |x(t) \cdot \cos(3t)| = |x(t)| \cdot |\cos(3t)|$
$$\leq K_x \cdot 1 = K_y.$$
- ¿invariante Temporal?
$$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = x_1(t) \cdot \cos(3t)$$
Desplazo la salida $y_1(t-t_0) = x_1(t-t_0) \cdot \cos[3(t-t_0)]$
$$x_{\rightarrow}(t) = x_1(t-t_0) \Rightarrow y_{\rightarrow}(t) = x_{\rightarrow}(t) \cdot \cos(3t) = x_1(t-t_0) \cdot \cos(3t)$$
¿$y_{\rightarrow}(t) = y_1(t-t_0)$? NO $\Rightarrow$ VARIANTE TEMPORAL
- ¿Linealidad?
$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = x_1(t) \cdot \cos(3t) \\ x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = x_2(t) \cdot \cos(3t) \end{array}\right\} y_1(t) + y_2(t) = [x_1(t) + x_2(t)] \cdot \cos(3t)$$
$$x_+(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y_+(t) = x_+(t) \cdot \cos(3t) = [x_1(t) + x_2(t)] \cdot \cos(3t)$$
¿$y_+(t) = y_1(t) + y_2(t)$? SI $\Rightarrow$ cumple aditividad.

$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = x_1(t) \cdot \cos(3t) \Rightarrow \alpha \cdot y_1(t) = \alpha \cdot x_1(t) \cdot \cos(3t)$

$x_\uparrow(t) = \alpha \cdot x_1(t) \Rightarrow y_\uparrow(t) = x_\uparrow(t) \cdot \cos(3t) = \alpha \cdot x_1(t) \cdot \cos(3t)$

¿ $y_\uparrow(t) = \alpha \cdot y_1(t)$? SI $\Rightarrow$ cumple aditividad.

Como cumple aditividad y escalado $\Rightarrow$ ES LINEAL

$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\, d\tau$ ¿memoria? ¿causal? ¿estable? ¿invariante temporal? ¿lineal?

- Con memoria, ya que para conocer el valor de la salida en un instante de tiempo t_0, necesito conocer el valor de la entrada, desde $-\infty$ hasta el presente, e incluso más allá, para poder hacer la integral.
- No es causal, porque necesita información de la entrada en el futuro, por ejemplo para $y(t=1) = \int_{-\infty}^{2} x(\tau)\, d\tau$ necesito conocer el valor de la entrada hasta $t=2$.
- No es estable. Por ejemplo si $x(t) = 1\ \forall t$, que está acotado $\Rightarrow |y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{2t} 1 \cdot d\tau\right| = \infty$
- ¿Invariante temporal?

$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\, d\tau$

Desplazo la salida $y_1(t-t_0) = \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x_1(\tau)\, d\tau$

$$x_{\rightarrow}(t) = x_1(t-t_0) \Rightarrow y_{\rightarrow}(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_{\rightarrow}(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau - t_0)\,d\tau$$

¿ $y_{\rightarrow}(t) = y_1(t-t_0)$? Es difícil de comparar.

Hacemos un cambio de variable $\begin{cases} \tau - t_0 = \alpha \\ d\tau = d\alpha \\ \text{si } \tau = -\infty \Rightarrow \alpha = -\infty \\ \text{si } \tau = 2t \Rightarrow \alpha = 2t - t_0 \end{cases}$

$y_{\rightarrow}(t) = \int_{-\infty}^{2t-t_0} x_1(\alpha)\,d\alpha$. Ahora sí podemos ver que no son iguales $(2(t-t_0) \neq 2t - t_0)$, por lo tanto $\Rightarrow$ VARIANTE TEMPORAL.

- ¿Lineal?

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\,d\tau \\ x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\,d\tau \end{array}\right\} y_1(t) + y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\,d\tau$$

$$x_+(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y_+(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_+(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau) + x_2(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\,d\tau$$

¿ $y_+(t) = y_1(t) + y_2(t)$? SÍ $\Rightarrow$ Cumple aditividad

$$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\,d\tau \Rightarrow \alpha \cdot y_1(t) = \alpha \cdot \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\,d\tau$$

$$x_{\uparrow}(t) = \alpha \cdot x_1(t) \Rightarrow y_{\uparrow}(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_{\uparrow}(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{2t} \alpha \cdot x_1(\tau)\,d\tau = \alpha \cdot \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\,d\tau$$

¿ $y_{\uparrow}(t) = \alpha \cdot y_1(t)$? SÍ $\Rightarrow$ Cumple escalado.

Entonces es LINEAL.

- $y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ x(t) + x(t-2) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

- Con memoria ya que por ejemplo para calcular $y(t=4) = x(4) + x(2)$. Necesito información del pasado.
- Es causal, ya no utiliza el futuro, únicamente el presente y el pasado.
- Es estable ya que para $t<0$ siempre es cero la salida y para $t \geq 0$, si $x(t)$ está acotado por k_x, la salida lo estará por $2 \cdot k_x$.

$$|y(t)| = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ |x(t) + x(t-2)| \leq |x(t)| + |x(t-2)| \leq 2k_x = k_y & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

- ¿invariante temporal?

$$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ x_1(t) + x_1(t-2) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$y_1(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } t-t_0<0 \\ x_1(t-t_0) + x_1(t-t_0-2) & \text{si } t-t_0 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_{\rightarrow}(t) = x_1(t-t_0) \Rightarrow y_{\rightarrow}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ x_{\rightarrow}(t) + x_{\rightarrow}(t-2) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$y_{\rightarrow}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ x_1(t-t_0) + x_1(t-2-t_0) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

¿$y_{\rightarrow}(t) = y_1(t-t_0)$? NO $\Rightarrow$ VARIANTE TEMPORAL

- ¿lineal?

$$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ x_1(t) + x_1(t-2) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ x_2(t) + x_2(t-2) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$y_1(t) + y_2(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t<0 \\ x_1(t) + x_2(t) + x_1(t-2) + x_2(t-2) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

$$x_+(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y_+(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si \quad t<0 \\ x_+(t) + x_+(t-2) & si \quad t\geq 0 \end{array} \right\} = \begin{cases} 0 & si \quad t<0 \\ x_1(t) + x_2(t) + x_1(t-2) + x_2(t-2) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

¿ $y_+(t) = y_1(t) + y_2(t)$? SI $\Rightarrow$ cumple aditividad.

$$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t<0 \\ x_1(t) + x_1(t-2) & si \quad t\geq 0 \end{cases}$$

$$\alpha \cdot y_1(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t<0 \\ \alpha \cdot x_1(t) + \alpha \cdot x_1(t-2) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

$$x_\uparrow(t) \overset{=\alpha \cdot x_1(t)}{\Rightarrow} y_\uparrow(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si \quad t<0 \\ x_\uparrow(t) + x_\uparrow(t-2) & si \quad t\geq 0 \end{array} \right\} = \begin{cases} 0 & si \quad t<0 \\ \alpha \cdot x_1(t) + \alpha \cdot x_1(t-2) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

¿ $y_\uparrow(t) = \alpha \cdot y_1(t)$? SI $\Rightarrow$ cumple escalado.

Entonces es LINEAL.

- $$y(t) = \begin{cases} 0 & si \quad x(t)<0 \\ x(t) + x(t-2) & si \quad x(t) \geq 0 \end{cases}$$

- Con memoria ya que por ejemplo para calcular $y(t=4) = x(4) + x(2)$ siempre que $x(t)$ sea una señal con valor positivo en $t=4$. Utiliza el pasado, luego es con memoria.
- Es causal, ya que necesita como mucho presente y pasado, nunca futuro.
- Es estable, ya que, como en el caso anterior, si $x(t)$ está acotada por k_x, la salida lo estará por $2 \cdot k_x$.

¿invariante?

$$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1(t) < 0 \\ x_1(t) + x_1(t-2) & \text{si } x_1(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$y_1(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1(t-t_0) < 0 \\ x_1(t-t_0) + x_1(t-t_0-2) & \text{si } x_1(t-t_0) \geq 0 \end{cases}$$

$$x_\rightarrow(t) = x_1(t-t_0) \Rightarrow y_\rightarrow(t) = \left.\begin{cases} 0 & \text{si } x_\rightarrow(t) < 0 \\ x_\rightarrow(t) + x_\rightarrow(t-2) & \text{si } x_\rightarrow(t) \geq 0 \end{cases}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1(t-t_0) < 0 \\ x_1(t-t_0) + x_1(t-2-t_0) & \text{si } x_1(t-t_0) \geq 0 \end{cases}$$

¿$y_\rightarrow(t) = y_1(t-t_0)$? SI $\Rightarrow$ INVARIANTE TEMPORAL

¿lineal?

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) \Rightarrow y_1(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x_1(t) < 0 \\ x_1(t) + x_1(t-2) & \text{si } x_1(t) \geq 0 \end{cases} \\ x_2(t) \Rightarrow y_2(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x_2(t) < 0 \\ x_2(t) + x_2(t-2) & \text{si } x_2(t) \geq 0 \end{cases} \end{aligned}\right\}$$

$$y_1(t) + y_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1(t) < 0 \text{ y } x_2(t) < 0 \\ x_1(t) + x_1(t-2) & \text{si } x_1(t) \geq 0 \text{ y } x_2(t) < 0 \\ x_2(t) + x_2(t-2) & \text{si } x_1(t) < 0 \text{ y } x_2(t) \geq 0 \\ x_1(t) + x_1(t-2) + x_2(t) + x_2(t-2) & \text{si } x_1(t) \geq 0 \text{ y } x_2(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$x_+(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y_+(t) = \left.\begin{cases} 0 & \text{si } x_+(t) < 0 \\ x_+(t) + x_+(t-2) & \text{si } x_+(t) \geq 0 \end{cases}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1(t) + x_2(t) < 0 \\ x_1(t) + x_2(t) + x_1(t-2) + x_2(t-2) & \text{si } x_1(t) + x_2(t) \geq 0 \end{cases}$$

¿$y_+(t) = y_1(t) + y_2(t)$? NO $\Rightarrow$ no cumple escalado.

Luego no es lineal.

- $y(t) = x\left(\frac{t}{3}\right)$

- Con memoria, ya que por ejemplo para calcular $y(3) = x(1)$. Necesita información del pasado.
- No es causal, ya que por ejemplo para $y(-3) = x(-1)$. Necesita en algunos casos información del futuro.
- Es estable, ya que un escalado de la variable independiente no afecta a la amplitud máxima de la señal. Si $x(t)$ está acotada por k_x, $y(t)$ estará acotada por la misma cota.
- ¿invariante?

$$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = x_1\left(\frac{t}{3}\right) \Rightarrow y_1(t-t_0) = x_1\left(\frac{t-t_0}{3}\right)$$

$$x_{\rightarrow}(t) = x_1(t-t_0) \Rightarrow y_{\rightarrow}(t) = x_{\rightarrow}\left(\frac{t}{3}\right) = x_1\left(\frac{t}{3} - t_0\right)$$

¿$y_{\rightarrow}(t) = y_1(t-t_0)$? NO $\Rightarrow$ VARIANTE TEMPORAL

- ¿lineal?

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = x_1\left(\frac{t}{3}\right) \\ x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = x_2\left(\frac{t}{3}\right) \end{array}\right\} \; y_1(t) + y_2(t) = x_1\left(\frac{t}{3}\right) + x_2\left(\frac{t}{3}\right)$$

$$x_+(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y_+(t) = x_+\left(\frac{t}{3}\right) = x_1\left(\frac{t}{3}\right) + x_2\left(\frac{t}{3}\right)$$

¿$y_+(t) = y_1(t) + y_2(t)$? SI $\Rightarrow$ cumple aditividad.

$$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = x_1\left(\frac{t}{3}\right) \Rightarrow \alpha \cdot y_1(t) = \alpha \cdot x_1\left(\frac{t}{3}\right)$$

$$x_{\uparrow}(t) = \alpha \cdot x_1(t) \Rightarrow y_{\uparrow}(t) = x_{\uparrow}\left(\frac{t}{3}\right) = \alpha \cdot x_1\left(\frac{t}{3}\right)$$

¿$y_{\uparrow}(t) = \alpha \cdot y_1(t)$? SI $\Rightarrow$ cumple escalado $\Rightarrow$ LINEAL

- $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

también es valida la definición $\dfrac{dx(t)}{dt} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon}$

Con memoria ya que $\dfrac{dx(t)}{dt} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{x(t) - x(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$, por lo tanto utiliza el pasado.

¿Causal? → No sería causal, ya que ambas definiciones son válidas, y en la superior se necesita información del futuro

No es estable ya que por ejemplo con $x(t) = u(t)$ que está acotada, $y(t) = \delta(t)$ que no lo está.

¿invariante?

$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \dfrac{dx_1(t)}{dt}$; $y_1(t-t_0) = \dfrac{dx_1(t-t_0)}{dt}$

$x_{\to}(t) = x_1(t-t_0) \Rightarrow y_{\to}(t) = \dfrac{dx_{\to}(t)}{dt} = \dfrac{dx(t-t_0)}{dt}$

¿ $y_{\to}(t) = y_1(t-t_0)$? SI $\Rightarrow$ INVARIANTE

¿Lineal?

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &\Rightarrow y_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} \\ x_2(t) &\Rightarrow y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \quad y_1(t) + y_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{dx_2(t)}{dt}$$

$x_+(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y_+(t) = \dfrac{dx_+(t)}{dt} = \dfrac{d(x_1(t) + x_2(t))}{dt} = \dfrac{dx_1(t)}{dt} + \dfrac{dx_2(t)}{dt}$

¿ $y_+(t) = y_1(t) + y_2(t)$? SI $\Rightarrow$ cumple aditividad.

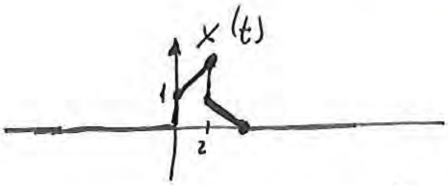
$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = \dfrac{dx_1(t)}{dt}$; $\alpha \cdot y_1(t) = \alpha \cdot \dfrac{dx_1(t)}{dt}$

$x_\alpha(t) = \alpha \cdot x_1(t) \Rightarrow y_\alpha(t) = \dfrac{dx_\alpha(t)}{dt} = \dfrac{d(\alpha \cdot x_1(t))}{dt} = \alpha \cdot \dfrac{dx_1(t)}{dt}$

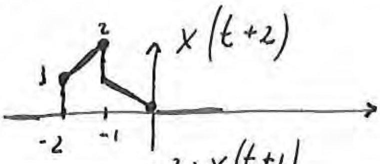
Cumple escalado $\Rightarrow$ ES LINEAL

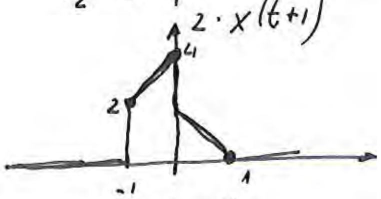
Problema 3. $y(t) = x(t) * h(t)$

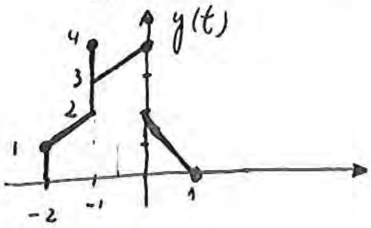
$$x(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ 2-t & \text{si } 1 < t \le 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad h(t) = \delta(t+2) + 2\,\delta(t+1)$$



$$x(t) * [\delta(t+2) + 2\,\delta(t+1)] =$$
$$= x(t+2) + 2 \cdot x(t+1)$$

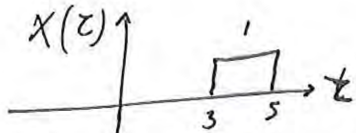


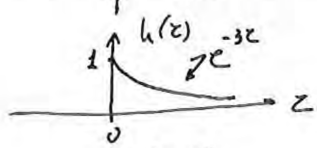


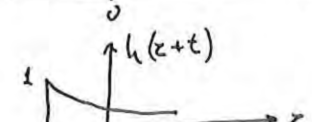


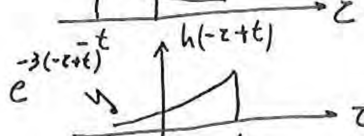
Problema 4. $x(t) = u(t-3) - u(t-5)$; $h(t) = e^{-3t} \cdot u(t)$

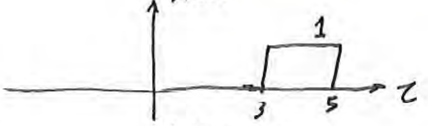
- Calcular $y(t) = x(t) * h(t)$

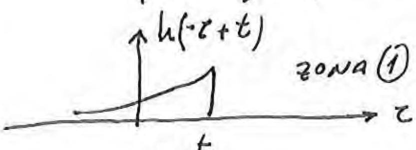




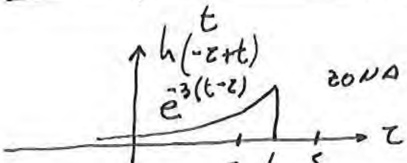








ZONA ① $t < 3 \Rightarrow y(t) = 0$



ZONA ② $3 \le t < 5$

$$y(t) = \int_3^t e^{-3t} \cdot e^{+3\tau}\, d\tau = e^{-3t} \cdot \int_3^t e^{+3\tau}\, d\tau$$

$$y(t) = e^{-3t} \frac{1}{+3} \cdot \left[e^{+3\tau}\right]_3^t = + \frac{e^{-3t}}{3} \left(e^{+3t} - e^{+9}\right) = + \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t+9}\right)$$

ZONA ③ $t \ge 5$

$$y(t) = \int_3^5 e^{-3t} \cdot e^{+3\tau}\, d\tau = e^{-3t} \frac{1}{+3} \left(e^{+3\tau}\right)\Big|_3^5 = + \frac{e^{-3t}}{3} \left(e^{+3 \cdot 5} - e^{+3 \cdot 3}\right)$$

Agrupando $y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<3 \\ -\frac{1}{3}\left(e^{-3t+9}-1\right) & \text{si } 3\leq t<5 \\ -\frac{1}{3}\left(e^{-3t+9}-e^{-3t+15}\right) & \text{si } t\geq 5 \end{cases}$

Calcular $g(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} * h(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t-3) - \delta(t-5)$$

$$g(t) = h(t-3) - h(t-5) = e^{-3(t-3)} \cdot u(t-3) - e^{-3(t-5)} \cdot u(t-5)$$

¿Qué relación hay entre $g(t)$ e $y(t)$?

¿ $g(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$? $\quad \dfrac{dy(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{si } t<3 \\ e^{-3t+9} & \text{si } 3\leq t<5 \\ e^{-3t+9} - e^{-3t+15} & \text{si } t\geq 5 \end{cases}$

Podemos comprobar que $g(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$

(P5) Estudiar la invertibilidad.

(1) $y(t) = x(t-4)$. $\quad x(t) \to \boxed{T} \xrightarrow[v(t)]{y(t)} \boxed{T^{-1}} \to z(t)$

$\Rightarrow \boxed{z(t) = v(t+4)}$

(2) $y(t) = \cos(x(t))$. No invertible:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = 0 \to y_1(t) = 0 \\ x_2(t) = 2\pi \to y_2(t) = 0 \end{array}\right\}.$$

(3) $y(t) = t \cdot x(t)$. No invertible. $x_1(t) = \delta(t)$, $x_2(t) = 2\delta(t)$ dan la misma salida $y_1(t) = y_2(t) = 0$.

(4) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$. Invertible:

$\boxed{z(t) = \dfrac{dv(t)}{dt}}$ Lo comprobamos.

TEOREMA DEL VALOR INTEGRAL

$$z(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau\right] \overset{\downarrow}{=} x(t)_{//}$$

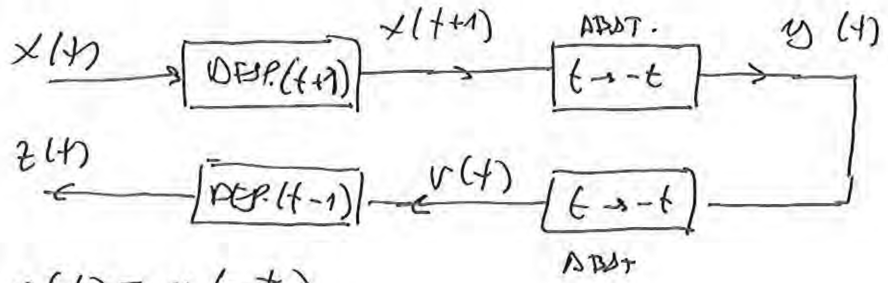
(5) $y(t) = x(t) \cdot x(t-1)$. Destruye información cuando $x(t) = 0$ o bien $x(t-1) = 0$. Buscamos un contraejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = \delta(t) \to y_1(t) = 0 \\ x_2(t) = 2\delta(t) \to y_2(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No invertible.}$$

¿POR QUÉ? REPRESENTAR

15

(6) $y(t) = x(1-t)$. Hemos hecho varias operaciones:



$r(t) = y(-t)$

$z(t) = r(t-1) = y(-(t-1)) = y(-t+1)$

$$\boxed{z(t) = y(1-t)}$$

$y(t) = x(1-t)$

Lo comprobamos: $z(t) = y(1-t) \overset{\alpha}{=} x(\cancel{1}-(1-t)) = x(t)$ //

(P6) SLIT dado por $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau-2)\, d\tau$

(1) ¿Respuesta al impulso? Hago $x(t) = \delta(t)$ y para ese caso, $y(t)$ será $h(t)$.

$x(t) = \delta(t) \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} \delta(\tau-2)\, d\tau =$

$= e^{-t} \int_{-\infty}^{t} \underline{e^{\tau}\delta(\tau-2)}\, d\tau = e^{-t} \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{2} \delta(\tau-2)\, d\tau =$

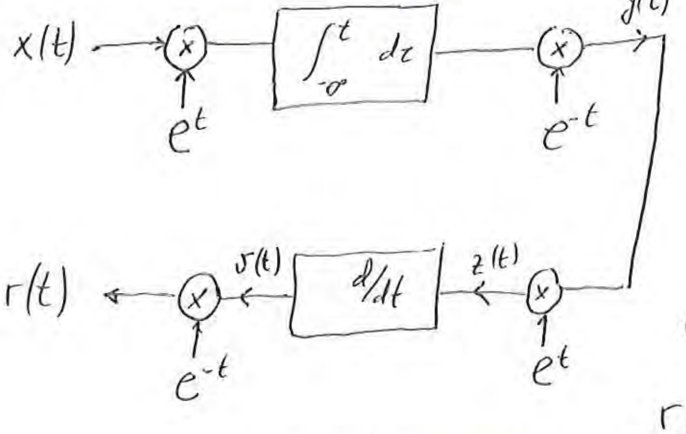
$= e^{-t} e^{2} \cdot u(t-2) = \boxed{e^{-(t-2)} \cdot u(t-2) = h(t)}$

(2) $x(t) = u(t+1) - u(t-2) \Rightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \ldots$

Problema 5 ; apdo 7.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} \cdot x(\tau)\, d\tau \longrightarrow = e^{-t} \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} \cdot x(\tau)\, d\tau$$

¿invertible?



¿$r(t) = x(t)$?

Veamos: $z(t) = e^{t} \cdot y(t)$;

$$v(t) = \frac{dz(t)}{dt} = e^{t} \cdot y(t) + e^{t} \cdot \frac{dy(t)}{dt}$$

$$r(t) = e^{-t} \cdot v(t) = \underbrace{e^{-t} \cdot e^{t}}_{=1} \cdot y(t) + \underbrace{e^{-t} \cdot e^{t}}_{=1} \cdot \frac{dy(t)}{dt}$$

$$r(t) = y(t) + \frac{dy(t)}{dt}$$

$$r(t) = \cancel{e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} \cdot x(\tau) d\tau} - \cancel{e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} \cdot x(\tau) d\tau} + e^{-t} \left[e^{t} \cdot x(t) \right] = e^{-t} \cdot e^{t} \cdot x(t) = x(t)$$

INVERTIBLE CON $\boxed{y_{inv}(t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt}}$

Problema 5; apdo 8.

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$ ¿invertible?

No puede ser invertible, ya que la derivada por ejemplo de cualquier constante siempre es cero.

$x_1(t) = 3\ \forall t \Rightarrow y_1(t) = 0$

$x_2(t) = 2\ \forall t \Rightarrow y_2(t) = 0$

Problema 6; apdo 9.

$y(t) = x(2t)$ ¿invertible?

La compresión y la expansión en señales de tiempo continuo sabemos que son invertibles

$$x(t) \longrightarrow \boxed{y(t) = x(2t)} \xrightarrow{y(t) = x(2t)} \boxed{z(t) = y\left(\tfrac{t}{2}\right)} \longrightarrow z(t) = y\left(\tfrac{t}{2}\right) = x\left(2 \cdot \tfrac{t}{2}\right) = x(t)$$

INVERTIBLE. El sistema inverso es $y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$

Problema 5, apdo 10.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \operatorname{sen}(\tau) \cdot x(\tau)\, d\tau$$ ¿invertible?

Como la función seno vale cero en el origen, pruebo

$$x_1(t) = \delta(t) \Rightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} \operatorname{sen}(\tau) \cdot \delta(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} \operatorname{sen}(0) \cdot \delta(\tau)\, d\tau = 0$$

$$x_2(t) = 2 \cdot \delta(t) \Rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} \operatorname{sen}(\tau) \cdot 2 \cdot \delta(\tau) = 2 \cdot \int_{-\infty}^{t} \operatorname{sen}(0) \cdot \delta(\tau)\, d\tau = 0$$

No INVERTIBLE

(P7) Sistema con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$.
Invariante. $x_1(t) \rightarrow \boxed{SI} \rightarrow y_1(t)$

$x_2(t) = x_1(t-t_0) \longrightarrow y_2(t) = y_1(t-t_0)$.

Si la entrada es periódica:

$x_1(t) = x_1(t+T_0)$

$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$

$x_2(t) = x_1(t+T_0) \rightarrow y_2(t) = y_1(t+T_0)$

$x_1(t) = x_1(t) \longrightarrow y_2(t) = y_1(t)$

Por ser $x_1(t)$ periódico

$y_1(t)$ es periódica (T_0)

(P8) (1) $x(t) = 0 \ \forall t < t_0 \Rightarrow y(t) = 0 \ \forall t < t_0$.

S: sistema lineal, sistema causal

Por ser S causal, $y(t) = f(x(t))$ con $t \in (-\infty, t_0)$, pero en ese intervalo $x(t) = 0$, y por ser S lineal, la respuesta a entrada nula es salida nula. Por tanto,

$y(t) = 0 \quad \forall t \in (-\infty, t_0)$

(2) $x(t) = x(t)\cdot u(t) \Rightarrow y(t) = y(t)\cdot u(t)$

$x(t) = x(t)\cdot u(t-t_0) \Rightarrow y(t) = y(t)\cdot u(t-t_0)$

El sistema $y(t) = x(t)\cdot x(t+1)$ no es lineal (demostrar), y cumple:

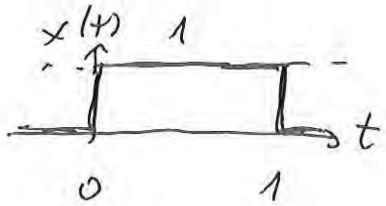
$x(t) = x(t)\cdot u(t-t_0) \Rightarrow y(t) = x(t)\cdot u(t-t_0)\cdot x(t+1)\cdot u(t-t_0+1)$

$= x(t)\cdot x(t+1)\cdot u(t-t_0)$

(3) El sistema $y(t) = x(t) + 1$ no es lineal (salida no nula para entrada nula). No cumple la condición, ya que:

$x(t) = x(t) \cdot u(t) \Rightarrow$

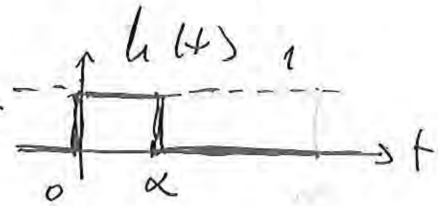
$y(t) = x(t) + 1 = x(t) \cdot u(t) + 1 \neq y(t) \cdot u(t)$ //



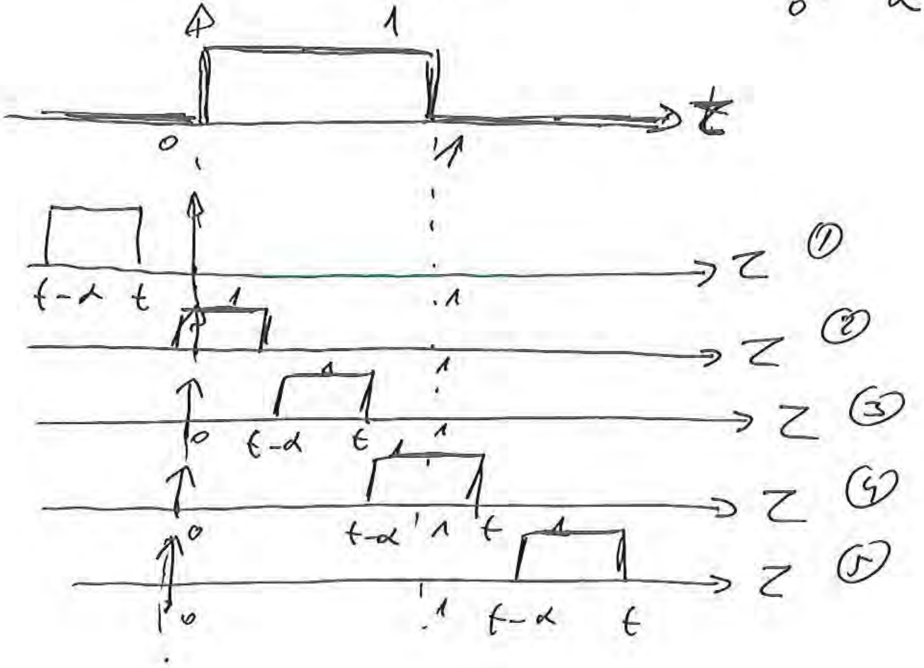
P10 $x(t) = u(t) - u(t-1)$

$h(t) = x(t/\alpha)$

$0 < \alpha \leq 1$



$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$



① $t < 0 \rightarrow y(t) = 0$

② $\left.\begin{array}{l} t \geq 0 \\ t-\alpha < 0 \end{array}\right\}$ $0 \leq t < \alpha \rightarrow y(t) = \int_0^t 1 \cdot d\tau = [\tau]_0^t = t$

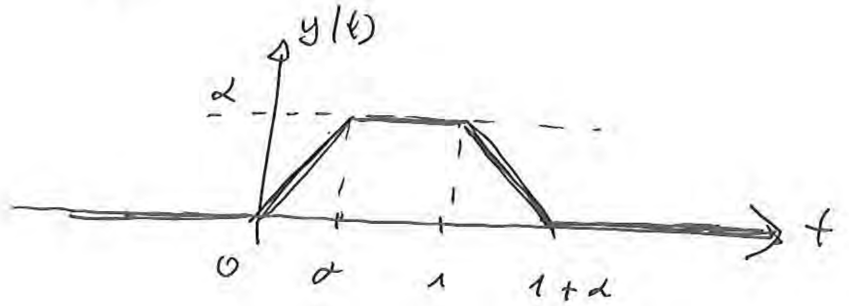
③ $\left.\begin{array}{l} t-\alpha \geq 0 \\ t < 1 \end{array}\right\}$ $\alpha \leq t < 1 \rightarrow y(t) = \int_{t-\alpha}^{t} 1\, d\tau = [\tau]_{t-\alpha}^{t} = \alpha$

④ $\left.\begin{array}{l} t-\alpha < 1 \\ t \geq 1 \end{array}\right\}$ $1 \leq t < 1+\alpha \rightarrow y(t) = \int_{t-\alpha}^{1} d\tau = 1 - t + \alpha$

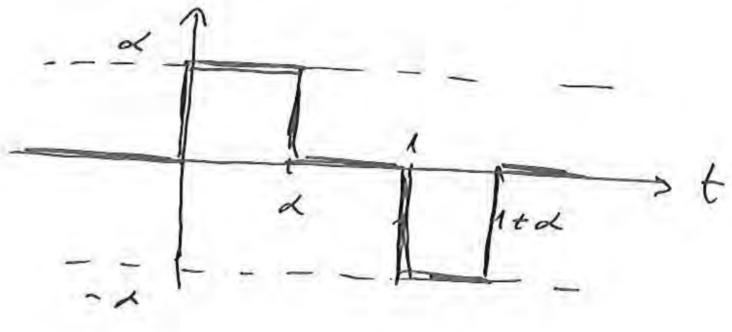
⑤ $t - \alpha \geq 1 \rightarrow t \geq 1+\alpha \rightarrow y(t) = 0$

Por tanto:

$$y(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < \alpha \\ \alpha, & \alpha \le t < 1 \\ 1-\cancel{t}+\alpha, & 1 \le t < 1+\alpha \\ 0, & \text{---} \end{cases}$$



(b) $dy(t)/dt$ contiene solo 3 discontinuidades. si α1.

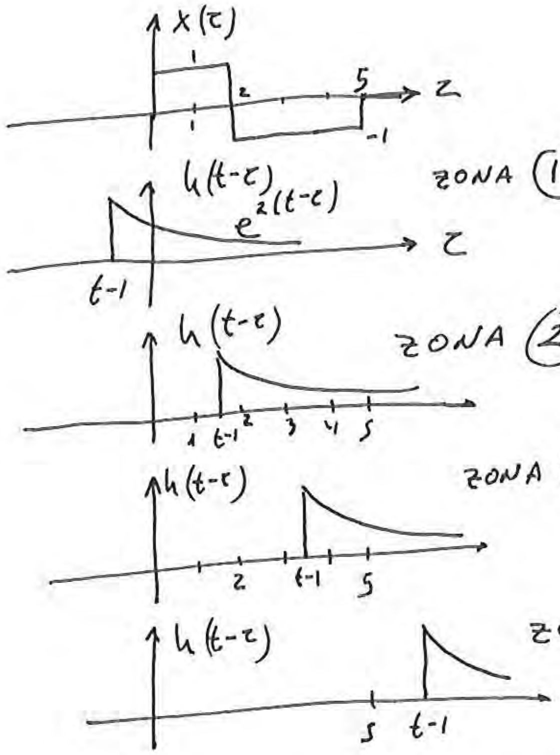


$$\boxed{\alpha = 1}$$

Problema 9, cuestión b.

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x(t) = u(t) - 2\cdot u(t-2) + u(t-5) \\ h(t) = e^{2t}\cdot u(1-t) \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

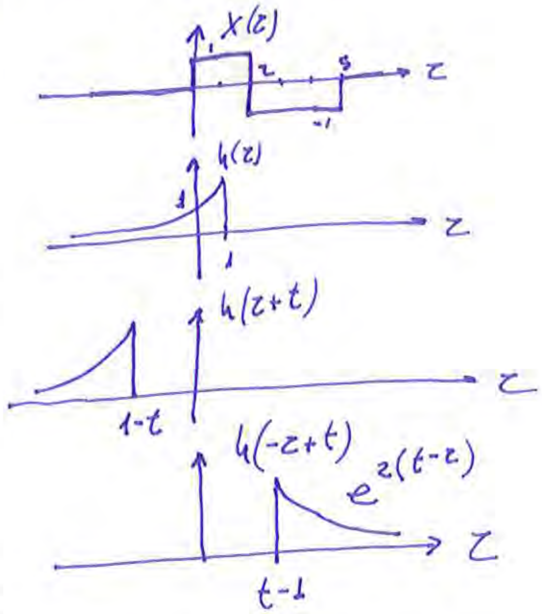


ZONA ① ⇒ $t-1 \leq 0$

ZONA ② $0 \leq t-1 \leq 2$

ZONA ③ $2 < t-1 \leq 5$

ZONA ④ $t-1 > 5$



ZONA 1 ⇒ $t \leq 1$ ⇒ $y(t) = \int_0^2 e^{2(t-\tau)} d\tau + \int_2^5 (-1)\cdot e^{2(t-\tau)} d\tau =$

$$= e^{2t}\left[\int_0^2 e^{-2\tau} d\tau - \int_2^5 e^{-2\tau} d\tau\right] = e^{2t}\left[-\frac{1}{2}(e^{-4}-1) + \frac{1}{2}(e^{-10}-e^{-4})\right]$$

$$y(t) = \frac{e^{2t}}{2}\left(1 - 2\cdot e^{-4} + e^{-10}\right)$$

ZONA 2 ⇒ $1 < t \leq 3$ ⇒ $y(t) = \int_{t-1}^2 e^{2(t-\tau)} d\tau + \int_2^5 (-1)\cdot e^{2(t-\tau)} d\tau =$

$$= e^{2t}\left[\int_{t-1}^2 e^{-2\tau} d\tau - \int_2^5 e^{-2\tau} d\tau\right] = e^{2t}\left[-\frac{1}{2}\cdot e^{-2\tau}\Big|_{t-1}^{2} + \frac{1}{2} e^{-2\tau}\Big|_2^5\right]$$

$$y(t) = \frac{e^{2t}}{2}\left(e^{-2t+2} - 2\cdot e^{-4} + e^{-10}\right)$$

ZONA 3 $\Rightarrow$ $3 < t \le 6 \Rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{5} (-1)\cdot e^{2(t-\tau)}\, d\tau =$

$$= -e^{2t}\int_{t-1}^{5} e^{-2\tau}\, d\tau = \frac{e^{2t}}{2} \cdot e^{-2\tau}\Big|_{t-1}^{5} =$$

$$y(t) = \frac{e^{2t}}{2}\left(e^{-10} - e^{-2t+2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2t-10} - e^{2}\right)$$

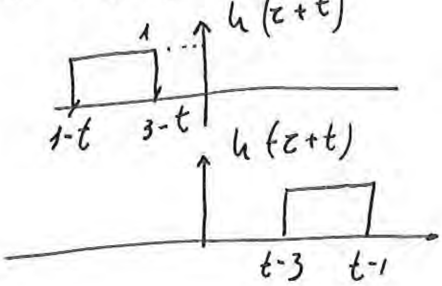
ZONA 4 $\Rightarrow$ $t > 6 \Rightarrow y(t) = 0$

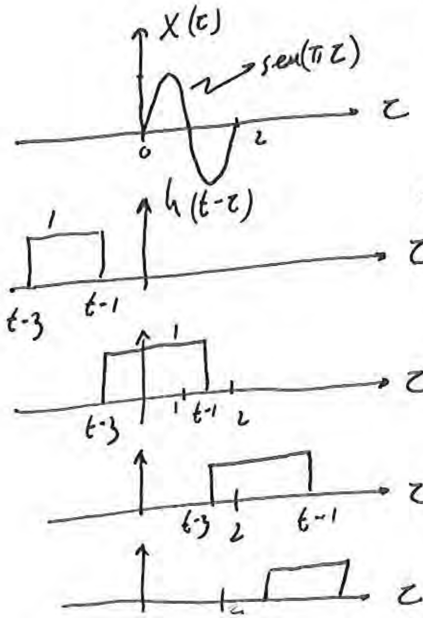
Agrupando

$$y(t) = \begin{cases} \frac{e^{2t}}{2}\left(1 - 2\cdot e^{-4} + e^{-10}\right) & \text{si } t \le 1 \\ \frac{e^{2t}}{2}\left(e^{-2t+2} - 2e^{-4} + e^{-10}\right) & \text{si } 1 < t \le 3 \\ \frac{1}{2}\left(e^{2t-10} - e^{2}\right) & \text{si } 3 < t \le 6 \\ 0 & \text{si } t > 6 \end{cases}$$

Problema 9, cuestión c.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\, d\tau$$





ZONA ① $\Rightarrow$ $t-1 < 0$

ZONA 2 $\Rightarrow$ $0 < t-1 < 2$

ZONA 3 $\Rightarrow$ $0 < t-3 < 2$

ZONA 4 $\Rightarrow$ $t-3 > 2$

ZONA 1 $\Rightarrow$ $t<1$ $\Rightarrow$ $y(t)=0$

ZONA 2 $\Rightarrow$ $1\le t<3$ $\Rightarrow$ $y(t)=\int_0^{t-1} \operatorname{sen}(\pi\tau)\,d\tau = -\frac{1}{\pi}\left(\cos(\pi\tau)\Big|_0^{t-1}\right)$

$$y(t)=\frac{1}{\pi}\left(1-\cos[\pi(t-1)]\right)$$

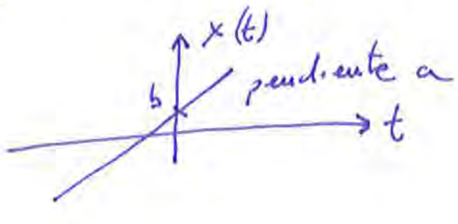
ZONA 3 $\Rightarrow$ $3\le t<5$ $\Rightarrow$ $y(t)=\int_{t-3}^{2} \operatorname{sen}(\pi\tau)\,d\tau = -\frac{1}{\pi}\left(\cos(\pi\tau)\Big|_{t-3}^{2}\right)$

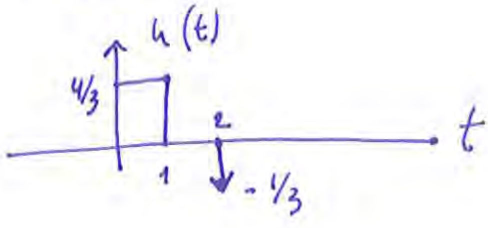
$$y(t)=-\frac{1}{\pi}\left(1-\cos[\pi(t-3)]\right)=\frac{1}{\pi}\left\{\cos[\pi(t-3)]-1\right\}$$

ZONA 4 $\Rightarrow$ $t\geq 5$ $\Rightarrow$ $y(t)=0$

Agrupando: $y(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t<1 \\ \frac{1}{\pi}\left\{1-\cos[\pi(t-1)]\right\} & \text{si } 1\le t<3 \\ \frac{1}{\pi}\left\{\cos[\pi(t-3)]-1\right\} & \text{si } 3\le t<5 \\ 0 & \text{si } t\geq 5 \end{cases}$

Problema 9, cuestión d.





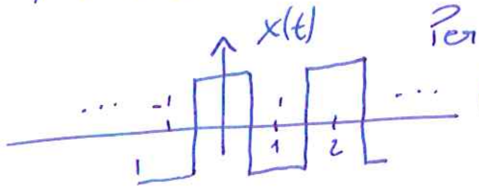
$x(t)=at+b$;

$h(t)=\frac{4}{3}\left[u(t)-u(t-1)\right]-\frac{1}{3}\delta(t-2)$;

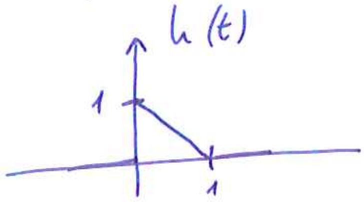
$$y(t)=x(t)*h(t)=x(t)*\left[\frac{4}{3}u(t)-\frac{4}{3}u(t-1)-\frac{1}{3}\delta(t-2)\right]$$

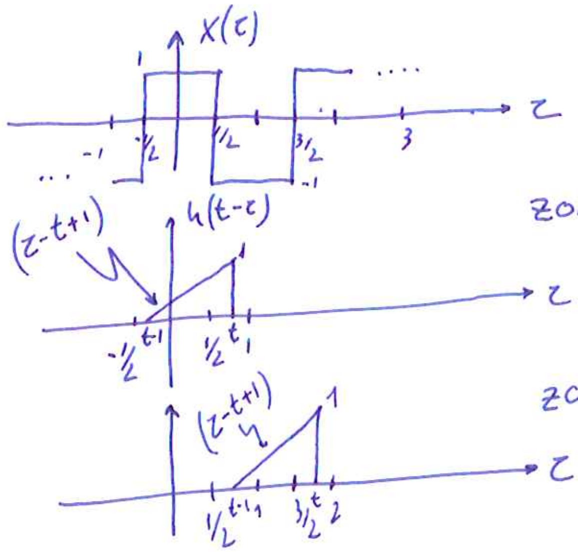
$$y(t)=\frac{4}{3}\left[x(t)*u(t)\right]-\frac{4}{3}\left[x(t)*u(t-1)\right]-\frac{1}{3}\left[x(t)*\delta(t-2)\right]$$

Problema 9, apdo e.



Periódica de periodo $T=2$





ZONA (1) si $t > \frac{1}{2}$ pero $t < \frac{3}{2}$

ZONA (2) si $t > \frac{3}{2}$ pero $t < \frac{5}{2}$

ZONA (1) $\Rightarrow$ $y(t) = \int_{t-1}^{\frac{1}{2}} (\tau - t + 1)\cdot 1 \, d\tau + \int_{1/2}^{t} (-1)(\tau - t + 1)\, d\tau =$

$$= \int_{t-1}^{1/2} \tau \, d\tau + (-t+1)\int_{t-1}^{1/2} d\tau - \int_{1/2}^{t} \tau\, d\tau + \int_{1/2}^{t} d\tau \cdot (t-1) =$$

$$= \frac{\tau^2}{2}\Big|_{t-1}^{1/2} + (-t+1)\cdot\left(\tau\Big|_{t-1}^{1/2}\right) - \left(\frac{\tau^2}{2}\Big|_{1/2}^{t}\right) + (t-1)\cdot\left(\tau\Big|_{1/2}^{t}\right) =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{(t-1)^2}{2} + (-t+1)\cdot\left(\frac{1}{2} - (t-1)\right] - \left[\frac{t^2}{2} - \frac{1}{8}\right] + (t-1)\left(t - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} + t - \frac{3}{2}t + t^2 + \frac{3}{2} - t - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{8} + t^2 - \frac{1}{2}t - t + \frac{1}{2} =$$

$$= \underbrace{-\frac{t^2}{2} + t^2 - \frac{t^2}{2} + t^2}_{t^2} + \underbrace{t - \frac{3}{2}t - t - \frac{1}{2}t - t}_{-3t} + \underbrace{\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}}_{+\frac{7}{4}} =$$

$$\boxed{y(t) = t^2 - 3t + \frac{7}{4} \quad \text{si } \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2}}$$

ZONA ② $\Rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{\frac{3}{2}} (-1)(\tau - t + 1)\, d\tau + \int_{3/2}^{t} (1)(\tau - t + 1)\, d\tau =$

$$= -\int_{t-1}^{\frac{3}{2}} \tau\, d\tau + \int_{t-1}^{\frac{3}{2}} d\tau \cdot (t-1) + \int_{3/2}^{t} \tau\, d\tau + (-t+1)\cdot \int_{3/2}^{t} d\tau =$$

$$= -\left(\frac{\tau^2}{2} \Big|_{t-1}^{\frac{3}{2}} \right) + (t-1)\cdot\left(\frac{3}{2} - (t-1)\right] + \frac{\tau^2}{2}\Big|_{3/2}^{t} + (-t+1)\left(t - \frac{3}{2}\right) =$$

$$= -\left[\frac{9}{8} - \frac{(t-1)^2}{2} \right] + (t-1)\left(\frac{5}{2} - t\right) + \frac{t^2}{2} - \frac{9}{8} - t^2 + \frac{3}{2}t + t - \frac{3}{2} =$$

$$= -\frac{9}{8} + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} - t + \frac{5}{2}t - t^2 - \frac{5}{2} + t + \frac{t^2}{2} - \frac{9}{8} - t^2 + \frac{3}{2}t + t - \frac{3}{2} =$$

$$= \underbrace{\frac{t^2}{2} - t^2 + \frac{t^2}{2} - t^2}_{-t^2} \underbrace{- t + \frac{5}{2}t + t + \frac{3}{2}t + t}_{+5t} \underbrace{- \frac{9}{8} + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} - \frac{9}{8} - \frac{3}{2}}_{-5'75} =$$

$$\boxed{y(t) = -t^2 + 5t - 5'75 \quad \text{si} \quad \frac{3}{2} < t < \frac{5}{2}}$$

Hay que darse cuenta que $y(t)$ será también periódica de periodo $T = 2$.

(P11) Determine si es cierto o falso:

(1) $h(t) = h(t+T_0)$ SLIT } ¿Estable?

Si denominamos $k_s = \int_0^{T_0} |h(t)|\,dt$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k_s = \infty. \Rightarrow \underline{\text{Inestable}}.$$

(2) Inverso de un SLIT causal. ¿Es siempre causal?
Usamos un contraejemplo sencillo. $h(t) = \delta(t-4)$ (causal). Su inverso es $h_i(t) = \delta(t+4)$, ya que

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t-4) * \delta(t+4) = \delta(t)$$

y $h_i(t)$ claramente no es causal.

(3) $|h(t)| \leq k \;\; \forall t$, SLIT. ¿Es estable?
No, ya que por ejemplo $h(t) = u(t)$, cumple la condición que nos dan con $k=1$ y no es estable. La condición de estabilidad es más fuerte que ésta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| \leq k \;//$$

(4) Cierto, si $h(t) = h(t)\,(u(t+t_1) - u(t-t_2))$, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)|\,dt < \infty \;//$

(5) SLIT causal no implica estable, por ejemplo $h(t) = u(t)$.

(6) $\rightarrow \boxed{h_1(t)} \rightarrow \boxed{h_2(t)} \rightarrow$

no causal — causal

$h_1(t) = \delta(t+1) \qquad h_2(t) = \delta(t-1)$

$h_{eq}(t) = h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)$ (causal y anticausal).

(7) SLIT, $s(t)$ respuesta al escalón.

¿ $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|\,dt < \infty \iff$ Estable ?

La condición de estabilidad en un SLIT es $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt < \infty$.
Busco un contraejemplo, sistema con $h(t)$ absolutamente integrable y cuya $s(t)$ no sea absolutamente integrable.

$h(t) = e^{-t} u(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big]_0^{\infty} = 1$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau \overset{t \geq 0}{=} \int_0^t e^{-\tau}\,d\tau = \left[-e^{-\tau}\right]_0^t = 1 - e^{-t}$$

$s(t) = 0 \ (t < 0) \Rightarrow s(t) = (1 - e^{-t}) \cdot u(t)$

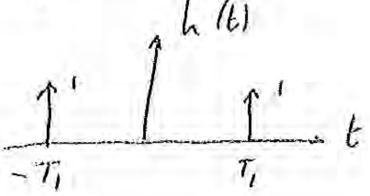
$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|\,dt = \infty$ // No es cierto.

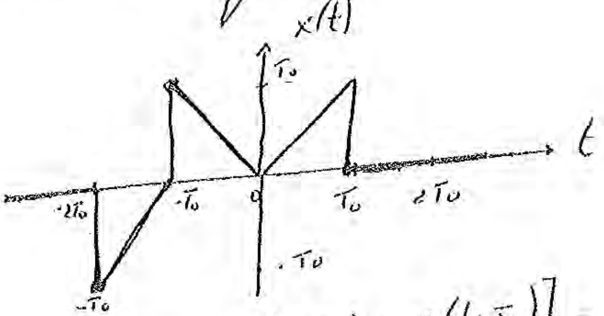
(8) Cierto, es equivalente a decir $h(t) = h(t)\,u(t)$.

Problema (12) Sea el SLIT con $h(t) = \delta(t-T_1) + \delta(t+T_1)$ al que se le introduce $x(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} T_0 + t & \text{si } -2T_0 \leq t < -T_0 \\ |t| & \text{si } -T_0 \leq t < T_0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad \text{con } T_0 > 0$$

Dibujar $x(t)$ y $h(t)$ y calcular la salida.
Aplicar al caso $T_1 = 2T_0$ y al caso $T_1 = \frac{T_0}{2}$

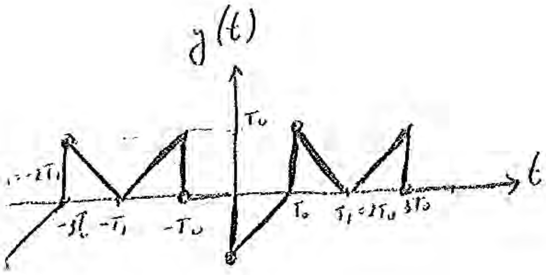




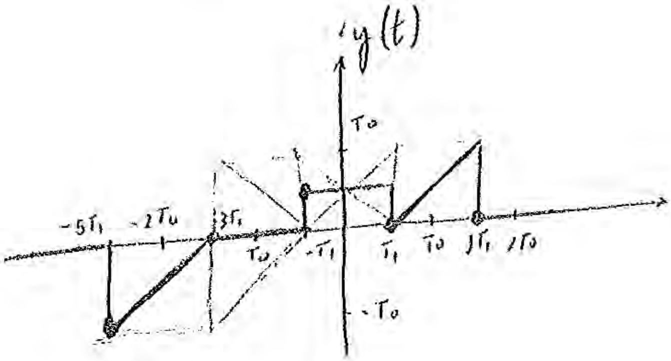
$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)} = x(t) * [\delta(t-T_1) + \delta(t+T_1)] =$$

$$= x(t) * \delta(t-T_1) + [x(t) * \delta(t+T_1)] = \boxed{x(t-T_1) + x(t+T_1)}$$

Para $T_1 = 2T_0$

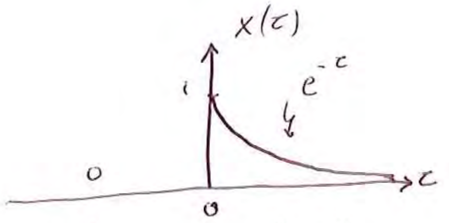


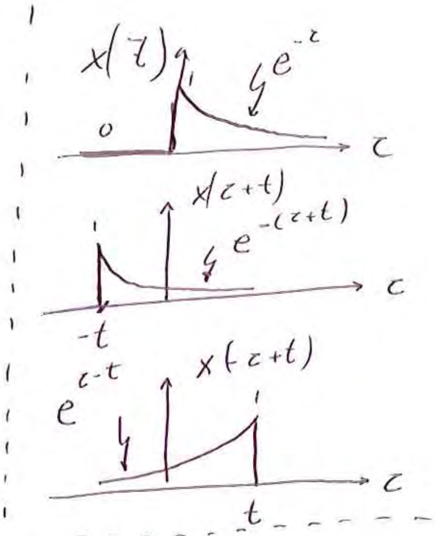
Para $T_1 = T_0/2$

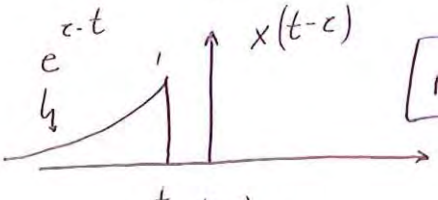


Problema (13) Calcular $r(t) = x(t) * x(t)$

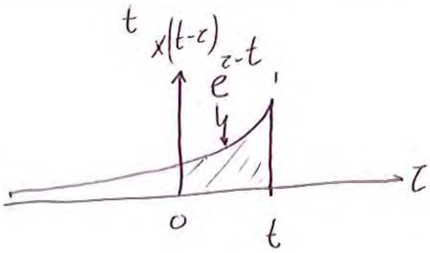
siendo $x(t) = e^{-t} \cdot u(t)$.







$$\boxed{r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot x(t-\tau)\, d\tau = 0} \quad \text{si } \boxed{t<0}$$

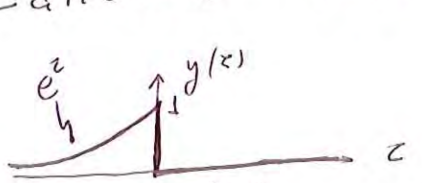


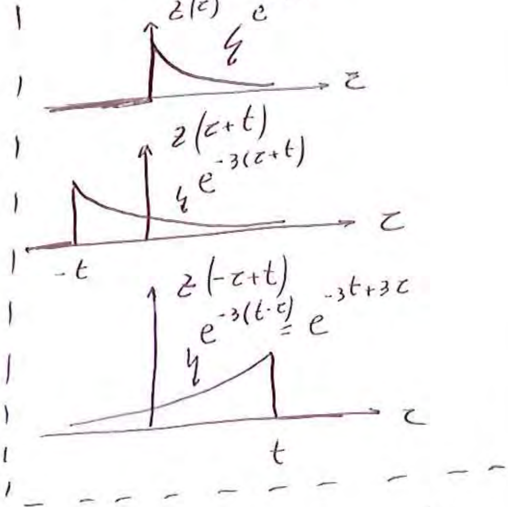
$$\boxed{r(t) = \int_0^t e^{-\tau} \cdot e^{\tau - t}\, d\tau} = e^{-t} \int_0^t \underbrace{e^{0}}_{1}\, d\tau =$$

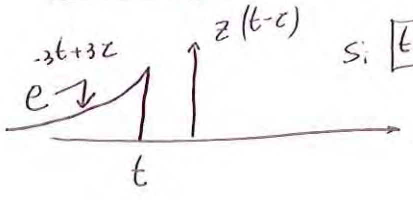
$$r(t) = e^{-t} \cdot \tau \Big|_0^t = \boxed{t \cdot e^{-t}} \quad \text{si } t>0$$

Luego $\boxed{r(t) = t \cdot e^{-t} \cdot u(t)}$

Calcular $v(t) = y(t) * z(t)$ con $\begin{cases} y(t) = e^{t} \cdot u(-t) \\ z(t) = e^{-3t} \cdot u(t) \end{cases}$







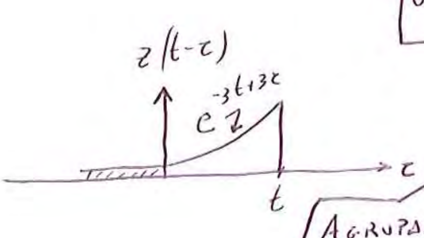
si $\boxed{t<0} \Rightarrow v(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} \cdot e^{-3t} \cdot e^{3\tau}\, d\tau =$

$= e^{-3t} \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{4\tau}\, d\tau =$

$= e^{-3t}\, \frac{1}{4}\, e^{4\tau} \Big|_{-\infty}^{t} =$

$v(t) = \frac{1}{4} e^{-3t} \left(e^{4t} - \cancel{e^{-\infty}} \right) =$ 0

$\boxed{v(t) = \frac{1}{4} e^{t}}$

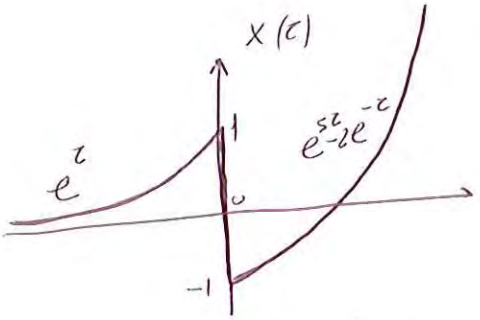


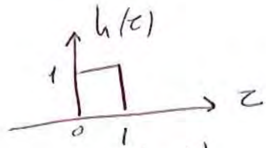
si $\boxed{t>0} \Rightarrow v(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau} \cdot e^{-3t} \cdot e^{3\tau}\, d\tau = e^{-3t}\, \frac{1}{4}\, e^{4\tau} \Big|_{-\infty}^{0}$

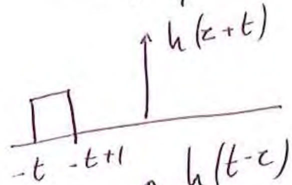
$= \frac{1}{4} e^{-3t} (1 - 0) = \boxed{\frac{1}{4} \cdot e^{-3t}}$

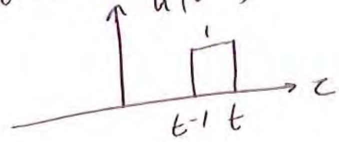
$\boxed{\text{AGRUPANDO: } v(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{t} & \text{si } t<0 \\ \frac{1}{4} e^{-3t} & \text{si } t>0 \end{cases}}$

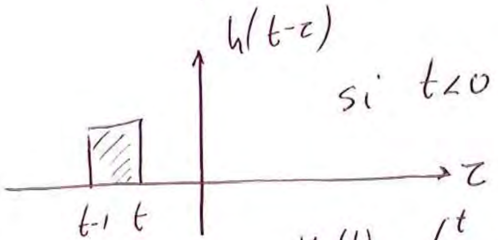
$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \text{con} \quad \begin{cases} h(t) = u(t) - u(t-1) \\ x(t) = \begin{cases} e^{t} & \text{si } t<0 \\ e^{5t} - 2e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$







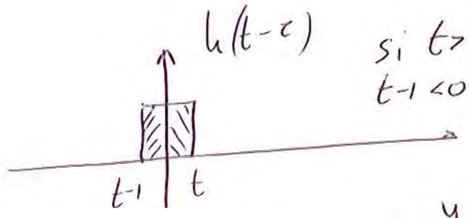




si $t<0$

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} e^{\tau} \cdot 1 \, d\tau = e^{\tau}\Big|_{t-1}^{t} =$$

$$= e^{t} - e^{t-1} = e^{t}(1-e^{-1})$$



si $t>0$

$t-1<0 \Rightarrow t<1 \Rightarrow 0<t<1$

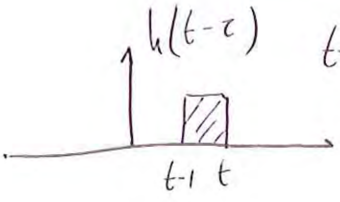
$$y(t) = \int_{t-1}^{0} e^{\tau} d\tau + \int_{0}^{t} e^{5\tau} - 2 e^{-\tau} d\tau =$$

$$= e^{\tau}\Big|_{t-1}^{0} + \frac{1}{5}\left(e^{5\tau}\Big|_{0}^{t}\right) - 2 \cdot \frac{1}{-1} e^{-\tau}\Big|_{0}^{t}$$

$$= 1 - e^{(t-1)} + \frac{1}{5}\left(e^{5t} - 1\right) + 2\left(e^{-t} - 1\right)$$

$$= 1 - e^{t} \cdot e^{-1} + \frac{1}{5} e^{5t} - \frac{1}{5} + 2 e^{-t} - 2$$

$$\boxed{y(t) = -1{,}2 + 0{,}2 \cdot e^{5t} - e^{(t-1)} + 2 \cdot e^{-t}}$$



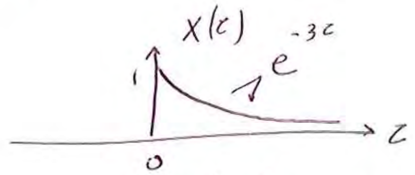
$t-1>0 \Rightarrow t>1$

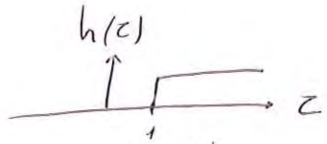
$$y(t) = \int_{t-1}^{t} e^{5\tau} - 2 \cdot e^{-\tau} d\tau = \frac{1}{5} e^{5\tau}\Big|_{t-1}^{t} - 2 \frac{1}{-1} \cdot e^{-\tau}\Big|_{t-1}^{t}$$

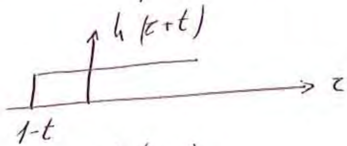
$$\boxed{y(t) = \frac{1}{5}\left(e^{5t} - e^{5(t-1)}\right) + 2\left(e^{-t} - e^{-(t-1)}\right)}$$

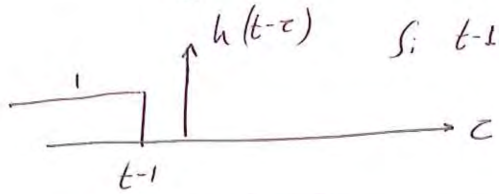
Problema 14

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x(t) = e^{-3t} \cdot u(t) \\ h(t) = u(t-1) \end{cases}$$

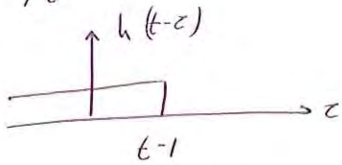


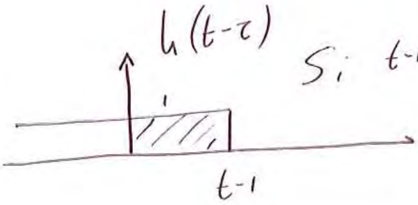






Si $t-1<0 \Rightarrow \boxed{t<1} \Rightarrow y(t)=0$





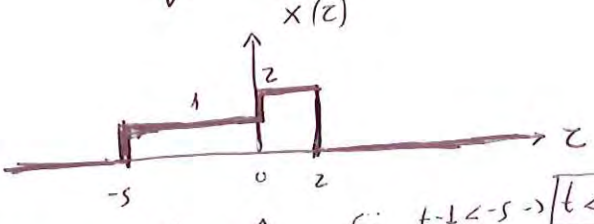
Si $t-1>0 \Rightarrow \boxed{t>1} \Rightarrow y(t) = \int_0^{t-1} e^{-3\tau} \cdot 1 \, d\tau$

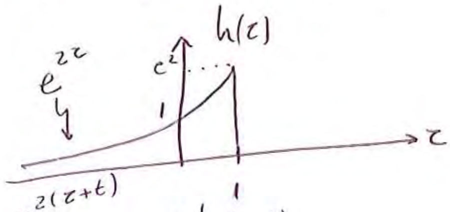
$$y(t) = \frac{1}{-3} \cdot e^{-3\tau}\Big|_0^{t-1} = -\frac{1}{3}\left(e^{-3(t-1)} - \underbrace{e^{-3\cdot 0}}_{=1}\right)$$

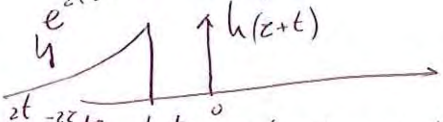
$$y(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3(t-1)}\right)$$

Agrupando: $\boxed{y(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3(t-1)}\right) \cdot u(t-1)}$

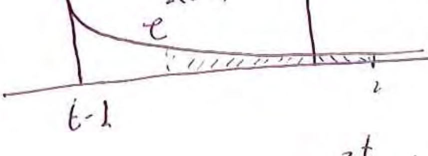
$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x(t) = u(t) - 2\cdot u(t-2) + u(t+5) \\ h(t) = e^{2t} \cdot u(1-t) \end{cases}$$

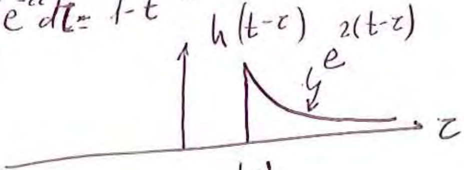






Si $t-1<-5 \rightarrow \boxed{t<-4}$



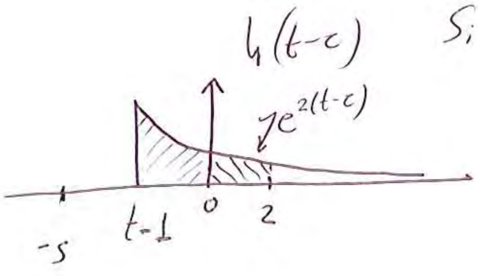


$$y(t) = \int_{-5}^{0} 1 \cdot e^{2t} \cdot e^{-2\tau} d\tau + \int_0^2 2 \cdot e^{2t} \cdot e^{-2\tau} d\tau =$$

$$= e^{2t} \cdot \frac{1}{-2} \cdot e^{-2\tau}\Big|_{-5}^{0} + 2 \cdot e^{2t} \cdot \frac{1}{-2} \cdot e^{-2\tau}\Big|_0^2 =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{2t} \cdot (1 - e^{+10}) - e^{2t}(e^{-4} - 1) = e^{2t}\left[-0{,}5 + \frac{e^{10}}{2} - e^{-4} + 1\right] =$$

$$y(t) = 11013{,}7145818 \cdot e^{2t}$$



Si $\begin{array}{l} t-1>-5 \Rightarrow t>-4 \\ t-1<0 \Rightarrow t<1 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \boxed{-4<t<1}$

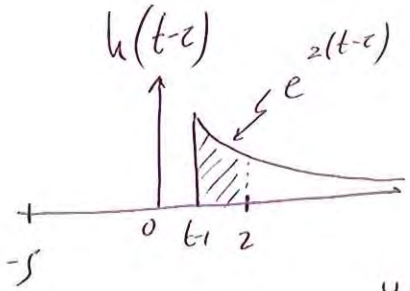
$$y(t)=\int_{t-1}^{0} 1\cdot e^{2t}\cdot e^{-2\tau}\,d\tau+\int_{0}^{2} 2\cdot e^{2t}\cdot e^{-2\tau}\,d\tau=$$

$$=e^{2t}\frac{1}{-2}\cdot e^{-2\tau}\Big|_{t-1}^{0}-e^{2t}\left(e^{-4}-1\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{2t}\left(e^{0}-e^{-2(t-1)}\right)-e^{2t}\left(e^{-4}-1\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{2t}\cdot e^{-2t}\cdot e^{2}-e^{-4}e^{2t}+e^{2t}=e^{2t}\left[-\frac{1}{2}-e^{-4}+1\right]+\frac{1}{2}e^{2}$$

$$\boxed{y(t)\simeq 0,48\,e^{2t}+3,69}$$

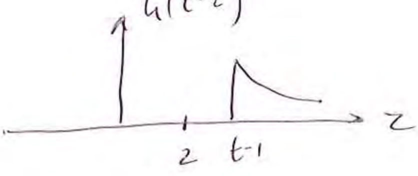


Si $\begin{array}{l} t-1>0 \\ t-1<2 \end{array} \Big\} \Rightarrow \begin{array}{l} t>+1 \\ t<3 \end{array} \Rightarrow \boxed{1<t<3}$

$$y(t)=\int_{t-1}^{2} 2\cdot e^{2t}\cdot e^{-2\tau}\,d\tau=2\cdot e^{2t}\int_{t-1}^{2} e^{-2\tau}\,d\tau$$

$$=2\cdot e^{2t}\frac{1}{-2}\cdot e^{-2\tau}\Big|_{t-1}^{2}=-e^{2t}\left(e^{-4}-e^{-2t+2}\right)$$

$$=-e^{-4}\cdot e^{2t}+e^{2}=\boxed{-1,83\cdot 10^{-2}e^{2t}+7'39}$$



Si $t-1>2 \Rightarrow \boxed{t>3}$ $\quad y(t)=0$

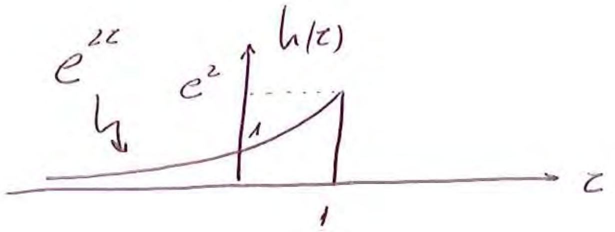
Agrupando: $y(t)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}+0,5\cdot e^{10}-e^{-4}\right)\cdot e^{2t} & \text{si } t<-4\\ \left(0,5-e^{-4}\right)\cdot e^{2t}+\frac{e^{2}}{2} & \text{si } -4\leq t<1\\ -e^{-4}\cdot e^{2t}+e^{2} & \text{si } 1\leq t<3\\ 0 & \text{si } t\geq 3\end{cases}$

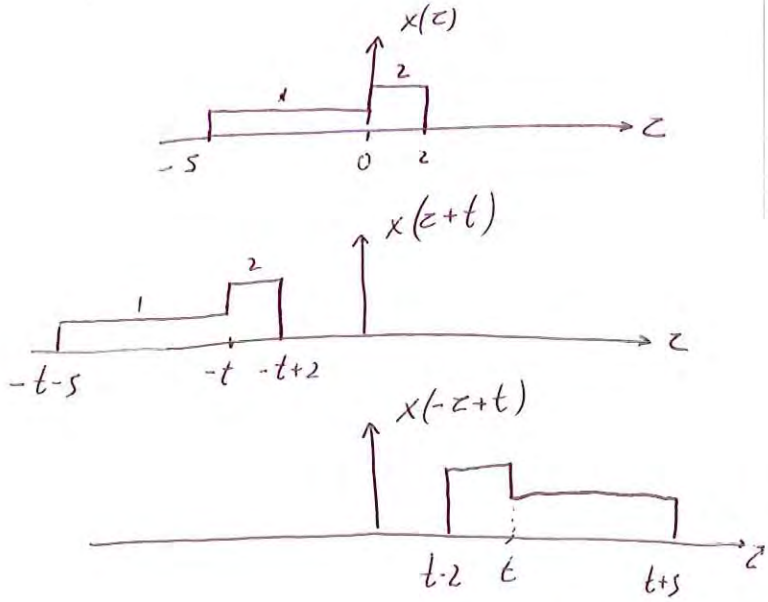
Lo hacemos también al revés...

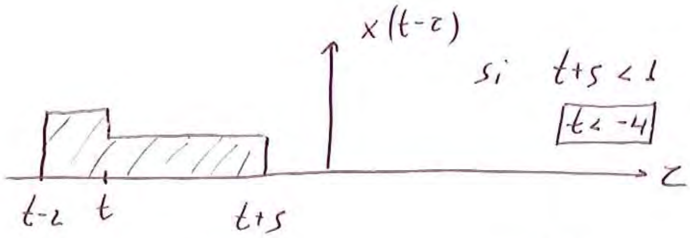
$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x(t) = u(t) - 2\cdot u(t-2) + u(t+5) \\ h(t) = e^{2t}\cdot u(1-t) \end{cases}$$

Aplicamos la propiedad conmutativa.

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)\, d\tau$$







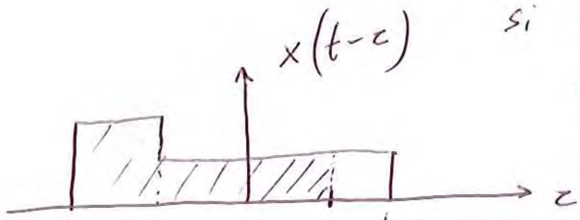
si $t+5<1$

$\boxed{t<-4}$

$$y(t) = \int_{t-2}^{t} 2\cdot e^{2\tau}\, d\tau + \int_{t}^{t+5} 1\cdot e^{2\tau}\, d\tau =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\, e^{2\tau}\Big|_{t-2}^{t} + \frac{1}{2}\, e^{2\tau}\Big|_{t}^{t+5} = e^{2t} - e^{2(t-2)} + \frac{1}{2}e^{2(t+5)} - \frac{1}{2}e^{2t} =$$

$$y(t) = \boxed{e^{2t}\left(1 - e^{-4} + \frac{1}{2}\cdot e^{10} - \frac{1}{2}\right)} \simeq 11013{,}71\cdot e^{2t}$$



si $\left.\begin{array}{l} t+5>1 \Rightarrow t>-4 \\ t<1 \Rightarrow t<1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{-4<t<1}$

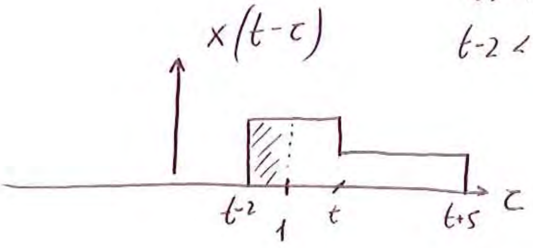
$$y(t) = \int_{t-2}^{t} 2\cdot e^{2\tau}\, d\tau + \int_{t}^{1} 1\cdot e^{2\tau}\, d\tau =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\, e^{2\tau}\Big|_{t-2}^{t} + \frac{1}{2}\, e^{2\tau}\Big|_{t}^{1} =$$

$$= e^{2t} - e^{2(t-2)} + \frac{1}{2}e^{2} - \frac{1}{2}e^{2t}$$

$$= \boxed{e^{2t}\left(1 - e^{-4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{2}}$$

$$y(t) \simeq 0{,}48\cdot e^{2t} + 3{,}69$$

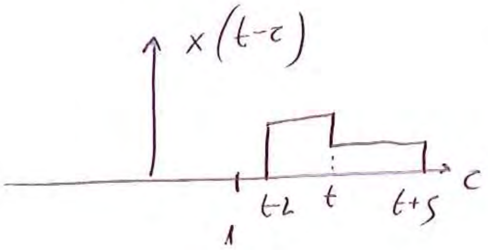


$$t>1,\quad t-2<1 \Big\} \quad \boxed{1<t<3}$$

$$y(t)=\int_{t-2}^{1} 2\cdot e^{2\tau}\,d\tau = 2\cdot\frac{1}{2}\,e^{2\tau}\Big|_{t-2}^{1}$$

$$= e^{2}-e^{2(t-2)} = \boxed{e^{2}-e^{2t}\cdot e^{-4}}$$

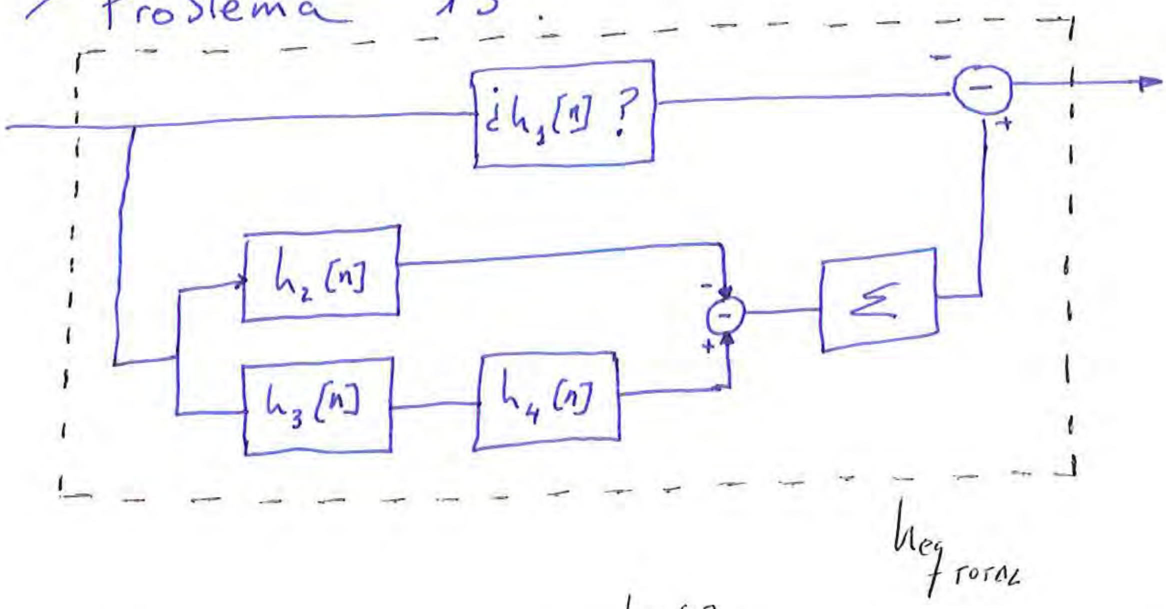
$$y(t) \simeq 7{,}39-0{,}018\cdot e^{2t}$$



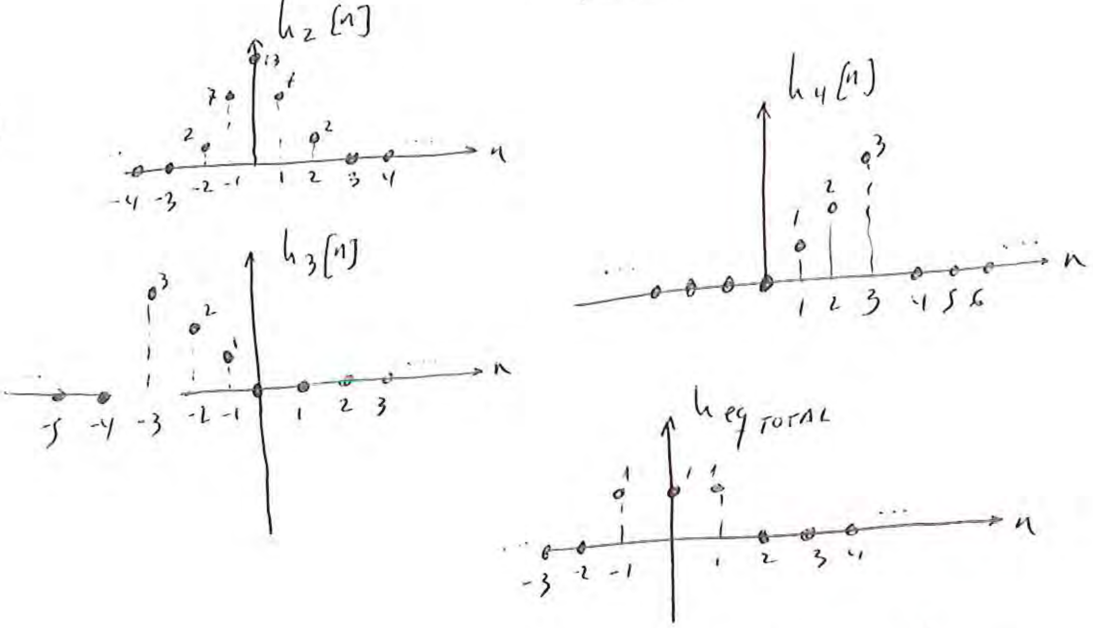
$$\text{si} \quad t-2>1 \Rightarrow \boxed{t>3} \quad \boxed{y(t)=0}$$

$$\text{Agrupamos: } y(t)=\begin{cases} \left(0{,}5-e^{-4}+\dfrac{e^{10}}{2}\right)\cdot e^{2t} & \text{si} \quad t<-4 \\ \left(0{,}5-e^{-4}\right)\cdot e^{2t}+\dfrac{e^{2}}{2} & \text{si} \quad -4\leq t<1 \\ e^{2}-e^{-4}\cdot e^{2t} & \text{si} \quad 1\leq t<3 \\ 0 & \text{si} \quad t\geq 3 \end{cases}$$

Problema 15



Sabemos que



$$h_{eq_{3,4}}[n] = h_3[n] * h_4[n] = h_3[n] * \left(\delta[n-1] + 2\cdot\delta[n-2] + 3\cdot\delta[n-3] \right) =$$

$$= h_3[n-1] + 2\cdot h_3[n-2] + 3\cdot h[n-3]$$

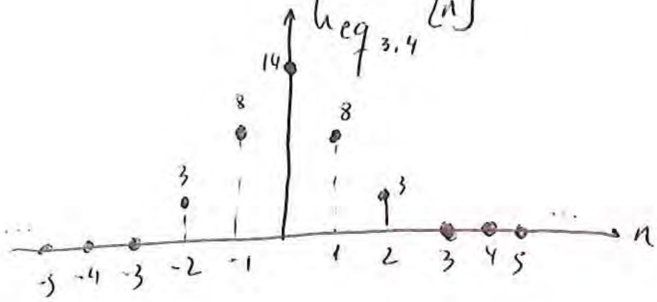
Como $h_3[n]$ lo podemos escribir como: $h_3[n] = 3\cdot\delta[n+3] + 2\cdot\delta[n+2] + \delta[n+1]$

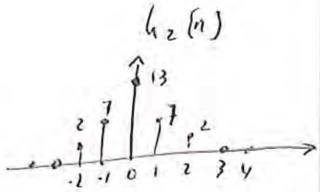
$$h_3[n-1] = 3\cdot\delta[n+2] + 2\cdot\delta[n+1] + \delta[n]$$

$$+ \quad 2\cdot h_3[n-2] = 6\cdot\delta[n+1] + 4\delta[n] + 2\cdot\delta[n-1]$$

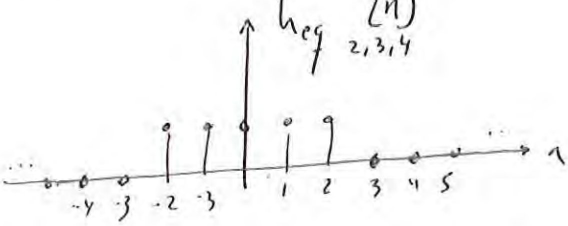
$$3\cdot h_3[n-3] = 9\,\delta[n] + 6\cdot\delta[n-1] + 3\cdot\delta[n-2]$$

$$h_{eq_{3,4}}[n] = 3\cdot\delta[n+2] + 8\cdot\delta[n+1] + 14\cdot\delta[n] + 8\cdot\delta[n-1] + 3\cdot\delta[n-2]$$



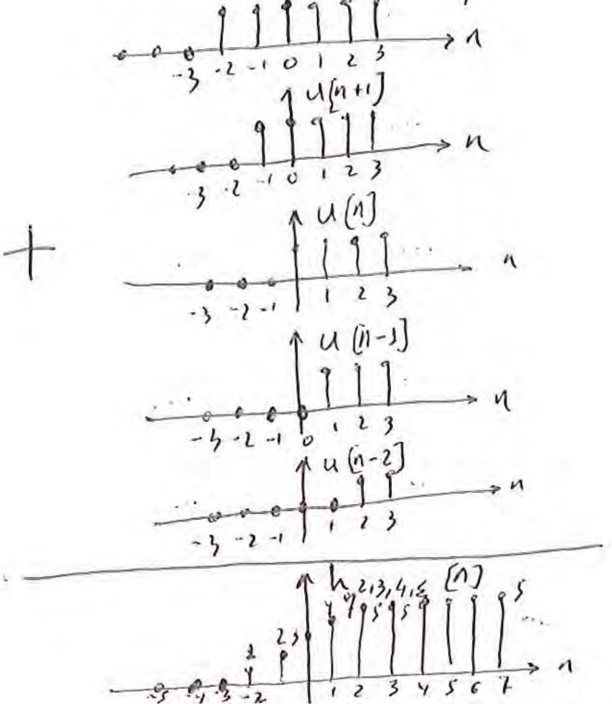


$$h_{eq_{2,3,4}}[n] = h_{eq_{3,4}}[n] - h_2[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

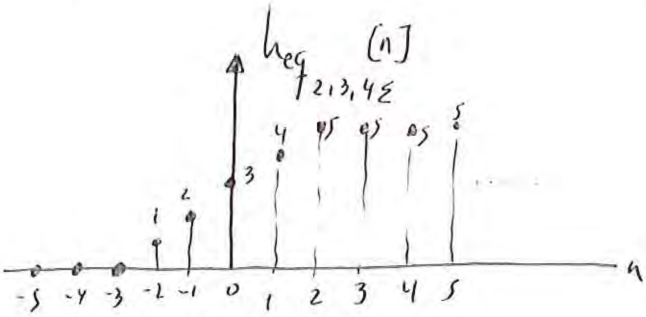


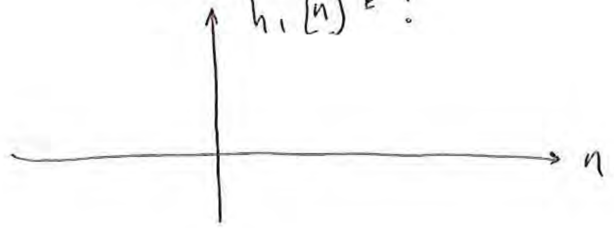
Ahora paso al sistema integrador de tiempo discreto $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ cuya respuesta impulsiva es $h_{\Sigma}[n] = u[n]$. Luego tengo que convolucionar $h_{eq_{2,3,4}}[n]$ con $h_{\Sigma}[n]$.

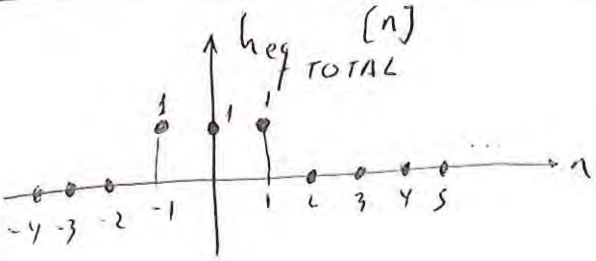
Entonces $h_{eq_{2,3,4,\Sigma}}[n] = h_{eq_{2,3,4}}[n] * h_{\Sigma}[n] = u[n+2] + u[n+1] + u[n] + u[n-1] + u[n-2]$



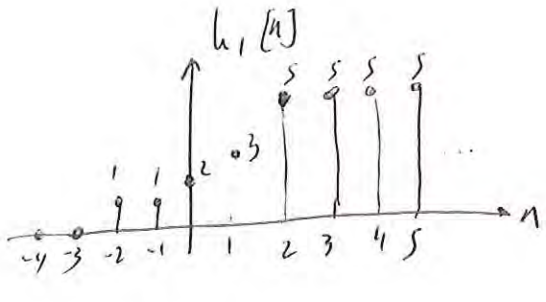
Ya solo queda encontrar el $h_1[n]$ que logre que $h_{eq_{2,3,4,5}}[n] - h_1[n] = h_{eq_{TOTAL}}[n]$







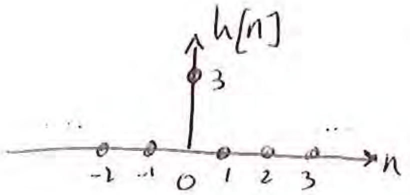
$h_1[n] = h_{eq_{2,3,4,5}}[n] - h_{eq_{TOTAL}}$



Por lo tanto $h_1[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1] + 2\cdot\delta[n] + 3\cdot\delta[n-1] + 5\cdot u[n-2]$

Problema 16.

$h[n] = 3 \cdot \delta[n]$ ¿memoria? ¿causal? ¿estable? ¿invertible?



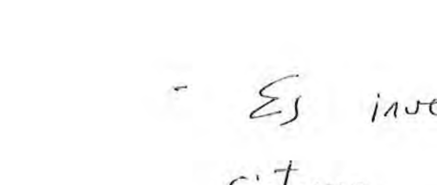
- Es sin memoria, ya que la respuesta al impulso es nula en todos los instantes de tiempo salvo en el origen.
- Es causal, ya que la respuesta impulsiva es nula en todos los instantes negativos.
- Es estable ya que $h[n]$ es sumable.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = 3 < \infty$$

- Es invertible puesto que puedo encontrar un sistema inverso cuya respuesta impulsivo $\left(h_{INV}[n] = \frac{1}{3}\delta[n]\right)$ convolucionada con $h[n]$ me da la delta.

$$h[n] * h_{INV}[n] = 3 \cdot \delta[n] * \frac{1}{3}\delta[n] = \delta[n]$$

$h[n] = u[n]$ ¿memoria? ¿causal? ¿estable? ¿invertible?



- Con memoria, ya que la $h[n]$ tiene valores distintos de cero en instantes de tiempo distintos del origen.
- Es causal, ya que $h[n]$ es nula en los instantes negativos.
- No es estable, ya que $h[n]$ no es "sumable en valor absoluto".

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$$

- Para saber si es invertible tengo que encontrar un $h_{INV}[n]$ que cumpla que:

$$u[n] * h_{INV}[n] = \delta[n]$$

Nosotros sabemos que podemos escribir la $\delta[n]$ como la primera diferencia del escalón $\Rightarrow$ $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$.

Por lo tanto podemos re-escribir:

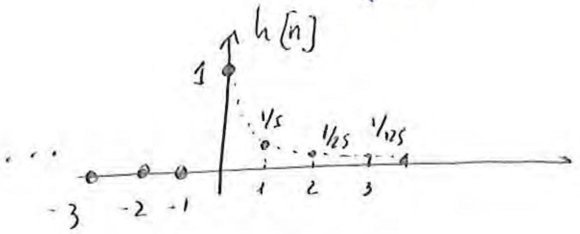
$$u[n] * h_{INV}[n] = u[n] - u[n-1]$$

Ahora es fácil identificar $h_{INV}[n]$.

$$h_{INV}[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \qquad \boxed{\text{INVERTIBLE}}$$

Problema 17.

$h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n \cdot u[n]$ ¿causal? ¿estable?

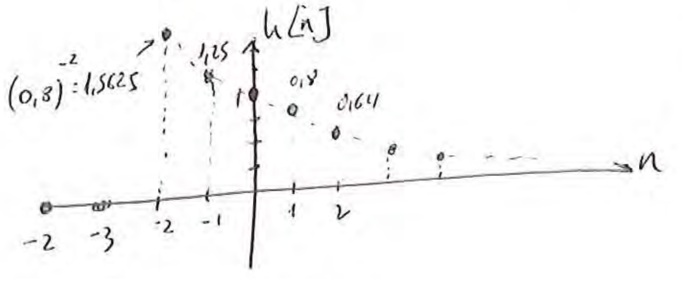


- Es causal, ya que $h[n]$ es nula en todos los instantes negativos.

- Es estable puesto que al ser convergente es sumable en valor absoluto.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{\infty} \cdot \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)^0}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{0-1}{-\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} < \infty$$

$h[n] = (0,8)^n \cdot u[n+2]$ ¿causal? ¿estable?



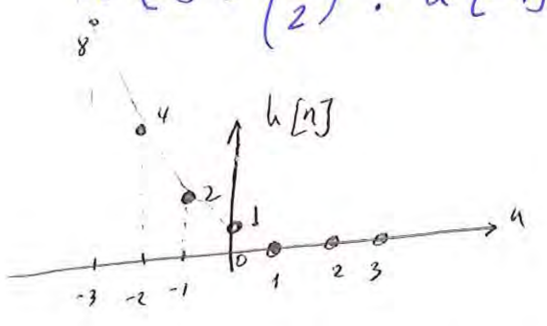
- No es causal, ya que la $h[n]$ tiene dos valores no nulos en instantes de tiempo negativos.

- Sí es estable ya que es "sumable en valor absoluto".

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{k=-2}^{\infty} (0,8)^k = \frac{(0,8)^{\infty} \cdot 0,8 - (0,8)^{-2}}{0,8 - 1}$$

$$= \frac{0 - 1,5625}{-0,2} = 7,8125 < \infty$$

$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[-n]$ ¿causal? ¿estable?



- No es causal, ya que $h[n]$ tiene infinitos valores no nulos en instantes de tiempo negativos.

- No es estable, ya que no es sumable en valor absoluto.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2} - \infty}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\infty}{-\frac{1}{2}} = \infty$$

Problema 18. $S_1 \Rightarrow y[n] = x[n+2]$
$S_2 \Rightarrow y[n] = x[-n]$

- Obtenga la respuesta de cada uno de ellos cuando la entrada es $x[n] = 3 \cdot \delta[n+1] - \delta[n] + 2\delta[n-1]$

$$y_{S_1}[n] = x[n+2] = 3\cdot\delta[(n+2)+1] - \delta[n+2] + 2\cdot\delta[(n+2)-1] =$$
$$= 3\cdot\delta[n+3] - \delta[n+2] + 2\cdot\delta[n+1]$$

$$y_{S_2}[n] = x[-n] = 3\ \delta[-n+1] - \delta[-n] + 2\cdot\delta[-n-1]$$

Como S_1 es un SLIT, obtenga la salida por 2 caminos diferentes: a partir de la propia definición del sistema (ya lo tengo, es lo que he hecho) y utilizando la convolución.

Para utilizar la convolución $\left(y_{S_1}[n] = x[n] * h[n]\right)$ necesito conocer la respuesta impulsiva $(h[n])$, luego le meto a S_1 un impulso unitario.

$$h_{S_1}[n] = \delta[n+2]$$

Ahora hago la convolución $y_{S_1}[n] = x[n] * h_{S_1}[n] = x[n] * \delta[n+2]$
$$= x[n+2] = 3\cdot\delta[n+3] - \delta[n+2] + 2\cdot\delta[n+1]$$

que lógicamente da lo mismo que por el otro camino.

Compruebe que en el caso del sistema S_2 (que no es SLIT) el segundo camino no es correcto.

Calcularíamos la respuesta impulsiva $h_{S_2}[n] = \delta[-n]$

$$x[n] * \delta[-n] = x[n] \neq \text{OTRO CAMINO}$$

$$\delta[-n] = \delta[n]$$