Tema 3 - Señales y Sistemas en el Dominio de la Frecuencia

Cuestiones resueltas

CUESTIONES T3

C2 Obtenga el DSF sin resolver la ecuación de análisis:

$$x(t) = \cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \text{sen}\,(10\pi t)$$

De una parte, $x(t)$ es la suma de 2 sinusoides. Estudiamos su periodicidad:

$$\omega_a = 5\pi = 2\pi / T_a \Rightarrow T_a = 2\pi/5\pi = 2/5 \text{ seg.}$$

$$\omega_b = 10\pi = 2\pi / T_b \Rightarrow T_b = 2\pi/10\pi = 1/5 \text{ seg.}$$

$$T_0 = \text{m.c.m.}\left\{\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\} = \frac{2}{5} \text{ seg} \Rightarrow \omega_0 = 5\pi \text{ rad/s.}$$

Podemos expresar las sinusoides como suma de exp. complejas:

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j(5\pi t + \pi/3)} + \frac{1}{2} e^{-j(5\pi t + \pi/3)} + \frac{1}{2j} e^{j10\pi t} - \frac{1}{2j} e^{-j10\pi t}$$

Por ser periódica, el DSF de $x(t)$ es:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jk\omega_0 t} = \ldots + a_{-2} e^{-j2\omega_0} + a_{-1} e^{-j\omega_0} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0} + a_2 e^{j2\omega_0} + \ldots$$

Por tanto:

$$a_{-2} = -\frac{1}{2j} = \frac{1}{2} j$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2} e^{-j\pi/3} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} j$$

$$a_1 = \frac{1}{2} e^{j\pi/3} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} j$$

$$a_2 = \frac{1}{2j} = -\frac{1}{2} \cdot j$$

$$a_k = 0, \ \forall k \neq \pm 1, \pm 2$$

C3 ¿Es posible el DSF de $x(t) = \cos(5\pi t + \pi/3) + \sin(10t)$?

Estudiamos su periodicidad.

$$w_a = 5\pi = 2\pi / T_a \Rightarrow T_a = 2/5 \text{ seg.}$$

$$w_b = 10 = 2\pi / T_b \Rightarrow T_b = \pi/5 \text{ seg.}$$

$$T_0 = \text{m.c.m.}\{T_a, T_b\} \Rightarrow \nexists$$

Por tanto, $x(t)$ no es periódica, y no admite DSF.

C4 Calcula la TF de: $x(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ e^{at}, & t < 0 \end{cases}$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt +$$

$$+ \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a - j\omega} \left[e^{(a-j\omega)t} \right]_{-\infty}^{0} +$$

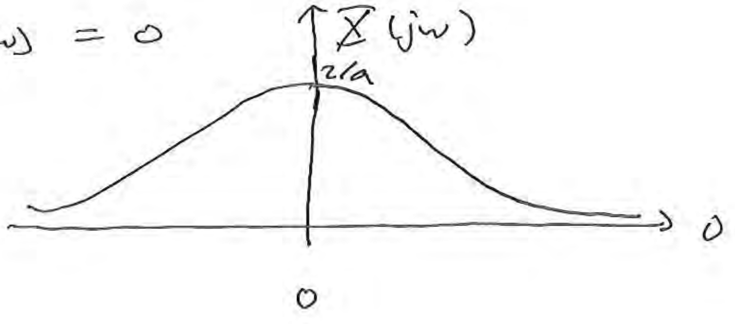
$$+ \frac{(-1)}{a + j\omega} \left[e^{-(a+j\omega)t} \right]_{0}^{+\infty} = \boxed{\frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega}}$$

¿Podemos representarla? Simplificamos.

$$X(j\omega) = \frac{a + j\omega - a \cancel{+} j\omega}{(a - j\omega)(a + j\omega)} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \Rightarrow$$

$|X(j\omega)| = X(j\omega)$ (siempre ≥ 0, real).

$\measuredangle X(j\omega) = 0$



CJ

Demostrar las propiedades.

- Linealidad. $z(t) = a\,x(t) + b\,y(t) \xleftrightarrow{TF} Z(j\omega) = a\,X(j\omega) + b\,Y(j\omega)$

$$Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (a\,x(t) + b\,y(t))\, e^{-j\omega t} =$$

$$= a \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}_{X(j\omega)} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}_{Y(j\omega)} = a\,X(j\omega) + b\,Y(j\omega) \;//$$

- Desplazamiento en el tiempo.

$$y(t) = x(t - t_0) \xleftrightarrow{TF} Y(j\omega) = e^{-j\omega t_0}\, X(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)\, e^{-j\omega t} \underset{(*)}{=}$$

$$\left[\begin{array}{l|l} (*)\ t - t_0 = r & t \to -\infty \Rightarrow r \to -\infty \\ \quad dt = dr & t \to +\infty \Rightarrow r \to +\infty \\ \quad t = r + t_0 & \end{array} \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(r)\, e^{-j\omega (r + t_0)}\, dr = e^{-j\omega t_0} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(r)\, e^{-j\omega r}\, dr}_{} =$$

$$= e^{-j\omega t_0}\, \underline{X}(j\omega) \;//$$

- Conjugado: $y(t) = x^*(t) \xleftrightarrow{TF} Y(j\omega) = X^*(-j\omega)$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, e^{-j\omega t} dt \quad (a)$$

No parece fácil un cambio de variable. Intentamos de otro modo. Sabemos que:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt \overset{\text{conjugamos}}{\Rightarrow}$$

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, e^{j\omega t} dt \overset{\omega = -\sigma}{\Rightarrow}$$

$$X^*(-j\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, e^{-j\sigma t} dt \quad (b)$$

Por tanto, comparando (a) y (b), $\Rightarrow Y(j\omega) = X^*(-j\omega)$ //

- Diferenciación. $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{TF} j\omega X(j\omega)$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt$$

De nuevo no parece que baste con un cambio de variable. Pruebo con:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

$$y(t) = dx(t)/dt = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}}\underbrace{X(j\omega)\,(j\omega)}_{Y(j\omega)}\underbrace{e^{j\omega t} d\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(j\omega) = j\omega X(j\omega)}$$

E6

Demostrar la propiedad de dualidad.

$$\begin{cases} g(t) \xleftrightarrow{TF} f(\omega) \\ f(t) \longleftrightarrow 2\pi\, g(-\omega) \end{cases}$$

Lo expresamos así para aclarar la notación:

$$\begin{cases} g(t) \xleftrightarrow{TF} G(j\omega) = f(\omega) \\ f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) = 2\pi\, g(-\omega) \end{cases}$$

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = G(j\omega)$$

Hacemos un par de cambios de nomenclatura: $\begin{Bmatrix} \omega \to \upsilon \\ t \to r \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$$f(\upsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(r)\, e^{-j\upsilon r}\, dr \Rightarrow \begin{Bmatrix} \upsilon \to t \\ r \to \omega \end{Bmatrix}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\, e^{-jt\omega}\, d\omega \quad (a)$$

Por otra parte, $f(t)$ viene dada por su transformada inversa:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \begin{cases} \omega = -\upsilon \\ d\omega = -d\upsilon \\ \omega \to \pm\infty \Rightarrow \upsilon \to \mp\infty \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} F(-j\upsilon)\, e^{-j\upsilon t}\, (-d\upsilon) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(-j\upsilon)\, e^{-j\upsilon t}\, d\upsilon \overset{\{\omega \leftrightarrow \upsilon\}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} F(-j\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega \quad (b)$$

Por tanto, $(a) = (b) = f(t)$, y tenemos:

$$\frac{1}{2\pi} F(-j\omega) = g(\omega) \Leftrightarrow F(-j\omega) = 2\pi\, g(\omega) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{F(j\omega) = 2\pi\, g(-\omega)}$$

C8. Demostrar la relación de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot x^*(t)\, dt =$$

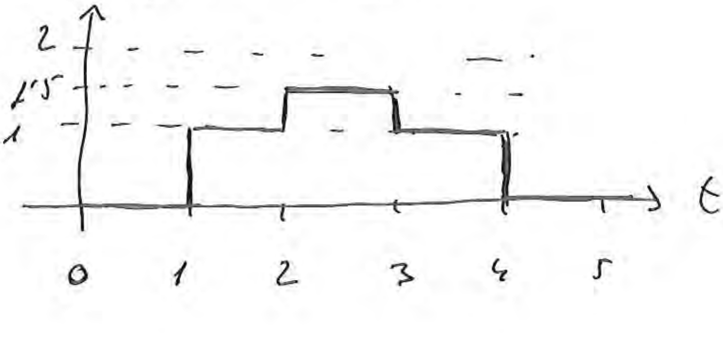
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)\, e^{-j\omega t} d\omega\right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt}_{X(j\omega)}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

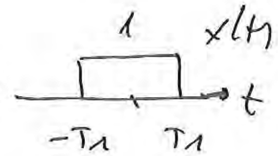
C9. Conocida la TF de un pulso rectangular, encontrar la TF de:

$$y(t) = u(t-1) + 0'5\,u(t-2) - 0'5\,u(t-3) - u(t-4)$$

Comenzamos representando $y(t)$.

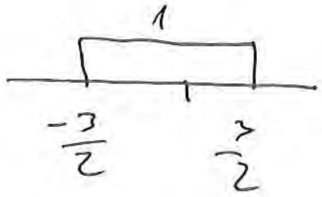


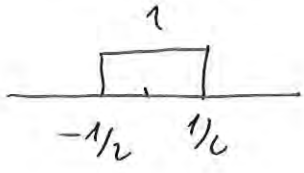
Partimos de conocer: $x(t) = u(t+T_1) - u(t-T_1)$



$$x(t) \overset{TF}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\omega T_1}{\omega}$$

La señal y(t) puede verse como la suma de dos pulsos, desplazada:

$x_1(t)$  $\xleftrightarrow{TF} X_1(j\omega) = \dfrac{2\,\text{sen}(\omega \frac{3}{2})}{\omega}$

$x_2(t)$  $\xleftrightarrow{TF} X_2(j\omega) = \dfrac{2\,\text{sen}(\omega \frac{1}{2})}{\omega}$

$$z(t) = x_1(t) + 0'5\,x_2(t) \xleftrightarrow{TF} Z(j\omega) = X_1(j\omega) + 0'5\,X_2(j\omega)$$

$$\Rightarrow Z(j\omega) = \frac{2\,\text{sen}(3/2 \cdot \omega)}{\omega} + \frac{\text{sen}(1/2 \cdot \omega)}{\omega}$$

$$y(t) = z(t - 2'5) \xleftrightarrow{TF} Y(j\omega) = e^{-j\omega 2'5} Z(j\omega)$$

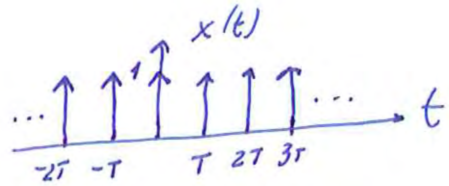
$$\boxed{Y(j\omega) = \frac{e^{-j\omega 2'5}}{\omega}\left(2\,\text{sen}\left(\tfrac{3}{2}\omega\right) + \text{sen}\left(\tfrac{\omega}{2}\right)\right)}$$

Cuestión (10)

Calcular la TF del tren de impulsos

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Lo primero pintamos la señal



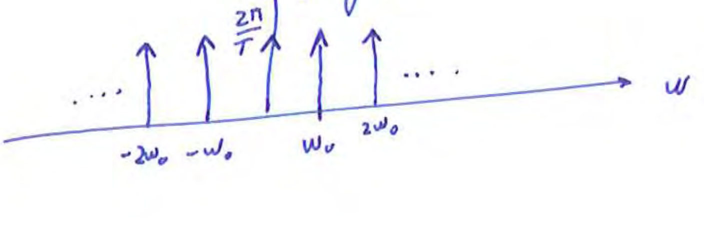
Vemos que es periódica de periodo T, luego deberíamos desarrollar en serie de Fourier para obtener los coeficientes a_k.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

con $$a_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t) \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) \cdot e^{0} dt = \frac{1}{T}\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, dt}_{=1} = \frac{1}{T}$$

Por lo tanto $$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot a_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

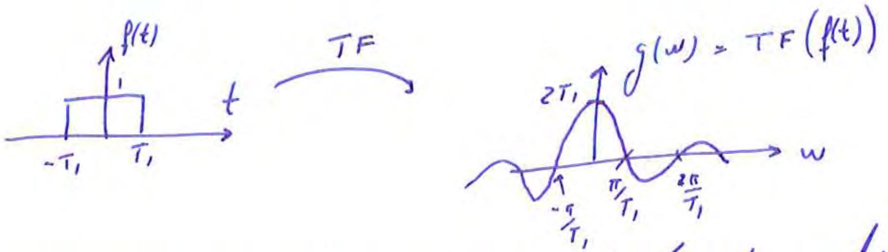


Cuestión (11)

Calcular la TF de $x(t) = \frac{sen(Wt)}{\pi t}$

En un ejemplo anterior calculamos la TF de un pulso entre $-T_1$ y T_1, cuyo resultado fue.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si\ |t| < T_1 \\ 0 & si\ |t| > T_1 \end{cases} \xrightarrow{TF} g(w) = \frac{2 \cdot sen(wT_1)}{w}$$



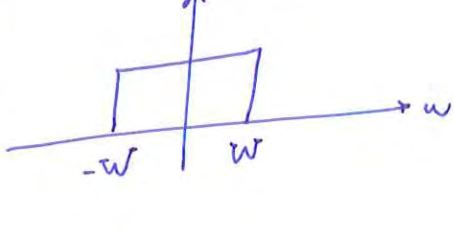
Como conocemos la propiedad de dualidad

$$\boxed{\begin{array}{l} f(t) \xrightarrow{TF} g(w) \\ g(t) \xrightarrow{TF} 2\pi \cdot f(-w) \end{array}}$$

Si $g(t) = \frac{2 \cdot sen(t \cdot T_1)}{t} \xrightarrow{TF} \begin{cases} 2\pi & si\ |w| < T_1 \\ 0 & si\ |w| > T_1 \end{cases}$

Como $x(t) = \frac{sen(Wt)}{\pi t} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \frac{sen(Wt)}{t}$;

$$X(jw) = \begin{cases} 1 & si\ |w| < W \\ 0 & si\ |w| > W \end{cases}$$



Cuestión 12

Calcular la TF de $y(t) = u(t)$

En un ejemplo anterior calculamos la TF de una delta, cuyo resultado fue...

$$x(t) = \delta(t) \xrightarrow{TF} X(j\omega) = 1$$

Nosotros sabemos que $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$ y hemos estudiado la propiedad de integración de la transformada de Fourier.

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xrightarrow{TF} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \cdot \delta(\omega)$$

Si lo aplicamos a nuestro caso

$$Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot 1 + \pi \cdot 1 \cdot \delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\, \delta(\omega)$$

Cuestión 13

Calcular la TF de $x(t) = \delta(t - t_0)$

Si aplicamos la propiedad de desplazamiento

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) \xrightarrow{TF} X(j\omega) \\ x(t-t_0) \xrightarrow{TF} e^{-j\omega t_0} \cdot X(j\omega) \end{array}}$$

$$X(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \cdot 1 = e^{-j\omega t_0}$$

Cuestion 14

Calcular la TF de $x(t) = t \cdot e^{-at} \cdot u(t)$, con $a > 0$.

Si lo hacemos "a las bravas", nos sale una integral algo complicada.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} t \cdot e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} \cdot t \, dt$$

Tendríamos que hacerla por partes $\boxed{\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du}$

En nuestro caso $\left\{ \begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-(a+j\omega)t} dt \Rightarrow v = -\frac{1}{(a+j\omega)} \cdot e^{-(a+j\omega)t} \end{array} \right\}$

$$X(j\omega) = \cancel{t \cdot \frac{-1}{(a+j\omega)} \cdot e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}} \to 0 - \int_0^{\infty} \frac{-1}{(a+j\omega)} \cdot e^{-(a+j\omega)t} dt =$$

$$= \frac{1}{a+j\omega} \cdot \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{-1}{(a+j\omega)^2} \cdot e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{-1}{(a+j\omega)^2} (0-1)$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

Podríamos haberlo hecho por propiedades sabiendo que $TF\left(e^{-at} \cdot u(t)\right) = \frac{1}{a+j\omega}$

ejercicio anterior página 28

Sabemos que $-jt \cdot z(t) \xrightarrow{TF} \frac{d Z(j\omega)}{d\omega}$

$$\frac{d\left(\frac{1}{a+jw}\right)}{dw} = \frac{0 - 1(j)}{(a+jw)^2} = \frac{-j}{(a+jw)^2}$$

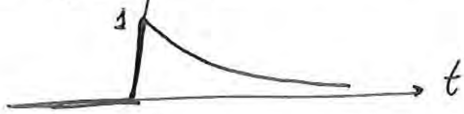
Por lo tanto $TF^{-1}\left[\frac{-j}{(a+jw)^2}\right] = -j \cdot t \cdot \underbrace{e^{-at} \cdot u(t)}_{z(t)}$

Como nosotros queremos saber la $TF\left(t \cdot e^{-at} \cdot u(t)\right)$

$$\boxed{X(jw) = \frac{1}{-j} \cdot \frac{-j}{(a+jw)^2} = \frac{+1}{(a+jw)^2}}$$

Cuestión 15

Dibujamos $x(t) = e^{-at}\cdot u(t)$



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}\cdot e^{-j\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{a+j\omega}\Big[e^{-(a+j\omega)t}\Big]_{0}^{\infty} = -\frac{1}{a+j\omega}(-1) = \frac{1}{a+j\omega}$$

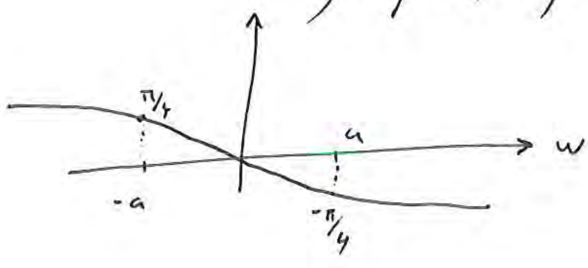
$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

Vemos que es PAR

Esto es importante. Todas las señales reales (como un locutor de radio hablando por un micrófono, una guitarra tocando flamenco o un rockero cantando) tendrán un espectro simétrico respecto al eje de ordenadas.

Vamos a comprobar también que la fase es impar. $\measuredangle\{X(j\omega)\} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\omega}{a}\right)$

$\measuredangle\{X(j\omega)\}$

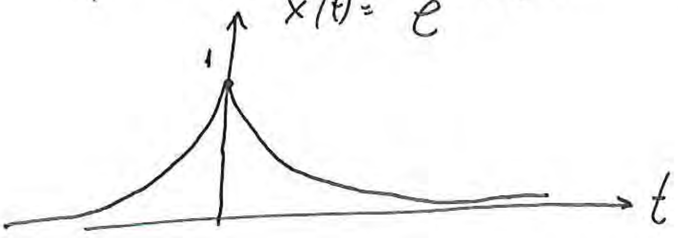


Vemos que es IMPAR

Cuestión 16

Lo primero que hacemos es dibujar $x(t)$ para comprobar que además de real es par.

$x(t) = e^{-a|t|}$

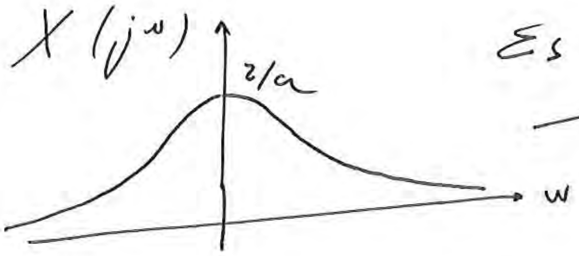


$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t>0 \\ e^{at} & \text{si } t<0 \end{cases}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} \cdot e^{-j\omega t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t}\,dt = \text{VER CUESTIÓN } 4 =$$

$$= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

Dibujamos $X(j\omega)$



Es REAL y PAR

Cuestión 17

$$x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at} \cdot u(t) + e^{at} \cdot u(-t) = 2 \cdot \tfrac{1}{2}\left(e^{-at} \cdot u(t) + e^{-a(-t)} \cdot u(-t)\right)$$

$$x(t) = 2 \cdot \text{par}\{\underbrace{e^{-at} \cdot u(t)}_{l(t)}\}$$

sabemos que su TF es $\frac{1}{a+j\omega}$ es decir $L(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$

$$X(j\omega) = 2 \cdot \underbrace{\text{TF}\{\text{par}[e^{-at} \cdot u(t)]}_{\text{Re}\{L(j\omega)\}} = 2 \cdot \text{Re}\left\{\frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2}\right\} = 2\,\frac{a}{a^2+\omega^2}$$

Cuestión 18

Para cualquier señal $x(t)$, por la propiedad de conjugación se cumple que $x^*(t) \xrightarrow{TF} X^*(-j\omega)$.

DEMOSTRACIÓN

$$X^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \cdot e^{j\omega t} dt$$

Si cambiamos ahora ω por $-\omega \Rightarrow$

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = TF\{x^*(t)\}$$

Si además, la señal $x(t)$ es real, entonces

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega (t)} dt = X(j\omega),$$

por lo que podemos decir que su transformada es hermítica.

De aquí es fácil desprender que su espectro es par $(|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|)$. Para ello vemos que:

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \cdot e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j(-\omega)t} dt = X(-j\omega)$$

$$|X(j\omega)| = X(j\omega) \cdot X^*(j\omega) = X(j\omega) \cdot X(-j\omega) \Rightarrow$$

$$|X(-j\omega)| = X(-j\omega) \cdot X^*(-j\omega) = X(-j\omega) \cdot X(j\omega)$$

Espectro par

(E19). Calcular la respuesta en frecuencia para:

$$y'(t) + 3y(t) = x(t)$$

Calculo l TF de toda la ecuación:

$$j\omega\, Y(j\omega) + 3\, Y(j\omega) = X(j\omega)$$

$$Y(j\omega)\,(3 + j\omega) = X(j\omega) \Rightarrow$$

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{3 + j\omega}}$$

(E20) Calcular la respuesta en frecuencia para:

$$3y''(t) + y(t) = 5x'(t)$$

Calculo l TF de toda la ecuación y despejo:

$$3\cdot(j\omega)^2\, Y(j\omega) + Y(j\omega) = 5\cdot j\omega\, X(j\omega)$$

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{5j\omega}{3\omega^2 + 1}}$$

Tema 3 - Señales y Sistemas en el Dominio de la Frecuencia

Problemas resueltos

TABLA 3.1 PROPIEDADES DE LA SERIE CONTINUA DE FOURIER

Propiedad	Sección	Señal periódica	Coeficientes de la serie de Fourier
		$x(t)$, $y(t)$ } Periódicas con periodo T y frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k, b_k
Linealidad	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Desplazamiento de tiempo	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Desplazamiento en frecuencia		$e^{jM\omega_0 t} = e^{jM(2\pi/T)t}x(t)$	a_{k-M}
Conjugación	3.5.6	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Inversión de tiempo	3.5.3	$x(-t)$	a_{-k}
Escalamiento en tiempo	3.5.4	$x(\alpha t), \alpha > 0$ (periódica con periodo T/α)	a_k
Convolución periódica		$\int_T x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	Ta_kb_k
Multiplicación	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
Diferenciación		$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk\frac{2\pi}{T}a_k$
Integración		$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$ (de valor finito y periódica sólo si $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right)a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right)a_k$
Simetría conjugada para señales reales	3.5.6	$x(t)$ real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \mathcal{R}e\{a_k\} = \mathcal{R}e\{a_{-k}\} \\ \mathcal{I}m\{a_k\} = -\mathcal{I}m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \sphericalangle a_k = -\sphericalangle a_{-k} \end{cases}$
Señales real y par	3.5.6	$x(t)$ real y par	a_k real y par
Señales real e impar	3.5.6	$x(t)$ real e impar	a_k sólo imaginaria e impar
Descomposición par e impar de señales reales		$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$ [$x(t)$ real] $x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$\mathcal{R}e\{a_k\}$ $j\mathcal{I}m\{a_k\}$

Relación de Parseval para señales periódicas

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

señal determinada. En los siguientes tres ejemplos ilustramos lo anterior. El último ejemplo de esta sección demuestra, por consiguiente, cómo se pueden usar las propiedades de una señal para caracterizar la señal con gran detalle.

Ejemplo 3.6

Considere la señal $g(t)$ con un periodo fundamental de 4, la cual se muestra en la figura 3.10. Podemos determinar la representación en serie de Fourier de $g(t)$ de manera directa a partir de la ecuación de análisis (3.39). Sin embargo, usaremos en su lugar la relación de $g(t)$ con la onda cuadrada periódica simétrica $x(t)$ del ejemplo 3.5. Si nos remitimos a ese ejemplo, vemos que, con $T = 4$ y $T_1 = 1$,

$$g(t) = x(t - 1) - 1/2. \tag{3.69}$$

4.6 TABLAS DE LAS PROPIEDADES DE FOURIER Y DE LOS PARES BÁSICOS DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

En las secciones anteriores y en los problemas al final del capítulo, hemos tomado en consideración algunas de las propiedades importantes de la transformada de Fourier. Éstas se resumen en la tabla 4.1, en la cual también hemos indicado en qué sección de este capítulo se ha analizada cada propiedad.

En la tabla 4.2 hemos preparado una lista de los pares de transformadas de Fourier que son básicos e importantes. Muchos de éstos los encontraremos en repetidas ocasiones conforme apliquemos las herramientas del análisis de Fourier en el examen de las señales

TABLA 4.1 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Sección	Propiedad	Señal aperiódica	Transformada de Fourier
		$x(t)$ $y(t)$	$X(j\omega)$ $Y(j\omega)$
4.3.1	Linealidad	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
4.3.2	Desplazamiento de tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
4.3.6	Desplazamiento de frecuencia	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
4.3.3	Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
4.3.5	Inversión de tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
4.3.5	Escalamiento de tiempo y de frecuencia	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
4.4	Convolución	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)\,Y(j\omega)$
4.5	Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega) * Y(j\omega)$
4.3.4	Diferenciación en tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
4.3.4	Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
4.3.6	Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
4.3.3	Simetría conjugada para señales reales	$x(t)$ real	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \mathcal{R}_e\{X(j\omega)\} = \mathcal{R}_e\{X(-j\omega)\} \\ \mathcal{I}_m\{X(j\omega)\} = -\mathcal{I}_m\{X(-j\omega)\} \\ \lvert X(j\omega)\rvert = \lvert X(-j\omega)\rvert \\ \sphericalangle X(j\omega) = -\sphericalangle X(-j\omega) \end{cases}$
4.3.3	Simetría para señales real y par	$x(t)$ real y par	$X(j\omega)$ real y par
4.3.3	Simetría para señales real e impar	$x(t)$ real e impar	$X(j\omega)$ puramente imaginaria e impar
4.3.3	Descomposición par-impar de señales reales	$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$ [$x(t)$ real] $x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$\mathcal{R}_e\{X(j\omega)\}$ $j\mathcal{I}_m\{X(j\omega)\}$

4.3.7 Relación de Parseval para señales aperiódicas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega$$

TABLA 4.2 PARES BÁSICOS DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

Señal	Transformada de Fourier	Coeficientes de la serie de Fourier (si es periódica)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$, con otro valor
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 =$ $a_{-1} = 1/2$ $a_k = 0$, con otro valor
$\operatorname{sen} \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, con otro valor
$x(t) = 1$	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0 = 1, \quad a_k = 0, \quad k \neq 0$ (Esta es la representación en serie de Fourier para cualquier selección de $T > 0$)
Onda cuadrada periódica $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t\rvert \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ y $x(t + T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \operatorname{sen} k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\operatorname{sen} k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ para todo k
$x(t) \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & \lvert t\rvert > T_1 \end{cases}$	$\frac{2 \operatorname{sen} \omega T_1}{\omega}$	—
$\frac{\operatorname{sen} Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < W \\ 0 & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	—
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	—
$e^{-at}u(t), \mathcal{R}_e\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	—
$te^{-at}u(t), \mathcal{R}_e\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$, $\mathcal{R}_e\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	—

(1) $x(t) = x(t+T)$, $T = 8$ seg. $x(t)$ real.

$a_k = 0 \quad \forall k \neq \pm 1, \pm 3$

$a_1 = a_{-1} = 2$

$a_3 = a_{-3}^* = 4j$

$$¿\, x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k)\, ?$$

Por ser periódica: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{T}t} =$

$$= a_{-3}\, e^{j(-3)\frac{\pi}{4}t} + a_{-1}\, e^{j(-1)\frac{\pi}{4}t}$$

$$+ a_1\, e^{j(1)\frac{\pi}{4}t} + a_3\, e^{j(3)\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \underbrace{2e^{-j\frac{\pi}{4}t} + 2e^{j\frac{\pi}{4}t}} \underbrace{- 4je^{-j\frac{3\pi}{4}t} + 4je^{j\frac{3\pi}{4}t}} =$$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 8\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}t\right) \overset{\mathrm{sen}\,\alpha = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{=}$$

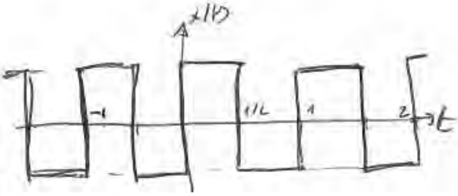
$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 8\cos\left(\frac{3\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A_1 = 4,\ \omega_1 = \pi/4,\ \phi_1 = 0 \\ A_2 = 8,\ \omega_2 = 3\pi/4,\ \phi_2 = \pi/2 \end{array}}$$

(2) $x(t) = x(t+T)$

$\omega_0 = 2\pi \Rightarrow T = 1$

$$x(t) = \begin{cases} 1/2, & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ -1/2, & 1/2 \le t < 1 \end{cases}$$



$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt - \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt =$$

$k \neq 0$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(-jk2\pi)}\left[e^{-jk\pi} - 1\right] - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(-jk2\pi)}\left[\cancel{e^{-jk2\pi}}^{\,1} - e^{-jk\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{-jk4\pi}\left[e^{-jk\pi} - 1 - 1 + e^{-jk\pi}\right] = \frac{2}{-jk4\pi}\left[e^{-jk\pi} - 1\right] =$$

$$= \frac{-1}{jk2\pi}\, e^{-jk\frac{\pi}{2}}\left[e^{-jk\frac{\pi}{2}} - e^{jk\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{2j}{jk\cancel{2}\pi}\,\underbrace{e^{-jk\frac{\pi}{2}}}_{j^{-k}}\,\mathrm{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

$k = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

$$\boxed{a_k = \begin{cases} \dfrac{j^{-k}}{k\pi}\,\mathrm{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right), & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}}$$

$\Rightarrow$ EJERCICIO: HACER POR PROPIEDADES Y TABLAS.

③ $x(t) = \cos(4\pi t)$ $\qquad T_0 = 1/2$

$y(t) = \text{sen}(4\pi t)$

$z(t) = x(t) \cdot y(t)$.

(a) $x(t) = \cos(4\pi t) = \frac{1}{2} e^{j4\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j4\pi t} \Rightarrow$

$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$; $a_k = 0 \ \forall k \neq \pm 1$

(b) $y(t) = \text{sen}(4\pi t) = \frac{1}{2j} e^{j4\pi t} - \frac{1}{2j} e^{-j4\pi t} \Rightarrow$

$b_1 = \frac{1}{2j}$; $b_{-1} = \frac{-1}{2j}$; $b_k = 0 \ \forall k \neq \pm 1$

(d) $z(t) = x(t) \cdot y(t) = \cos(4\pi t) \cdot \text{sen}(4\pi t) =$

$= \frac{1}{2} \text{sen}(8\pi t) =$

[$\text{sen}(a+b) =$ $\text{sen}\, a \cos b + \cos a \,\text{sen}\, b$]

[$\Rightarrow \text{sen}\, 2a = 2 \,\text{sen}\, a \cos b$]

$= \frac{1}{4j} e^{j8\pi t} - \frac{1}{4j} e^{-j8\pi t}$

$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{4j}$; $c_{-1} = \frac{-1}{4j}$; $c_k = 0 \ \forall k \neq \pm 1$; $T_0' = \frac{1}{4}$

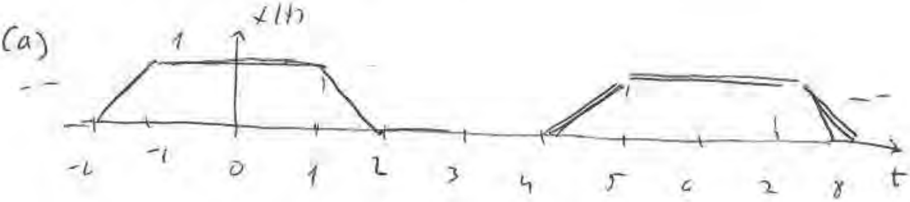
De outra forma: $z(t) = \frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right) \cdot \frac{1}{2j} \cdot$

$\cdot \left(e^{j4\pi t} - e^{-j4\pi t}\right) = \ldots$

(4.1)

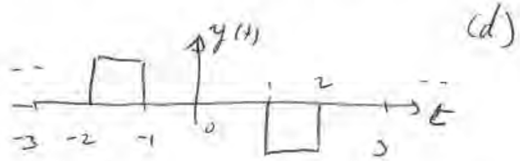
(4) Encontrar el DSF de las siguientes señales

(a)



Voy a simplificar la integral utilizando propiedades.

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$



$$a_k = \frac{1}{T}\int_T y(t)\,dt = \frac{1}{6}\int_{-2}^{-1} e^{-jk\omega_0 t}\,dt - \frac{1}{6}\int_{1}^{2} e^{-jk\omega_0 t}\,dt =$$

$k \neq 0$

$$\stackrel{1}{=} \frac{1}{6}\,\frac{1}{-jk\omega_0}\left[e^{jk\omega_0} - e^{jk\omega_0 2}\right] - \frac{1}{6}\,\frac{1}{-jk\omega_0}\left[e^{-jk\omega_0 2} - e^{-jk\omega_0}\right] =$$

$$= \frac{1}{\cancel{6}}\,\frac{1}{\underset{\underset{\frac{2\pi}{\cancel{6}}}{\Downarrow}}{jk\omega_0}}\left[\left(e^{jk\omega_0 2} + e^{-jk\omega_0 2}\right) - \left(e^{jk\omega_0} + e^{-jk\omega_0}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{jk\pi}\left[\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right]$$ (solución al apartado (d))

$k = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

Entonces, $x(t) = \int_{-\infty}^{t} y(t)dt \xleftrightarrow{DSF} b_k = \frac{1}{jk\omega_0} a_k \underset{k \neq 0}{\uparrow}=$

$$= \frac{1}{jk\omega_0} \cdot \frac{1}{jk\pi} \left[\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) \right] =$$

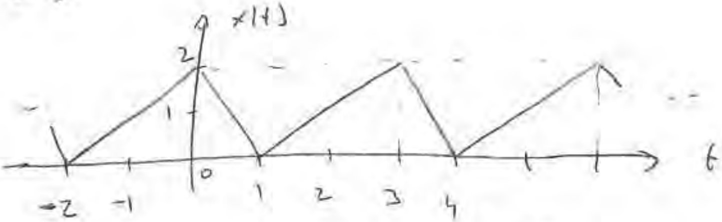
$$\boxed{= \frac{-3}{k^2\pi^2} \left[\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) \right]} \quad k \neq 0$$

$$k = 0 \Rightarrow \boxed{b_0 = \langle x(t) \rangle = 3/6 = 1/2}$$

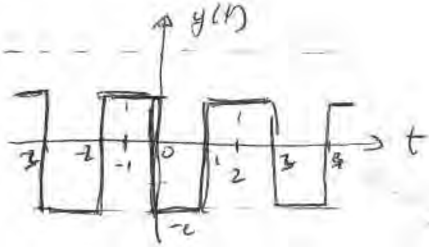
- NOTA: Se puede simplificar más ya que

$$\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}e^{jk\frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{2}e^{-jk} \dots$$

(b)



$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t)$$



• $y(t) \xleftrightarrow{DSF} a_k = \frac{1}{T}\int_T y(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt =$

$$= \frac{1}{3}\int_{-2}^{0} 1\cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt + \frac{1}{3}\int_{0}^{1} (-2)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt =$$

$$\overset{k\neq 0}{=} \frac{-1}{jk3\omega_0}\left[1 - e^{+jk\omega_0 2} - 2e^{-jk\omega_0} + 2\right] = \dots \quad \boxed{(\text{HACER})}$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left[e^{jk\frac{2\pi}{3}} \sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right) - 2e^{-jk\frac{\pi}{3}} \sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right], \quad k\neq 0$$

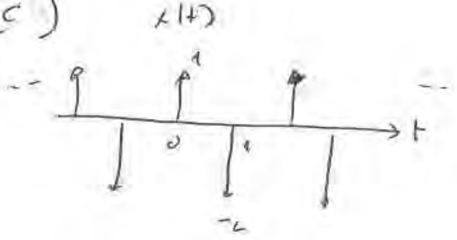
$(a_0 = 0)$

• $x(t) \xleftrightarrow{DSF} b_k \overset{k\neq 0}{=} \frac{1}{jk\omega_0}\, a_k = \dots \quad \boxed{\text{HACER}}$

$$\boxed{b_k = \begin{cases} \frac{3j}{2\pi^2 k^2}\left[-e^{jk\frac{2\pi}{3}} \sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right) - 2e^{-jk\frac{\pi}{3}} \sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right], & k\neq 0 \\ 1, & k=0 \end{cases}}$$

(5.4)

(c)



$T=2$

$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-0'5}^{1'5} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-0'5}^{1'5} \left(\delta(t) - 2\delta(t-1)\right) e^{-jk\omega_0 t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\overset{1}{\cancel{e^{-jk\omega_0 \cdot 0}}} - 2e^{-jk\omega_0 \cdot 1}\right] = \frac{1}{2} - e^{-jk\pi} = \boxed{\frac{1}{2} - (-1)^k}$$

⑤ $x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$

(a) $x_1(t) = x(1-t) + x(-1-t)$

$$\left\{\begin{array}{l} x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \\ x(-t) \longleftrightarrow X(-j\omega) \end{array}\right\} \text{Por tanto:}$$

$$z(t) = x(t+1) \longleftrightarrow e^{-j\omega(-1)} X(j\omega) = e^{+j\omega} X(j\omega) = Z(j\omega)$$

$$w(t) = z(-t) \longleftrightarrow W(j\omega) = Z(-j\omega) = e^{-j\omega} X(-j\omega)$$

$$r(t) = x(t-1) \longleftrightarrow R(j\omega) = e^{-j\omega(1)} X(j\omega) = e^{-j\omega} X(j\omega)$$

$$s(t) = r(-t) \longleftrightarrow S(j\omega) = e^{+j\omega} X(-j\omega)$$

$$X_1(j\omega) = W(j\omega) + S(j\omega) = \left(e^{-j\omega} + e^{+j\omega}\right) X(-j\omega) =$$
$$= 2\cos\omega \, X(-j\omega) //$$

(b) $x_2(t) = x(3t-6)$

$$\left\{ v(t) = x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right) \right\}$$

$$z(t) = x(t-6) \longleftrightarrow Z(j\omega) = e^{-j\omega(6)} X(j\omega)$$

$$w(t) = z(3t) \longleftrightarrow W(j\omega) = \frac{e^{-j2\omega}}{3} X\left(j\frac{\omega}{3}\right)$$

$$X_2(j\omega) = \frac{e^{-j2\omega}}{3} X\left(j\frac{\omega}{3}\right) //$$

(c) $x_3(t) = \dfrac{d^2 x(t-1)}{dt^2}$

$$\left\{ \frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow jw\, X(jw) \right\}$$ Por tanto:

$$v(t) = x(t-1) \longleftrightarrow V(jw) = e^{-jw} X(jw)$$

$$w(t) = \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \longleftrightarrow W(jw) = (jw)^2 V(jw) =$$

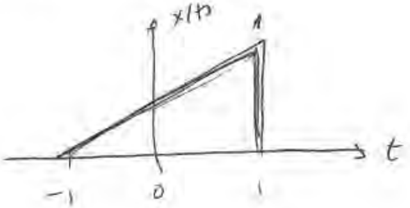
$$= -w^2 e^{-jw} X(jw)$$

$$X_3(jw) = -w^2 e^{-jw} X(jw) \; //$$

(6.1)

(6) $x(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 1 \\ (t+1)/2, & -1 \le t \le 1 \end{cases}$

(a) Encontrar $X(j\omega)$



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

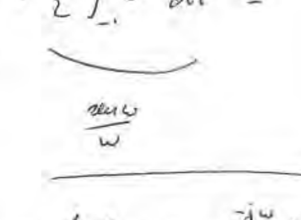
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (t+1)\, e^{-j\omega t}\, dt = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\, e^{-j\omega t}}_{\text{por partes}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}\, dt}_{\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}} =$$

HACER

$$\ldots = \frac{\operatorname{sen}\omega}{j\omega^2} - \frac{\cos\omega}{j\omega} + \frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega} = \ldots = \boxed{\frac{1}{j\omega}\left(\operatorname{sinc}\omega - e^{-j\omega}\right)}$$

Utilizando propiedad de TF. $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

$$y(t) = \Pi_1(t) \cdot \frac{1}{2} - \delta(t-1)$$



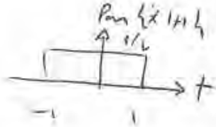
$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}\, 2\, \frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega} - 1 \cdot e^{-j\omega \cdot 1}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau)\, d\tau \xrightarrow{TF} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} Y(j\omega) + \pi \underbrace{Y(0)}_{0} \delta(\omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{X(j\omega) = \frac{1}{j\omega}\left(\operatorname{sinc}\omega - e^{-j\omega}\right)}$$

(b) ¿ $\text{Par}\{x(t)\} \xleftrightarrow{TF} \text{Re}\{X(j\omega)\}$?

$$\text{Par}\{x(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t)+x(-t)\} = \frac{1}{2}\,\Pi_1(t)$$



$$\boxed{TF\{\text{Par}\{x(t)\}\} = \frac{\text{sen}\,\omega}{\omega}}$$

Por otra parte, $\text{Re}\{X(j\omega)\} = \text{Re}\left\{\frac{1}{j\omega}\left(\frac{\text{sen}\,\omega}{\omega} - e^{-j\omega}\right)\right\} =$

$$= \text{Re}\left\{-j\cdot\frac{\text{sen}\,\omega}{\omega^2} + \frac{j}{\omega}\left(\cos\omega + j\,\text{sen}(-\omega)\right)\right\} =$$

$$= \text{Re}\left\{\frac{j^2}{\omega}\cdot\text{sen}(-\omega)\right\} = \boxed{\frac{\text{sen}\,\omega}{\omega}}$$

(c) ¿ TF de la parte impar de $x(t)$?

$x(t) = \text{Par}\{x(t)\} + \text{Impar}\{x(t)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Impar}\{x(t)\} = x(t) - \text{Par}\{x(t)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow TF\{\text{Impar}\{x(t)\}\} = TF\{x(t)\} - TF\{\text{Par}\{x(t)\}\} =$

$$= \frac{1}{j\omega}\left(\frac{\text{sen}\,\omega}{\omega} - e^{-j\omega}\right) - \frac{\text{sen}\,\omega}{\omega} = \boxed{j\left(\frac{\text{sen}\,\omega}{-\omega^2} + \frac{\cos\omega}{\omega}\right)}$$

(7) $x(t) = e^{-|t|} \xleftrightarrow{TF} \dfrac{2}{1+w^2}$

(a) Utilizar propiedades para obtener la TF de $g(t) = t \cdot e^{-|t|}$

$$t \cdot x(t) \xleftrightarrow{TF} j \cdot \frac{d}{dw} X(jw) = j\frac{d}{dw}\left[\frac{2}{1+w^2}\right] =$$

$$= j\ \frac{2(-2)w}{(1+w^2)^2} = \boxed{\frac{-4jw}{(1+w^2)^2}}$$

(b) Dualidad para la TF de $\dfrac{4t}{(1+t^2)^2} = h(t)$

$$\left.\begin{aligned} f(t) &\xleftrightarrow{TF} g(w) \\ g(t) &\xleftrightarrow{TF} 2\pi \cdot f(-w) \end{aligned}\right\}$$

$$t \cdot e^{-|t|} = f(t) \xleftrightarrow{TF} g(w) = \frac{-4jw}{(1+w^2)^2}$$

DUALIDAD

$$g(t) = \frac{-4jt}{(1+t^2)^2} \xleftrightarrow{TF} 2\pi f(-w) = -2\pi w e^{-|w|}$$

LINEALIDAD

$$h(t) = \frac{1}{-j} \cdot g(t) \xleftrightarrow{TF} H(jw) = \frac{+2\pi w e^{-|w|}}{+j} \Rightarrow$$

$$\boxed{H(jw) = \frac{2\pi}{j} w e^{-|w|}}$$

8) $x(t) \xleftrightarrow{TF} X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega-\pi) + \delta(\omega-5)$

$h(t) = u(t) - u(t-2)$

(a) ¿Es $x(t)$ periódica? $\left(e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{TF} 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \right)$

$X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega-\pi) + \delta(\omega-5)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} e^{j\pi t}}_{\omega_0 = \pi \text{ r/s}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} e^{j5t}}_{\omega_1 = 5 \text{ r/s}}$$

$$\left.\begin{aligned} T_0 &= \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ seg} \\ T_1 &= \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5} \text{ seg} \end{aligned}\right\} \nexists \text{ m.c.m.} \{T_0, T_1\}, \text{ luego } \underline{\underline{\text{no}}} \text{ es periódica}$$

(b) ¿Es $x(t) * h(t)$ periódica?

$H(j\omega) = e^{-j\omega} \cdot \frac{2 \operatorname{sen} \omega}{\omega}$ ($\boxed{\text{H3C6a}}$)

$x(t) * h(t) \xleftrightarrow{TF} X(j\omega) \cdot H(j\omega) = H(0)\,\delta(\omega) +$

$+ H(\pi)\,\delta(\omega-\pi) + H(5)\,\delta(\omega-5) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad H(\omega=0) = e^{0} \; 2 \cdot 1 = 2$$

$$H(\omega=\pi) = e^{-j\pi} \cdot 2\,\frac{\operatorname{sen}\pi}{\pi} = 0$$

$$H(\omega=5) = e^{-j5} \cdot 2\,\frac{\operatorname{sen}5}{5} = k_c \neq 0 \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{H(0)}{2\pi} + \frac{H(5)}{2\pi}\,e^{j\cdot 5t} = \frac{1}{\pi} + \frac{k_c}{2\pi}\,e^{j5t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Periódica}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{5}}$$

(c) (a) y (b) demuestran que sí es posible.

(a) $h(t) \xleftrightarrow{TF} H(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega + 3}$, LIT

$x(t) \to \boxed{h(t)} \to y(t) = e^{-3t} \cdot u(t) - e^{-4t} u(t)$

De las tablas: $e^{-at} \cdot u(t)$, Re $\{a\} > 0 \xleftrightarrow{TF} \dfrac{1}{a + j\omega}$

Por tanto, $Y(j\omega) = \dfrac{1}{3 + j\omega} - \dfrac{1}{4 + j\omega} =$

$= \dfrac{4 + j\omega - 3 - j\omega}{(3 + j\omega)(4 + j\omega)} = \dfrac{1}{(3 + j\omega)(4 + j\omega)}$

Ahora, $Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) \Rightarrow$

$X(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{H(j\omega)} = \dfrac{(j\omega + 3)}{(3 + j\omega)(4 + j\omega)} = \dfrac{1}{4 + j\omega} \Rightarrow$

$$\boxed{x(t) = e^{-4t} \cdot u(t)}$$

(10) $x_0(t) = e^{-t}\,(u(t) - u(t-1))$

$$X_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t)\, e^{-j\omega t}\,dt = \int_0^1 e^{-t} e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= \int_0^1 e^{-(1+j\omega)t}\,dt = \frac{-1}{1+j\omega}\left[e^{-(1+j\omega)t}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1 - e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega} \quad //$$

(a) $x(t) = x_0(t) + x_0(-t) \Rightarrow$

$$X(j\omega) = X_0(j\omega) + X_0(-j\omega)$$

(b) $x(t) = x_0(t) - x_0(-t) \Rightarrow$

$$X(j\omega) = X_0(j\omega) - X_0(-j\omega)$$

(c) $x(t) = x_0(t) + x_0(t+1) \Rightarrow$

$$X(j\omega) = X_0(j\omega) + e^{-j\omega(-1)} X_0(j\omega) =$$

$$= X_0(j\omega)\,(1 + e^{j\omega}) = X_0(j\omega)\cdot e^{-j\frac{\omega}{2}}\cdot$$

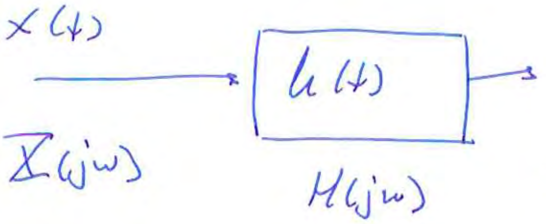
$$\cdot\left(e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}\right) = X_0(j\omega)\cdot e^{-j\omega/2}\cdot 2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad //$$

(d) $x(t) = t\cdot x_0(t) \Rightarrow X(j\omega) = j\cdot \dfrac{dX_0(j\omega)}{d\omega} =$

$$= j\,\frac{j e^{-(1+j\omega)} + (1 - e^{-(1+j\omega)})\cdot j}{(1+j\omega)^2} = \frac{-1}{(1+j\omega)^2} \quad //$$

(11) $y(t) = x(t) * h(t)$.

$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$.



$y(t) = x(t) * h(t)$

$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$

(a) $\left.\begin{array}{l} x(t) = t \cdot e^{-2t} \cdot u(t) \\ h(t) = e^{-4t} \cdot u(t) \end{array}\right\}$ Utilizo propiedades:

$$e^{-at} \cdot u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}$$

$$t \cdot v(t) \longleftrightarrow j \cdot \frac{dV(j\omega)}{d\omega}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{4 + j\omega}$$

$$X(j\omega) = j \cdot \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{2 + j\omega}\right) = j \frac{-j}{(2 + j\omega)^2} = \frac{1}{(2 + j\omega)^2}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{1}{4 + j\omega} \cdot \frac{1}{(2 + j\omega)^2} =$$

$$= \frac{A}{4 + j\omega} + \frac{B}{2 + j\omega} + \frac{C}{(2 + j\omega)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} & A\,(2+j\omega)^2 + \\ & + B\,(4+j\omega)\,(2+j\omega) + \\ & + C\,(4+j\omega) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \omega = 0 \Rightarrow \quad & A \cdot 2^2 + B\, 4 \cdot 2 + C \cdot 4 = 1 \\ \omega = 1 \Rightarrow \quad & A \cdot (2+j)^2 + B\,(4+j)\,(2+j) + \\ & + C\,(4+j) = 1 \\ \omega = -1 \Rightarrow \quad & A\,(2-j)^2 + B\,(4-j)\,(2-j) + \\ & + C\,(4-j) = 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 3+j4 & 7+j6 & 4+j \\ 3-j4 & 7-j6 & 4-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A &= 0'25 \\ B &= -0'25 \\ C &= 0'5 \end{aligned}\right\}$$

$$Y(j\omega) = \frac{A}{4+j\omega} + \frac{B}{2+j\omega} + \frac{C}{(2+j\omega)^2} \Rightarrow$$

$$y(t) = A \cdot e^{-4t} u(t) + B\, e^{-2t} u(t) + C \cdot t \cdot e^{-2t} u(t) \;// \Rightarrow$$

$$y(t) = \left[\frac{1}{4} e^{-4t} - \frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{1}{2} t\, e^{-2t}\right] u(t) \;//$$

Apdo ② $\Rightarrow$ $x(t) = t \cdot e^{-2t} \cdot u(t) \Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2}$

$h(t) = t \cdot e^{-4t} \cdot u(t) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{(4+j\omega)^2}$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2} \cdot \frac{1}{(4+j\omega)^2} = \frac{A}{(2+j\omega)^2} + \frac{B}{(4+j\omega)^2}$$

$$A\,(4+j\omega)^2 + B\,(2+j\omega)^2 = 1$$

$\omega = 0 \Rightarrow A \cdot 4^2 + B \cdot 2^2 = 1$

$\omega = 1 \Rightarrow A(4+j)^2 + B(2+j)^2 = 1$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 15+j8 & 3+j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A = 0{,}12$

$B = -0{,}23$ $\Rightarrow Y(j\omega) = \frac{0{,}12}{(2+j\omega)^2} + \frac{-0{,}23}{(4+j\omega)^2}$

$$y(t) = A \cdot t \cdot e^{-2t} \cdot u(t) + B \cdot t \cdot e^{-4t} \cdot u(t) = 0{,}12 \cdot t \cdot e^{-2t} \cdot u(t) - 0{,}23 \cdot t \cdot e^{-4t} \cdot u(t)$$

Apdo ③ $\Rightarrow$ $x(t) = e^{-t} \cdot u(t) \Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$

$h(t) = e^{t} \cdot u(-t) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1-j\omega}$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)} \frac{1}{(1-j\omega)} = \frac{A}{1+j\omega} + \frac{B}{1-j\omega}$$

$$A\,(1-j\omega) + B\,(1+j\omega) = 1$$

$\omega = 0 \Rightarrow A + B = 1$

$\omega = 1 \Rightarrow (1-j)A + (1+j) \cdot B = 1$ $\Big\}$ $A = 0{,}5$, $B = 0{,}5$ $\Big\}$ $y(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} \cdot u(t) + \frac{1}{2} e^{t} \cdot u(-t)$

(12) $x(t) = e^{-(t-2)} u(t-2)$
$h(t) = u(t+1) - u(t-3)$ $\Big\}$ $y(t) = x(t) * h(t)$

$v(t) = e^{-t} u(t) \xleftrightarrow{TF} V(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega}$

$w(t) = v(t-2) \xleftrightarrow{TF} W(j\omega) = e^{-j\omega 2} \cdot V(j\omega) = \dfrac{e^{-j2\omega}}{1+j\omega}$

Como $w(t) = x(t) \Rightarrow X(j\omega) = \dfrac{e^{-j2\omega}}{1+j\omega}$

$r(t) = \Pi(t/2) \longleftrightarrow R(j\omega) = \dfrac{2\,\text{sen}(2\omega)}{\omega}$

$s(t) = r(t+1) \longleftrightarrow S(j\omega) = e^{j\omega} \cdot R(j\omega) \Rightarrow$

Como $s(t) = h(t) \Rightarrow H(j\omega) = e^{j\omega} \dfrac{2\,\text{sen}(2\omega)}{\omega}$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) = e^{j\omega} \frac{2 \cdot \text{sen}(2\omega)}{\omega(1+j\omega)}$$ //

(Faltaría calcular $y(t)$ por convolución y obtener su TF).

(13) $h(t) \xleftrightarrow{TF} H(j\omega)$

(a) $H(j\omega) = 2[\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)] +$
$+ 3[\delta(\omega-2\pi) - \delta(\omega+2\pi)]$

Sabemos: $\operatorname{sen} \omega_0 t \longleftrightarrow \frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)]$

$\Rightarrow \quad \frac{j}{\pi}\operatorname{sen}(\omega_0 t) \longleftrightarrow \delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)$

Por tanto: $h(t) = \frac{2j}{\pi}\operatorname{sen}(t) + \frac{3j}{\pi}\operatorname{sen}(2\pi t)$

(b) $H(j\omega) = 2(u(\omega+3) - u(\omega-3)) \cdot e^{j(-\frac{3}{2}\omega+\pi)}$

Sabemos: $\frac{\operatorname{sen} Wt}{\pi t} \longleftrightarrow \begin{cases} 1, & |\omega|<W \\ 0, & - \end{cases}$

Por tanto: $-2 \cdot \frac{\operatorname{sen}(3t)}{\pi t} \longleftrightarrow 2 \cdot \Pi(\omega/3)$ $e^{j\pi}$

$r(t) \longleftrightarrow R(j\omega)$

$r(t-\frac{3}{2}) \longleftrightarrow R(j\omega)\, e^{-j\frac{3}{2}\omega}$

$\quad \| \qquad\qquad\qquad \|$

$\;h(t) \qquad\qquad\quad H(j\omega)$

$\Rightarrow h(t) = -2\,\frac{\operatorname{sen}(3(t-\frac{3}{2}))}{\pi(t-\frac{3}{2})}$ //

(c) $H(j\omega) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(3\omega)}{\omega^2} \cdot \cos\omega$

Sabemos: $\Pi(t/T_1) \longleftrightarrow \dfrac{2\operatorname{sen}(\omega T_1)}{\omega}$

$\frac{1}{2}(\delta(t-t_0)+\delta(t+t_0)) \longleftrightarrow \cos\omega = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t_0} + e^{-j\omega_0 t_0})$

$x(t) * y(t) \longleftrightarrow X(j\omega)\cdot Y(j\omega)$

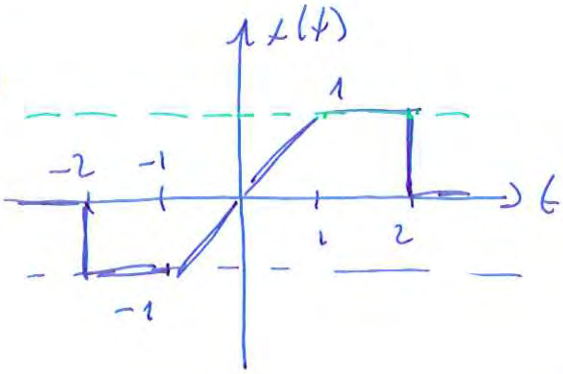
Utilizándolo todo:

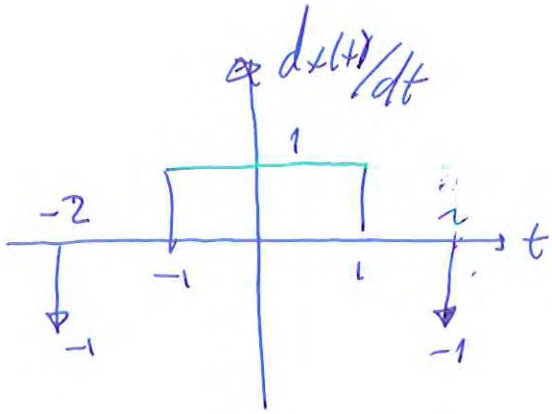
$H(j\omega) = \dfrac{\operatorname{sen}(3\omega)}{\omega} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(3\omega)}{\omega} \cdot \cos\omega$

$h(t) = \frac{1}{2}\Pi(t/3) * \frac{1}{2}\Pi(t/3) * \frac{1}{2}(\delta(t-1)+\delta(t+1)) =$

$= \frac{1}{8}\cdot 6\Lambda(t/6) * (\delta(t-1)+\delta(t+1)) = [\cdots]$

14





$$z(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{t} z(\tau)\, d\tau$$

$$z(t) = \Pi(t) - \delta(t+2) - \delta(t-2)$$

$$Z(j\omega) = \frac{2 \operatorname{sen} \omega}{\omega} - e^{-j\omega(-2)} - e^{-j\omega(2)} =$$

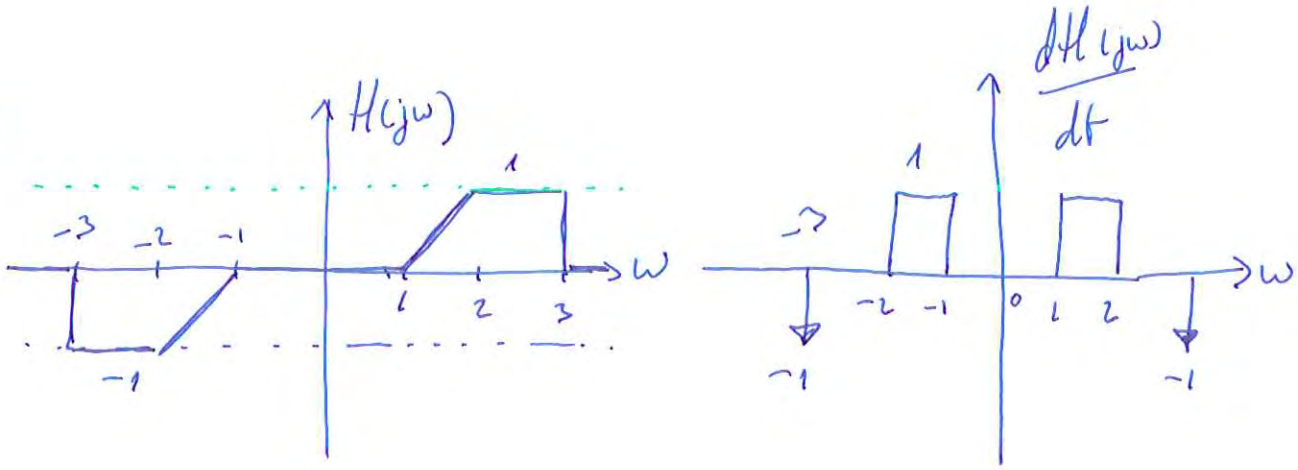
$$= \frac{2 \operatorname{sen} \omega}{\omega} - 2 \cos(2\omega)$$

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} Z(j\omega) + \pi Z(0)\delta(\omega) =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \omega}{j\omega^2} - \frac{2\cos(2\omega)}{j\omega} + \pi(0)\delta(\omega) =$$

$$= -2j \frac{\operatorname{sen} \omega}{\omega^2} + 2j \frac{\cos(2\omega)}{\omega} \;//$$

15



(a)

$$Z(j\omega) = \frac{dH(j\omega)}{d\omega} = \Pi\left(\omega/0'5\right) * \left(\delta(\omega+1'5) + \delta(\omega-1'5)\right) -$$

$$-\left(\delta(\omega+3) + \delta(\omega-3)\right)$$

Sabemos además que: $t\,v(t) \longleftrightarrow j\frac{d}{d\omega}V(j\omega)$

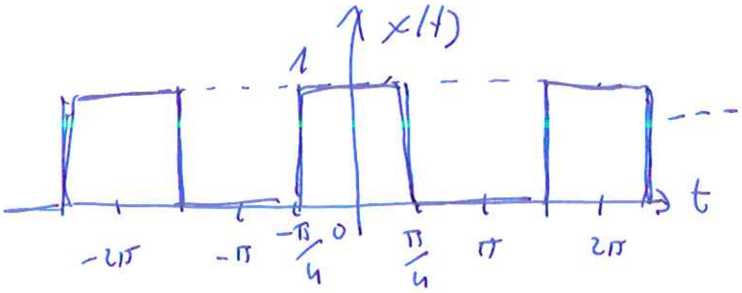
Por tanto: $z(t) = \frac{\text{sen}(0'5\,t)}{\pi t} \cdot \frac{1}{\pi}\cos(1'5t) \cdot 2\pi -$

$$-\frac{1}{\pi}\cos(3t)$$

$z(t) = -j\,t\,h(t) \longleftrightarrow Z(j\omega) = \frac{dH(j\omega)}{dt}$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{-jt}z(t) = \frac{j2\,\text{sen}(0'5t)\cdot\cos(1'5t)}{\pi t^2} - \frac{j}{\pi t}\cos(3t)$$

(b) $x(t)$



Tablas: $X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\,\text{sen}(k\omega_0 \frac{\pi}{4})}{k}\,\delta(\omega - k\omega_0) =$

$\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\right) \Big| = \sum_k \frac{2\,\text{sen}(k\frac{\pi}{4})}{k}\,\delta(\omega - k)$

(c) Tablas: $a_k = \frac{\text{sen}(k\omega_0 \frac{\pi}{4})}{k\pi} = \frac{\text{sen}(k\frac{\pi}{4})}{k\pi}$

(d) $P_x = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} |x(t)|^2 = \frac{1}{2\pi}\, 1^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}$

A la salida del sistema: solo pasan las deltas en $k = \pm 2, \pm 3$

$y(t) = H(-3)\,a_{-3}\,e^{j(-3)\cdot t} + H(-2)\,a_{-2}\,e^{j(-2)t} +$
$+ H(3)\,a_3\,e^{j(3)t} + H(2)\,a_2\,e^{j(2)t}$.

$H(-3) = H(-2) = -1;\ H(2) = H_3 = 1.$

$P_y = \sum_k |b_k|^2 = |a_{-3}|^2 + |a_{-2}|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 =$

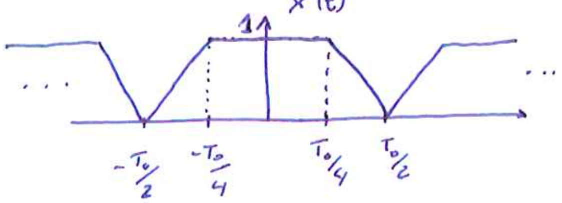
$= 2|a_3|^2 + 2|a_2|^2 = 2\left|\frac{\text{sen}(3\frac{\pi}{4})}{3\pi}\right|^2 + 2\left|\frac{\text{sen}(2\frac{\pi}{4})}{2\pi}\right|^2 =$

$= 0'06$

$P_y / P_x = \frac{0'06}{0'25} = 0'24 \quad (\sim 24\%)$

Problema 16.

① Encuentre los coeficientes del DSF.



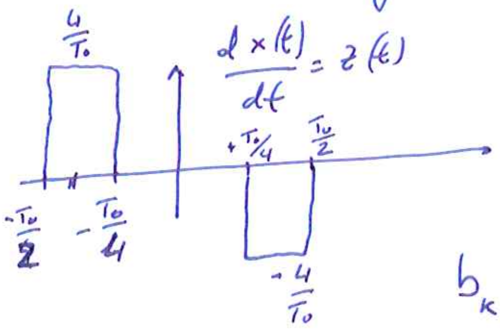
Por ser periódica $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{+jk\omega_0 t}$

Para calcular los coeficientes: $a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{4}} \left(\frac{4}{T_0}t+2\right)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt + \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} 1\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt + \int_{+\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{2}} \left(-\frac{4}{T_0}t+2\right)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt\right]$$

Se complica. La primera y la última integral habría que hacerlas por partes.

¿Y si calculo los coeficientes de su derivada y luego aplico propiedades?



z(t) también es periódica y con el mismo periodo.

$$b_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} z(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$$b_k = \frac{1}{T_0}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{4}} \frac{4}{T_0}\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt + \int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{2}} \left(-\frac{4}{T_0}\right)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{T_0}\,\frac{4}{T_0}\,\frac{1}{-jk\omega_0}\left(e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{4}} - e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{2}} \right) =$$

$$b_k = \frac{4}{T_0 \cdot T_0} \frac{j}{k \cdot \frac{2\pi}{T_0}} \left(e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}\left(-\frac{T_0}{4}\right)} - e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}\left(-\frac{T_0}{2}\right)} - e^{-jk\omega_0 \frac{T_0}{2}} + e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{T_0}{4}} \right)$$

$$b_k = \frac{2j}{T_0 k \pi} \left(e^{+jk\frac{\pi}{2}} - e^{+jk\pi} - e^{-jk\pi} + e^{-jk\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$\begin{cases} b_k = \frac{2j}{T_0 k \pi} \left(2\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - 2\cdot\cos(k\pi) \right) & \text{si } k \neq 0 \\ b_0 = 0 & \text{puesto que el valor medio de la señal es nulo.} \end{cases}$$

Sabemos que si $z(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightsquigarrow b_k = jk\omega a_k$

Luego $a_k = \frac{1}{jk\,2\pi/T_0} \cdot b_k = \frac{\cancel{T_0}}{\cancel{j}k\cancel{2}\pi} \cdot \frac{\cancel{2}j}{\cancel{T_0}k\pi} \cdot 2\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \cos(k\pi)\right)$

$$\begin{cases} a_k = \frac{2}{k^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \cos(k\pi)\right] & \text{si } k \neq 0 \\ a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\left(\frac{T_0}{4} + \frac{T_0}{4} + \frac{T_0}{8} + \frac{T_0}{8}\right) = \frac{1}{T_0}\cdot\frac{3T_0}{4} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

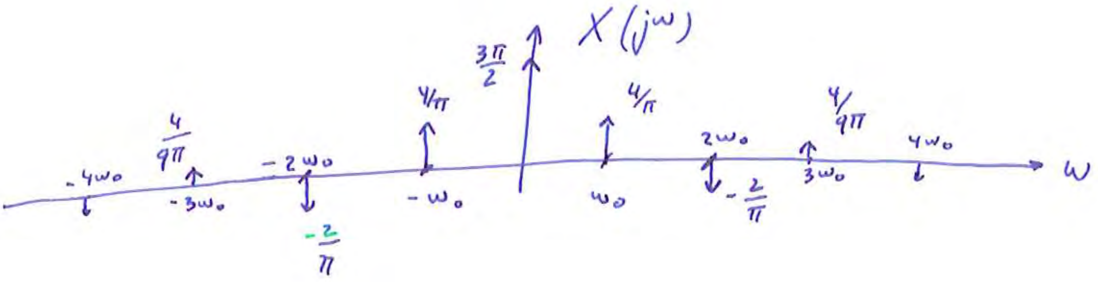
(2) Calcule la $TF\{x(t)\}$ y represéntela.

Sabemos que si $x(t)$ es periódica de periodo T_0

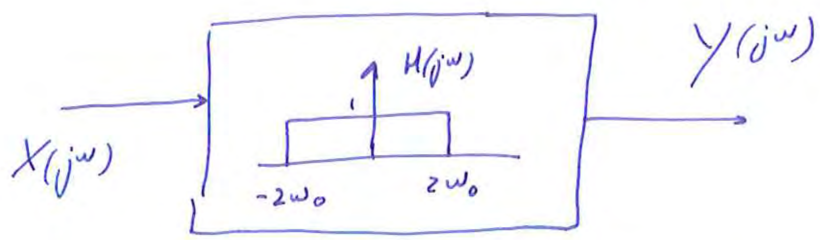
si $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{TF} X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot a_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$

luego en nuestro caso

$$X(j\omega) = 2\pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \delta(\omega) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \cos(k\pi)\right] \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$



③



$\frac{4\pi}{T_0} = \frac{4\pi}{2\pi/\omega_0} = \omega_0 \cdot 2$

Solo salen 5 deltas, las correspondientes a $k=-2$, $k=-1$, $k=0$, $k=1$ y $k=2$.

En esos casos
$$\begin{cases} a_{-2} = \frac{2}{4\pi^2}(-1-1) = -\frac{1}{\pi^2} \\ a_{-1} = \frac{2}{\pi^2}(0-(-1)) = \frac{2}{\pi^2} \\ a_0 = \frac{3}{4} \\ a_1 = \frac{2}{\pi^2}(0-(-1)) = \frac{2}{\pi^2} \\ a_2 = \frac{2}{4\pi^2}(-1-1) = -\frac{1}{\pi^2} \end{cases}$$

$$y(t) = a_{-2}\cdot \underbrace{H(j(-2\omega_0))}_{=1}\cdot e^{j(-2)\omega_0 t} + a_{-1}\cdot \underbrace{H(j(-\omega_0))}_{=1}\cdot e^{-j\omega_0 t} + a_0\cdot \underbrace{H(j\cdot 0)}_{=1}\cdot e^{0} + a_1\cdot \underbrace{H(j\omega_0)}_{=1}\cdot e^{j\omega_0 t} + a_2\cdot \underbrace{H(j2\omega_0)}_{=1}\cdot e^{j2\omega_0 t}$$

$$P_y = \sum_{k=-2}^{2} |a_k|^2 = 2\cdot\frac{1}{\pi^4} + 2\cdot\frac{4}{\pi^4} + \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16} + 2\cdot\frac{5}{\pi^4} = 0{,}665$$

Para saber qué porcentaje de potencia atravesó el sistema tengo que conocer la potencia media total de $x(t)$.

$$P_{M\,TOTAL} = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{4}} \left(\frac{4}{T_0}t+2\right)^2 dt + \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} 1 \cdot dt + \int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{2}} \left(-\frac{4}{T_0}t+2\right)^2 dt\right]$$

es lo mismo que $\int_0^{\frac{T_0}{4}} \frac{4}{T_0} \cdot t \, dt = \frac{4}{T_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{T_0^2}{16} = \frac{1}{8} \cdot T_0$

$$= \dots\dots\dots = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 0{,}75$$

Hacemos una regla de tres. Si 0,75 es el 100%, ¿cuánto será 0,665? Vemos que atraviesa el 88,6 % de la potencia.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} 0{,}75 \longrightarrow 100 \\ 0{,}665 \longrightarrow x \end{array}\right\} x = \frac{66'5}{0{,}75} = 88'6\%}$$

④ Representar $y(t)$.

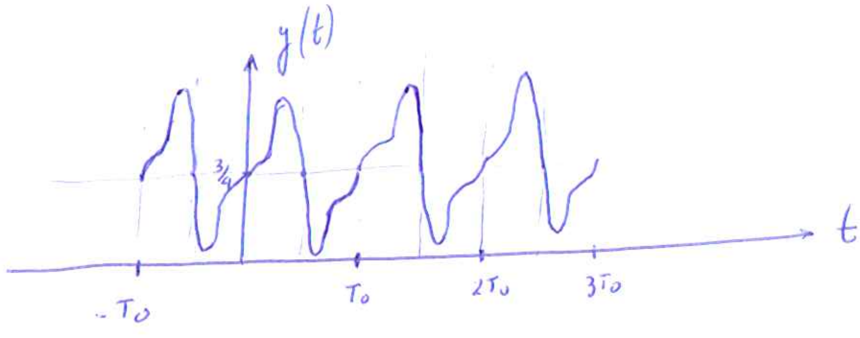
$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$;

$$Y(j\omega) = -\frac{2}{\pi} \cdot \delta(\omega+2\omega_0) + \frac{4}{\pi} \cdot \delta(\omega+\omega_0) + \frac{3\pi}{2}\delta(\omega) + \frac{4}{\pi} \cdot \delta(\omega-\omega_0) - \frac{2}{\pi}\delta(\omega-2\omega_0)$$

$$Y(j\omega) = -\frac{2}{\pi}\left[\delta(\omega+2\omega_0)+\delta(\omega-2\omega_0)\right] + \frac{3\pi}{2}\delta(\omega) + \frac{4}{\pi}\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

Como sabemos que $TF\left[\cos(\omega_0 t)\right] = \pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$

$$\boxed{y(t) = -\frac{2}{\pi^2} \cdot \cos(2\omega_0 t) + \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \cos(\omega_0 t)}$$



Problema (17)

Sabemos que por ser un SLIT $y(t) = x(t) * h(t)$

Vemos que hacer la convolución de esas señales es muy, muy complicado por lo que podemos calcular $Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$ y luego hacer la transformada inversa para sacar $y(t)$.

Tengo que calcular entonces $H(j\omega)$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2W_1 W_2}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{W_1 t}{\pi}\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{W_2 t}{\pi}\right) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Uhhh.... muy complicado.

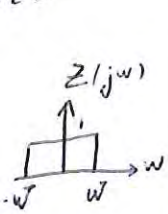
Aplico propiedades sabiendo que $h(t) = \frac{2W_1W_2}{\pi} \cdot h_1(t) \cdot h_2(t)$,

por lo tanto $H(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2W_1W_2}{\pi} \left(H_1(j\omega) * H_2(j\omega)\right)$

con $h_1(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{W_1 t}{\pi}\right) = \frac{\operatorname{sen}(W_1 t)}{W_1 t}$ y $h_2(t) = \frac{\operatorname{sen}(W_2 t)}{W_2 t}$

En la cuestión (11) calculamos la TF de $z(t)$

$$z(t) = \frac{\operatorname{sen}(Wt)}{\pi t} \xrightarrow{TF} Z(j\omega) = \begin{cases} 1 & si\ |\omega| < W \\ 0 & si\ |\omega| > W \end{cases}$$

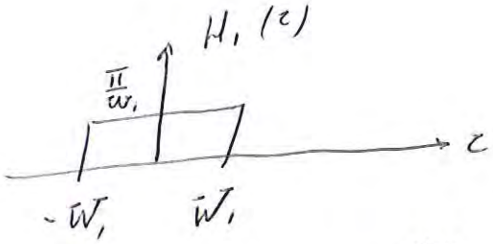


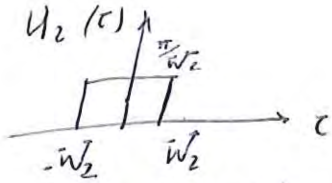
Entonces, como $h_1(t) = \frac{\pi}{W_1} \frac{\operatorname{sen}(W_1 t)}{\pi t} \xrightarrow{TF} H_1(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{W_1} & si\ |\omega| < W_1 \\ 0 & si\ |\omega| > W_1 \end{cases}$

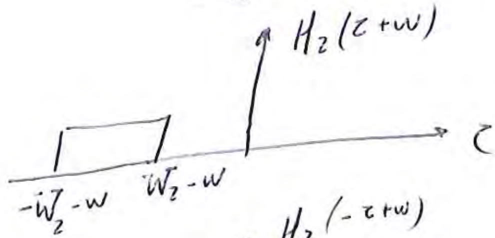
y también $H_2(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{W_2} & si\ |\omega| < W_2 \\ 0 & si\ |\omega| > W_2 \end{cases}$

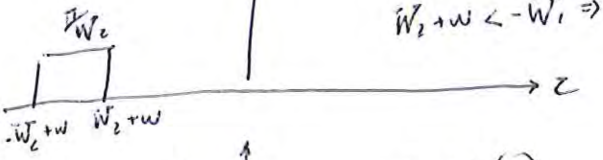
Ahora calculamos $H_1(j\omega) * H_2(j\omega)$

$$L(j\omega) = H_1(j\omega) * H_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\tau)\cdot H_2(\omega-\tau)\,d\tau$$





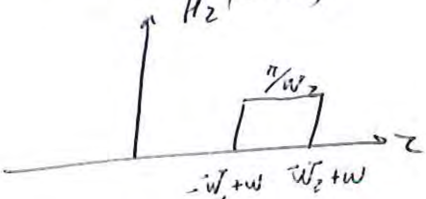


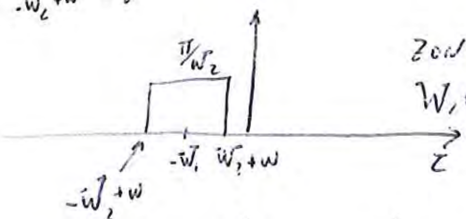


ZONA (1)

$W_2+\omega < -W_1 \Rightarrow \boxed{\omega < -W_1 - W_2}$

$L(j\omega) = 0$

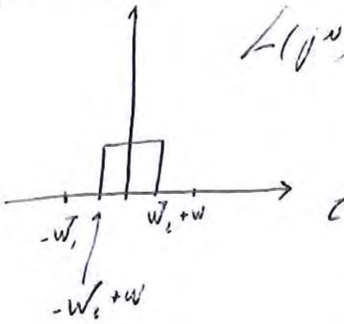




ZONA (2)

$$\left.\begin{array}{l} W_2+\omega > -W_1 \\ -W_2+\omega < -W_1 \end{array}\right\} \boxed{-W_1-W_2 < \omega < -W_1+W_2}$$

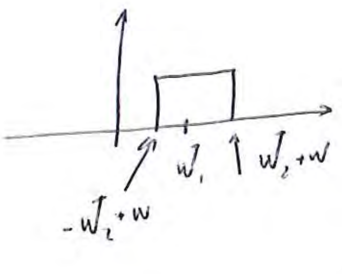
$$L(j\omega) = \int_{-W_1}^{W_2+\omega} \frac{\pi^2}{W_1 W_2}\,d\tau = \frac{\pi^2}{W_1 W_2}\left(W_2+\omega+W_1\right)$$



ZONA (3)

$$\left.\begin{array}{l} -W_2+\omega > -W_1 \\ W_2+\omega < W_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{-W_1+W_2 < \omega < W_1-W_2}$$

$$L(j\omega) = \int_{-W_2+\omega}^{W_2+\omega} \frac{\pi^2}{W_1\cdot W_2}\,d\tau = \frac{\pi^2}{W_1\cdot W_2}\left(W_2+\omega+W_2-\omega\right) = \frac{2W_2\pi^2}{W_1 W_2} = \frac{2\pi^2}{W_1}$$



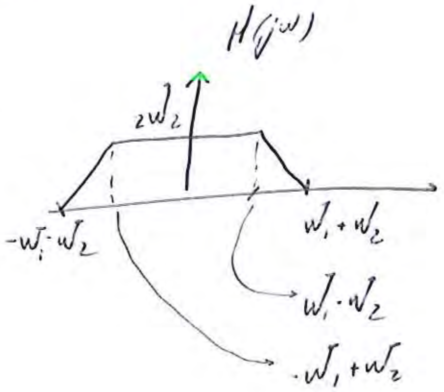
ZONA (4)

$$\left.\begin{array}{l} W_2+\omega > W_1 \\ -W_2+\omega < W_1 \end{array}\right\} \boxed{W_1-W_2 < \omega < W_1+W_2}$$

$$L(j\omega) = \int_{-W_2+\omega}^{W_1} \frac{\pi^2}{W_1 W_2}\cdot d\tau = \frac{\pi^2}{W_1 W_2}\left(W_1+W_2-\omega\right)$$

ZONA (5) $\boxed{\omega > W_1+W_2}$; $L(j\omega) = 0$

Ahora ya podemos sacar $H(j\omega)$



$$H(j\omega) = \frac{\cancel{2} W_1 \cdot W_2}{\pi} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\pi} \cdot L(j\omega) \Rightarrow$$

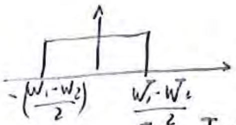
$$H(j\omega) = \begin{cases} 0 & si \quad \omega < -W_1 - W_2 \\ (W_1+W_2)+\omega & si \quad -W_1-W_2 < \omega < -W_1+W_2 \\ 2W_2 & si \quad -W_1+W_2 < \omega < W_1-W_2 \\ (W_1+W_2)-\omega & si \quad W_1-W_2 < \omega < W_1+W_2 \\ 0 & si \quad \omega > W_1+W_2 \end{cases}$$

Tenemos ahora que hacer lo mismo para $x(t)$

$$x(t) = \frac{(W_1-W_2)^2}{2\pi} \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{W_1-W_2}{2\pi} \cdot t\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{W_1-W_2}{2\pi} \cdot t\right)$$

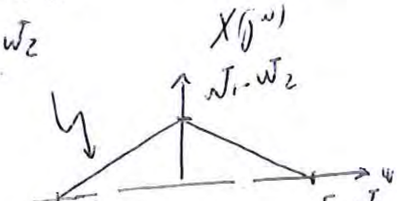
$$X(j\omega) = \frac{(W_1-W_2)^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot TF\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{W_1-W_2}{2} \cdot t\right)}{\frac{W_1-W_2}{2} \cdot t}\right] * TF\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{W_1-W_2}{2} \cdot t\right)}{\frac{W_1-W_2}{2} \cdot t}\right]$$

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{W_1-W_2} & si \quad |\omega| < \frac{W_1-W_2}{2} \\ 0 & si \quad |\omega| > \frac{W_1-W_2}{2} \end{cases}$$



$$X(j\omega) = \left[u\left(\omega + \frac{W_1-W_2}{2}\right) - u\left(\omega - \frac{W_1-W_2}{2}\right)\right] * \left[u\left(\omega + \frac{W_1-W_2}{2}\right) - u\left(\omega - \frac{W_1-W_2}{2}\right)\right]$$

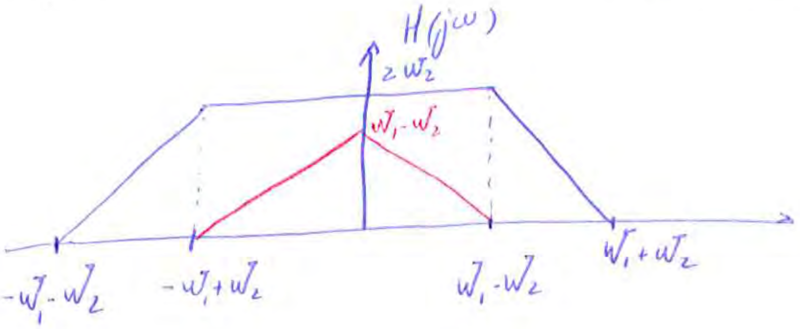
$$X(j\omega) = \begin{cases} 0 & si \quad \omega < -(W_1-W_2) \\ 2\cdot\omega + (W_1-W_2) & si \quad -(W_1-W_2) < \omega < 0 \\ -2\omega + (W_1-W_2) & si \quad 0 < \omega < W_1-W_2 \\ 0 & si \quad \omega > W_1-W_2 \end{cases}$$



Por ser un SLIT $y(t) = x(t) * h(t)$

por lo tanto $Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$

Si pintamos $X(j\omega)$ en rojo y $H(j\omega)$ en azul.



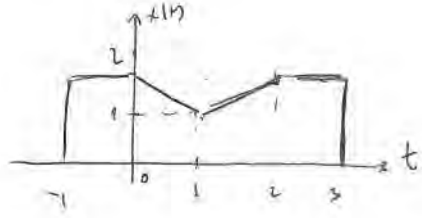
Vemos que $Y(j\omega) = 2 \cdot W_2 \cdot X(j\omega)$

Por lo tanto $y(t) = 2W_2 \cdot x(t)$

$$\boxed{y(t) = \frac{W_2 (W_1 - W_2)^2}{\pi} \cdot \operatorname{sinc}^2\left(\frac{W_1 - W_2}{2\pi} t\right)}$$

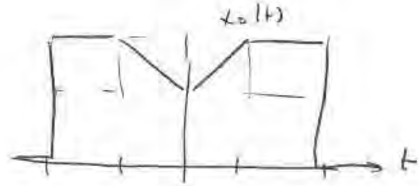
No hizo falta hacer la transformada inversa ...

SEP 04 $\quad x(t) \xrightarrow{TF} X(j\omega)$



(a) $\sphericalangle X(j\omega)$

Si llamamos $x_0(t)$ a la siguiente señal:



entonces $x_0(t)$ real y par $\Rightarrow X_0(j\omega)$ real y par.

$$x(t) = x_0(t+1) \xrightarrow{TF} X(j\omega) = X_0(j\omega) \cdot e^{-j\omega}$$

$$\boxed{\sphericalangle X(j\omega) = \sphericalangle X_0(j\omega) + \sphericalangle e^{-j\omega} = 0 - \omega = -\omega}$$

(b) ¿$X(j0)$?

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \Rightarrow \boxed{X(j0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = 7}$$

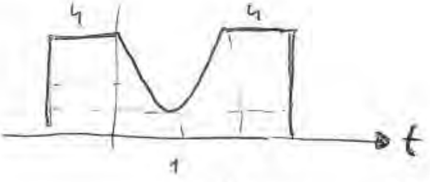
(c) ¿$\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, d\omega$?

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \Rightarrow x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, d\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, d\omega = 2\pi \cdot x(0) = 4\pi}$$

(d) ¿ $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$?

Por Parseval: $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x \cdot 2\pi$



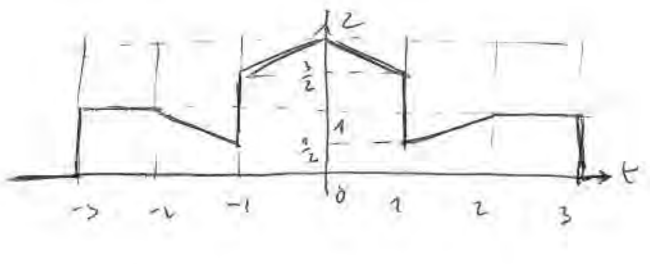
$\longrightarrow I = \int_1^2 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$E_x = 2 \cdot I + 2 \cdot 4 \cdot 1 = 2 \cdot \frac{7}{3} + 8 \Rightarrow \boxed{2\pi \cdot E_x = \frac{76}{3}\pi}$

(e) TF^{-1} de $Re\{X(j\omega)\}$

Viendo las propiedades, $Par\{x(t)\} \xleftrightarrow{TF} Re\{X(j\omega)\}$
(x(t) real)

Por tanto, $Par\{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$



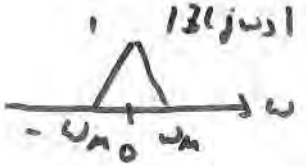
$x(t) \rightarrow \otimes \rightarrow y(t)$, $\uparrow \cos(\omega_c t + \theta_c)$

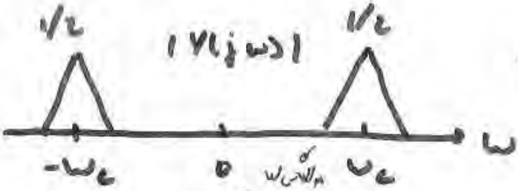
8.21 (a) $y(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_c t + \theta_c)$

$w(t) = y(t) \cdot \cos(\omega_c t + \theta_c) = x(t) \cdot \cos^2(\omega_c t + \theta_c) =$

$= \frac{1}{2} x(t) + \frac{1}{2} x(t) \cos(2\omega_c t + 2\theta_c)$ $\quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

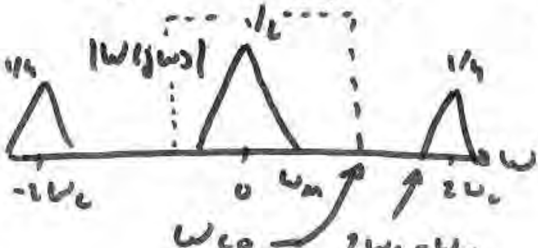
(b) $|X(j\omega)| = 0, \quad |\omega| \geq \omega_M$.





$\omega_c - \omega_M \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\omega_c \geq \omega_M}$ ①



$\Rightarrow 2\omega_c - \omega_M \geq \omega_M$

$\boxed{\omega_{co} > \omega_M}$ ②

$\boxed{\omega_{co} < 2\omega_c - \omega_M}$ ③

En ese caso, $w(t) = \frac{1}{2} x(t)$ (no depende de θ_c)

8.23

$w(t) = g(t)\cos(\omega_d t)$

$y(t) = x(t)\cos(\omega_c t)$

$\omega_d - \omega_c = \Delta\omega$

$|X(j\omega)| = 0$ para $|\omega| \geq \omega_m$

$\omega_m + \Delta\omega < \omega_{co} < 2\omega_c + \Delta\omega - \omega_m$

(a) $w(t) = x(t)\cos(\omega_d t)\cos(\omega_c t) =$

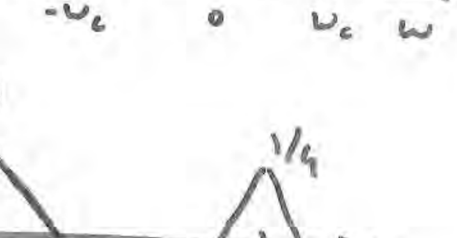
$\left(2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$

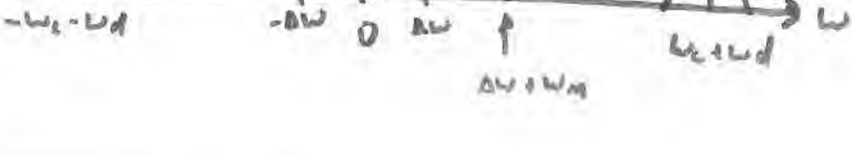
$= x(t)\cdot\frac{1}{2}\left[\cos\left((\omega_d+\omega_c)t\right) + \cos\left((\omega_d-\omega_c)t\right)\right] =$

$= \frac{1}{2}x(t)\cos(\Delta\omega t) + \frac{1}{2}x(t)\cos\left((\omega_d+\omega_c)t\right)$

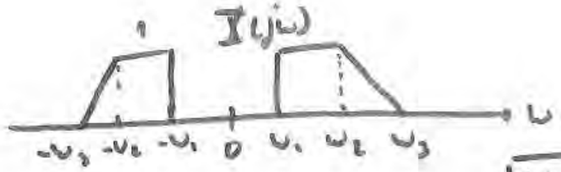
FILTRO

(b)



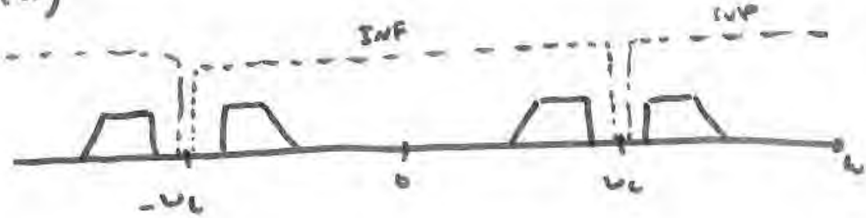


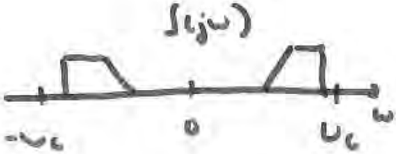
8.29

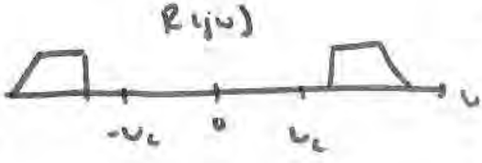


$\boxed{\omega_c > \omega_3}$

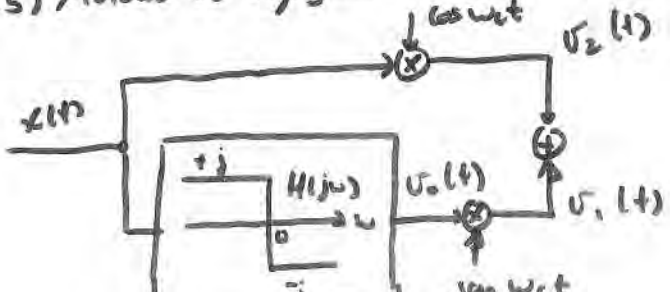
(a)

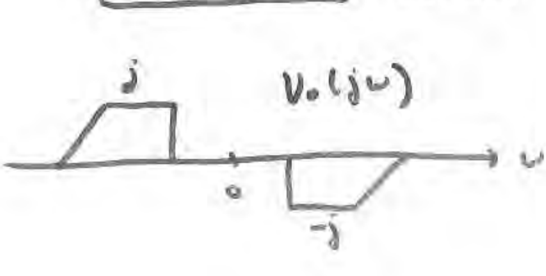


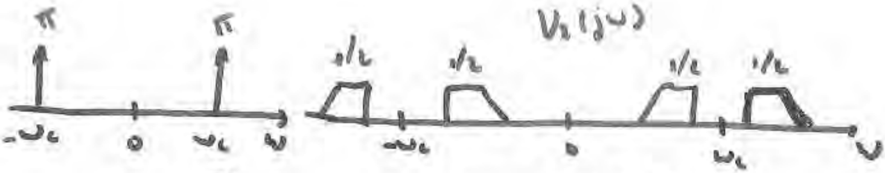


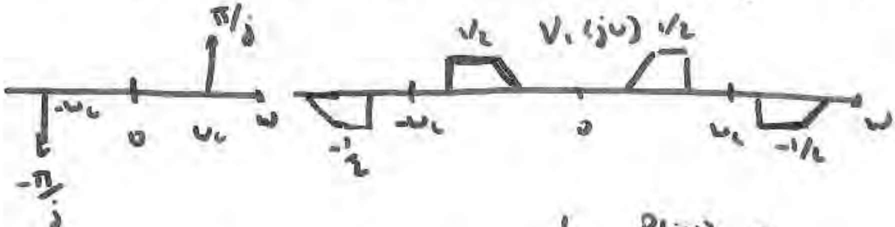


(b) Método de desplazamiento de fase.

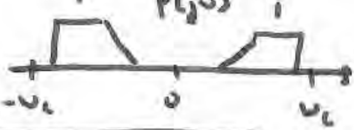








$P(j\omega) = V_1(j\omega) + V_2(j\omega)$



Como $P(j\omega) = 2 \cdot S(j\omega) \Rightarrow \boxed{p(t) = 2 \cdot s(t)}$

(c) Demodulación. Ejemplo para $S(j\omega)$: