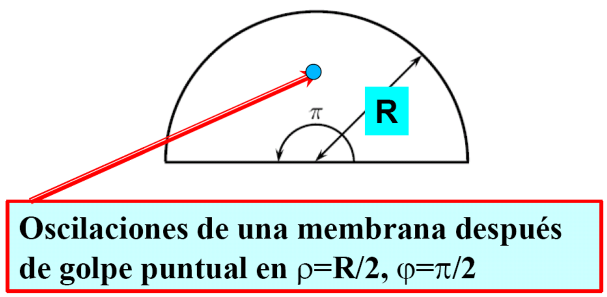
Problemas de Metodos Matematicos III.

Problema 1. Golpe puntual a una membrana semi-circular

Hallar las oscilaciones de una membrana semicircular con radio R, fija en los bordes. La membrana, inicialmente en reposo, recibe un golpe puntual en el instante $t = 0$ en el punto indicado en la Figura.

NOTA: Considerar que se cumple la siguente condición para la velocidad inicial $u_t(\rho, \varphi, 0)$:
$\lim_{\epsilon->0} \iint\limits_{\Omega\epsilon} u_t(\rho, \varphi, 0)\rho d\rho d\varphi = V_0$ con $\Omega\epsilon-$ superficien de radio ϵ entorno al punto de aplicación del golpe



Solución:

1. Representamos el golpe usando la delta de Dirac

   $u_t(\rho, \varphi, 0) = \frac{V_0}{\rho}\delta(\rho - \frac{R}{2})\delta(\varphi - \frac{\pi}{2})$

   Se ve la relación entre el impulso transferido total (I), la densidad de material (ρ_0) y V_0

   I=$\iint\limits_{\Omega\epsilon} \rho_0 u_t(\rho, \varphi, 0)\rho d\rho d\varphi = \rho_0 V_0$

2. Formulacion matematica:

$$\left(\begin{array}{c} \frac{1}{a^2}\frac{\partial u^2(\rho,\varphi,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}[\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}] - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u^2(\rho,\varphi,t)}{\partial \varphi^2} = 0 \\ CI1 : u(\rho, \varphi, 0) = 0 \\ CI2 : u_t(\rho, \varphi, 0) = \frac{V_0}{\rho}\delta(\rho - \frac{R}{2})\delta(\varphi - \frac{\pi}{2}) \\ u(R, t) = 0 \\ u(0, t) < \infty \end{array}\right)$$

3. La solución general para una membrana semicircular con los bordes fijos es:
   $u(\rho,\varphi,t) = \sum\limits_{n,m}\{A_{nm}\cos[a\frac{x_{nm}}{R}t] + B_{nm}\sin[a\frac{x_{nm}}{R}t]\}J_m(\sqrt{\lambda_{nm}}\rho)\sin(m\varphi)$

   con x_{nm} enumerados como el n-simo cero de la función de Bessel de orden m: $J_m(x_{nm}) = 0$

4. Buscamos coeficientes:
   de CI1 obtenemos: $A_{nm} = 0$

   Imponemos CI2:

   $u_t(\rho,\varphi,0) = \frac{V_0}{\rho}\delta(\rho-\frac{R}{2})\delta(\varphi-\frac{\pi}{2}) = \sum\limits_{n,m}(a\frac{x_{nm}}{R})B_{nm}\cos[a\frac{x_{nm}}{R}0]J_m(\sqrt{\lambda_{nm}}\rho)\sin(m\varphi)$

5. Usaremos la ortogonalidad de las autofunciones radiales y angulares para hallar coeficientes B_{nm}

   Multiplicamos ambas partes de la relación anterior por $J_l(\sqrt{\lambda_{kl}}\rho)\sin(l\varphi)$

   Integramos $\iint\limits_{00}^{R\pi}\rho d\rho d\varphi$

   $V_0\iint\limits_{00}^{R\pi} J_l(\sqrt{\lambda_{kl}}\rho)\sin(l\varphi)\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\frac{R}{2})\delta(\varphi-\frac{\pi}{2})\rho d\rho d\varphi =$

   $=\sum\limits_{n,m} B_{nm}(a\frac{x_{nm}}{R})\iint\limits_{00}^{R\pi} J_m(\sqrt{\lambda_{nm}}\rho)J_l(\sqrt{\lambda_{kl}}\rho)\sin(l\varphi)\sin(m\varphi)\rho d\rho d\varphi$

6. Debido a la ortogonalidad de autofunciones radiales y angulares, obtenemos coeficientes:

   $$B_{nm} = \frac{V_0\iint\limits_{00}^{R\pi} Jm(\sqrt{\lambda_{kl}}\rho)\sin(m\varphi)\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\frac{R}{2})\delta(\varphi-\frac{\pi}{2})\rho d\rho d\varphi}{(a\frac{x_{nm}}{R})\left\|J_m(\sqrt{\lambda_{nm}}\rho)\right\|^2\|\sin(m\varphi)\|^2} = \frac{V_0 R J_m(\sqrt{\lambda_{nm}}\frac{R}{2})\sin(m\frac{\pi}{2})}{(ax_{nm})\left\|J_m(\sqrt{\lambda_{nm}}\rho)\right\|^2\|\sin(m\varphi)\|^2}$$

7. La solución es

   $$u(\rho,\varphi,t) = \sum_{n,m}\frac{V_0 R J_m(\sqrt{\lambda_{nm}}\frac{R}{2})\sin(m\frac{\pi}{2})}{(ax_{nm})\left\|J_m(\sqrt{\lambda_{nm}}\rho)\right\|^2\|\sin(m\varphi)\|^2}\sin[a\frac{x_{nm}}{R}t]J_m(\sqrt{\lambda_{nm}}\rho)\sin(m\varphi)$$