

**Problemas de Metodos Matematicos III.**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft orange shadow beneath the text.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

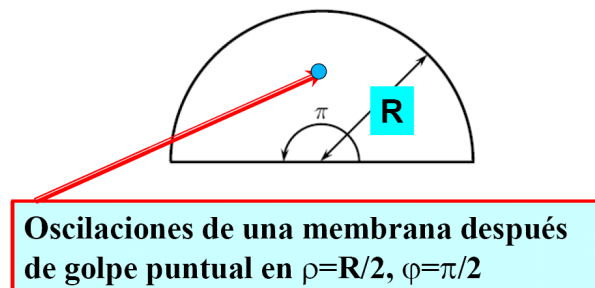
**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

### Problema 1. Golpe puntual a una membrana semi-circular

Hallar las oscilaciones de una membrana semicircular con radio  $R$ , fija en los bordes. La membrana, inicialmente en reposo, recibe un golpe puntual en el instante  $t = 0$  en el punto indicado en la Figura.

NOTA: Considerar que se cumple la siguiente condición para la velocidad inicial  $u_t(\rho, \varphi, 0)$ :

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega_\epsilon} u_t(\rho, \varphi, 0) \rho d\rho d\varphi = V_0$  con  $\Omega_\epsilon$  – superficie de radio  $\epsilon$  entorno al punto de aplicación del golpe



#### Solución:

1. Representamos el golpe usando la delta de Dirac

$$u_t(\rho, \varphi, 0) = \frac{V_0}{\rho} \delta\left(\rho - \frac{R}{2}\right) \delta\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Se ve la relación entre el impulso transferido total (I), la densidad de material ( $\rho_0$ ) y  $V_0$

$$I = \iint_{\Omega_\epsilon} \rho_0 u_t(\rho, \varphi, 0) \rho d\rho d\varphi = \rho_0 V_0$$

2. Formulacion matematica:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3. La solución general para una membrana semicircular con los bordes fijos es:

$$u(\rho, \varphi, t) = \sum_{n,m} \{A_{nm} \cos[a \frac{x_{nm}}{R} t] + B_{nm} \sin[a \frac{x_{nm}}{R} t]\} J_m(\sqrt{\lambda_{nm}} \rho) \sin(m\varphi)$$

con  $x_{nm}$  enumerados como el n-simo cero de la función de Bessel de orden m:

$$J_m(x_{nm}) = 0$$

4. Buscamos coeficientes:

de CI1 obtenemos:  $A_{nm} = 0$

Imponemos CI2:

$$u_t(\rho, \varphi, 0) = \frac{V_0}{\rho} \delta(\rho - \frac{R}{2}) \delta(\varphi - \frac{\pi}{2}) = \sum_{n,m} (a \frac{x_{nm}}{R}) B_{nm} \cos[a \frac{x_{nm}}{R} 0] J_m(\sqrt{\lambda_{nm}} \rho) \sin(m\varphi)$$

5. Usaremos la ortogonalidad de las autofunciones radiales y angulares para hallar coeficientes  $B_{nm}$

Multiplicamos ambas partes de la relación anterior por  $J_l(\sqrt{\lambda_{kl}} \rho) \sin(l\varphi)$

Integramos  $\int_0^{R\pi} \rho d\rho d\varphi$

$$V_0 \int_0^{R\pi} J_l(\sqrt{\lambda_{kl}} \rho) \sin(l\varphi) \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \frac{R}{2}) \delta(\varphi - \frac{\pi}{2}) \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \sum_{n,m} B_{nm} (a \frac{x_{nm}}{R}) \int_0^{R\pi} J_m(\sqrt{\lambda_{nm}} \rho) J_l(\sqrt{\lambda_{kl}} \rho) \sin(l\varphi) \sin(m\varphi) \rho d\rho d\varphi$$

6. Debido a la ortogonalidad de autofunciones radiales y angulares, obtenemos coeficientes:

$$B_{nm} = \frac{V_0 \int_0^{R\pi} J_m(\sqrt{\lambda_{kl}} \rho) \sin(m\varphi) \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \frac{R}{2}) \delta(\varphi - \frac{\pi}{2}) \rho d\rho d\varphi}{(a \frac{x_{nm}}{R}) \|J_m(\sqrt{\lambda_{nm}} \rho)\|^2 \|\sin(m\varphi)\|^2} = \frac{V_0 R J_m(\sqrt{\lambda_{nm}} \frac{R}{2}) \sin(m \frac{\pi}{2})}{(a x_{nm}) \|J_m(\sqrt{\lambda_{nm}} \rho)\|^2 \|\sin(m\varphi)\|^2}$$

7. La solución es

$$u(\rho, \varphi, t) = \sum_{n,m} \frac{V_0 R J_m(\sqrt{\lambda_{nm}} \frac{R}{2}) \sin(m \frac{\pi}{2})}{(a x_{nm}) \|J_m(\sqrt{\lambda_{nm}} \rho)\|^2 \|\sin(m\varphi)\|^2} \sin[a \frac{x_{nm}}{R} t] J_m(\sqrt{\lambda_{nm}} \rho) \sin(m\varphi)$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**