Universidad
Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

CONTINUIDAD Y DERIVADA

CONCEPTO DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN. REGLAS DE DERIVACIÓN

Índice

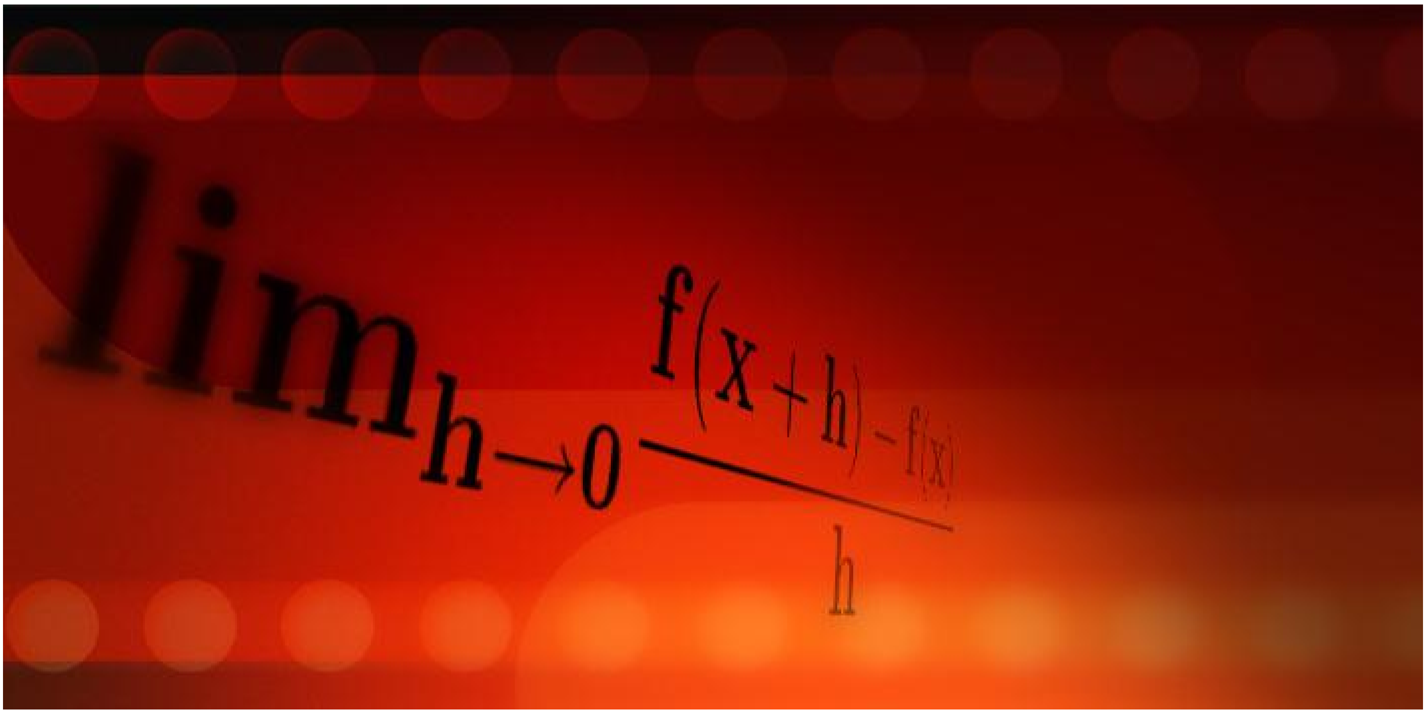
Presentación

En este tema estudiaremos el concepto de derivada de una función en un punto.

Una función representa una variable que cambia. Pero, ¿cómo podemos saber cómo cambia la función?, ¿es posible determinar si el cambio se produce rápidamente o lentamente? y ¿cómo de rápido?

La respuesta a estas preguntas la encontramos en la derivada de la función en un punto. En este tema presentaremos cómo calcularla y qué interpretaciones tiene.

Para poder aplicar la derivada a los distintos problemas es importante además conocer las reglas de derivación.



Concepto de derivada de una función en un punto

Dos problemas aparentemente distintos (cómo determinar la velocidad de un móvil en cualquier punto y cómo determinar la ecuación de la recta tangente a una función en un punto) tienen un mismo punto de partida: **el concepto de derivada**.

A finales del siglo XVII nació el cálculo diferencial e integral de la mano de **Newton** y de **Leibniz**. Estos matemáticos desarrollaron, por separado y mediante dos procedimientos distintos, una herramienta que revolucionaría las matemáticas y que permitió el extraordinario avance que, durante los siglos posteriores, registraron las matemáticas y la física.

A partir de la derivada es posible también estudiar el **crecimiento** (y decrecimiento) de las funciones, sus **puntos máximos y mínimos y su curvatura**.

Isaac Newton
(1643–1727)

Gottfried Wilhelm von Leibniz
(1646-1716)

Isaac Newton
(1643–1727)

Matemático inglés autor de *Philosophiae naturalis principia mathematica*, más conocidos como *los Principia*.

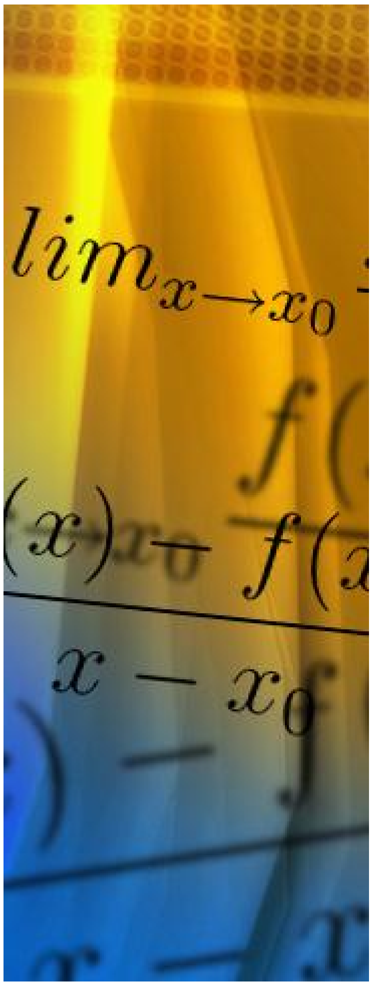
Entre sus otros descubrimientos científicos destacan los trabajos sobre el desarrollo del cálculo matemático.

Gottfried Wilhelm von Leibniz
(1646-1716)

Matemático alemán.

Fue uno de los grandes pensadores de los siglos XVII y XVIII, y se le conoce como 'El último genio universal'.

Descubrió el cálculo infinitesimal y el sistema binario.



La derivada como un límite

Cuando tratamos de determinar lo que ha cambiado una función desde el punto *x=a* hasta el punto *x=b* podemos calcular la diferencia *f(b)-f(a)*, sin embargo, este cálculo no nos da demasiada información si no lo relacionamos con los puntos *a* y *b*.

Por ejemplo, un cambio de *3* unidades desde el punto 2 al 10 no es lo mismo que si hubiera ocurrido entre los puntos 2 y 3. ¿Quién ha cambiado más rápidamente?

El cambio es más rápido si se produce entre los puntos 2 y 3, que si se produce entre los puntos 2 y 10.

Por ello, es necesario calcular el cambio relativo.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Si ahora, en lugar de querer conocer el cambio producido entre dos puntos quisiésemos saber el cambio instantáneo en un punto, tendríamos que recurrir al concepto de límite, así podríamos calcular:

$$lim_{a \to b} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

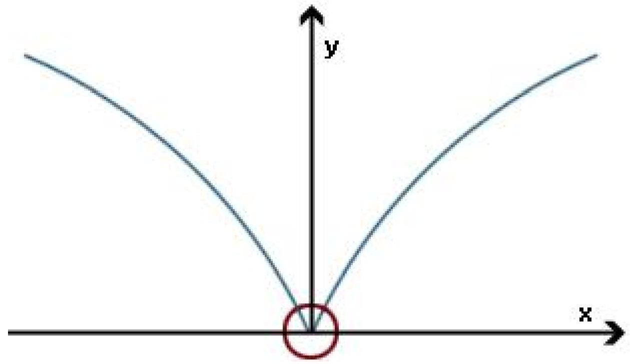
Diremos que una función es derivable en el punto x_0 si existe el límite:

$$lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Derivada y continuidad. Funciones no derivables

Acabamos de definir la derivada de una función en un punto como un límite, sin embargo, este límite puede no existir, ya que **no todas las funciones son derivables en todos los puntos**.

Un ejemplo de funciones no derivables son las funciones que presentan discontinuidades y las que presentan **"picos"**.



La gráfica anterior corresponde a una función que no es derivable en el punto *x=0*; en dicho punto la función tiene un "pico". Este tipo de picos aparecen también en las **funciones con valor absoluto**.

La continuidad y la derivabilidad también están relacionadas. Una función **discontinua en un punto no es derivable en dicho punto**.

La relación entre derivabilidad y continuidad viene dada mediante el siguiente **teorema**:

Toda función derivable es continua

Función derivada. Reglas para derivar

Si una función es derivable podemos calcular la derivada de una función en cualquier punto, esto implica calcular el límite de la definición para cualquier valor de *x*. Este cálculo se puede realizar de forma sencilla si aplicamos las reglas de derivación.

Comenzaremos por las **reglas de las funciones más simples**, donde *k* es una **constante**.

1. $f(x) = k \longrightarrow f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
3. $f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x$
4. $f(x) = \ln x \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

Ejemplo Derivar las siguientes funciones

Derivar las siguientes funciones:

$f(x) = 5$

Como se trata de una constante, aplicando la regla 1 obtenemos que $f'(x) = 0$.

$f(x) = x^3$

Por la regla 2, obtenemos que $f'(x) = 3x^2$.

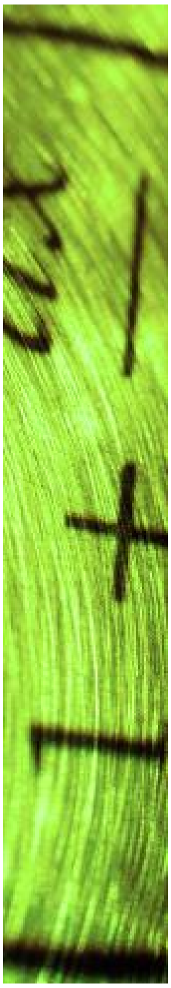
$f(x) = e^x$

Por la regla 3, obtenemos que $f'(x) = e^x$.

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

Por la regla 2, y teniendo en cuenta que la raíz es una potencia, podemos escribir

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, por lo tanto $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$.



Operaciones con derivadas de funciones

Para obtener la función derivada es importante conocer también cómo es la derivada de las distintas operaciones entre funciones. Así tenemos que si f y g son dos funciones derivables:

1. $(kf)'(x) = kf'(x)$ donde k es una constante.
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
3. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
4. $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Observemos que aunque **la derivada de la suma y resta de funciones es la suma (o resta) de sus derivadas**, no ocurre lo mismo con el producto ni con la división.

Ejemplos. Derivar las siguientes funciones:

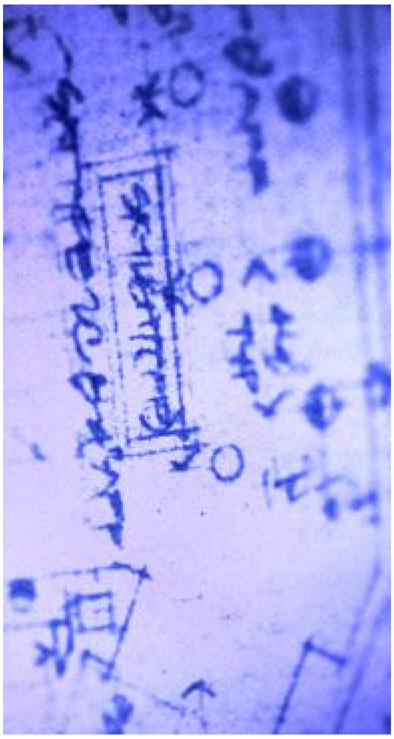
1. $f(x) = x^4 + 3x^2 - x + 5 - \frac{3}{x^2}$
   $f'(x) = (x^4)' + 3(x^2)' - x' + 5' - 3(x^{-2})' = 4x^3 + 6x - 1 + 0 + 6x^{-3} = 4x^3 + 6x - 1 + \frac{6}{x^3}$

2. $f(x) = \frac{1}{2-x}$ $f(x) = \frac{0\cdot(2-x)-1(-1)}{(2-x)^2} = \frac{1}{(2-x)^2}$

5. $f(x) = x^2 e^x \qquad f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x(2x + x^2)$

Regla de la cadena: derivada de la composición de funciones

Hemos visto la manera de derivar operaciones de funciones como la suma, resta, división o multiplicación. Veamos ahora cómo derivar funciones compuestas, o lo que es lo mismo, la derivada de la composición de funciones. Esta regla se denomina la regla de la cadena y se define como: sean *f* y *g* dos funciones derivables, de modo que *g* es derivable en el punto *a* y *f* es derivable en *g(a)* entonces la composición de *f* y *g* es derivable en *a* y se verifica que:



$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)).g'(a)$$

Si aplicamos esta regla a las formulas anteriores obtenemos que:

1. $f(x) = (g(x))^n \rightarrow f'(x) = n(g(x))^{n-1}g'(x)$
2. $f(x) = e^{g(x)} \rightarrow f'(x) = e^{g(x)}g'(x)$
3. $f(x) = \ln g(x) \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

Ejemplos. Derivar las siguientes funciones:

1. $f(x) = (x^2 + x - 3)^5 \qquad f'(x) = 5(x^2 + x - 3)^4(2x + 1)$

4. $f(x)=\sqrt{x^3-x+2}$ Teniendo en cuenta que $f(x)=(x^3-x+2)^{1/2}$

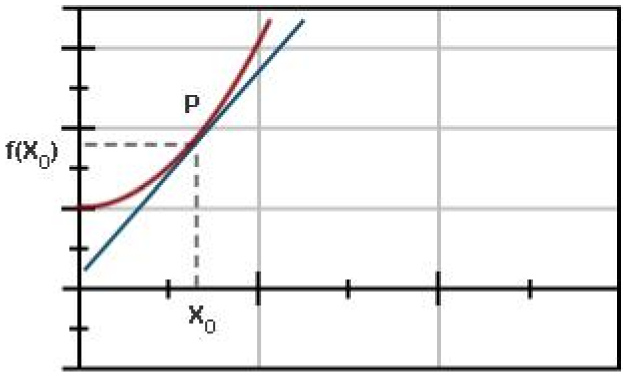
$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^3-x+2)^{-1/2}(3x^2-1)=\frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x+2}}$$

Interpretación geométrica de la derivada

La derivada resuelve el problema de cómo calcular la **recta tangente a una función en un punto**.

Decimos que una recta es tangente a una función en un punto si únicamente toca a la función en dicho punto.

Para calcular la ecuación de una recta necesitamos, por ejemplo, un punto *(x_0,y_0)* y su pendiente *(m)*, de forma que la ecuación es $y-y_0=m(x-x_0)$.



¿Cómo calculamos la ecuación de la recta tangente a una función *f* en el punto *P*?

La derivada de una función en un punto es, geométricamente, la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto. De forma que una función es derivable en un punto si podemos calcular su recta tangente en dicho punto. Así, si movemos la recta tangente a la gráfica sobre ella podemos observar cómo se producen sus cambios.

Ecuación de la recta tangente a la curva en un punto

Calcular la recta tangente a la función $f(x)=x^2-x+5$ en el punto $x_0=3$

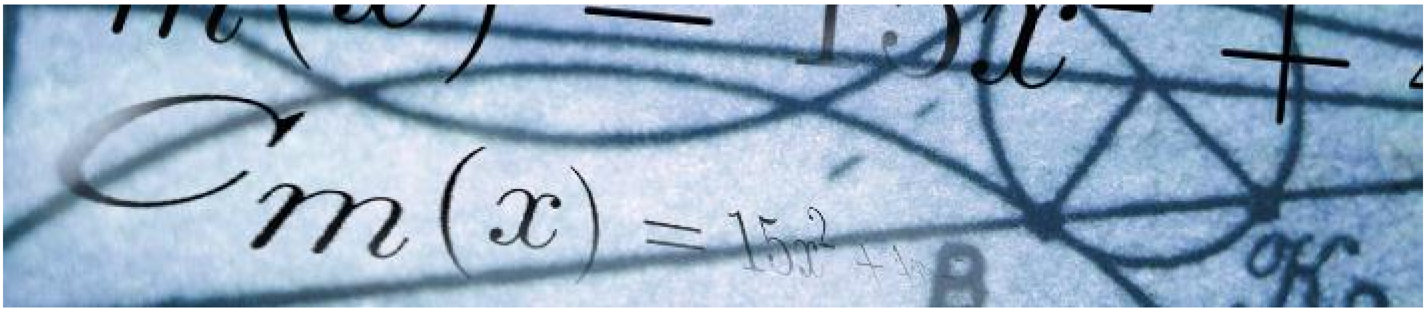
Solución:

Calculamos la pendiente de la recta tangente a la función en un punto derivando la función $f'(x)=2x-1$ en el punto 3, tenemos $f'(3)=5$.

Como $f(3)=3^2-3+5=11$, sustituyendo en la ecuación tenemos $y-11=5(x-3)$ o lo que es lo mismo $y=5x-4$.

Interpretación económica: la función marginal

Un concepto importante en la teoría microeconómica es el de **función marginal**.
Por ejemplo, hablamos del **coste marginal** como la variación en el coste total, ante el aumento de una unidad en la cantidad producida, es decir, es el coste de producir una unidad adicional. O del **ingreso marginal** como el cambio en el ingreso total que se produce cuando la cantidad vendida se incrementa una unidad, es decir, al incremento del ingreso total que supone la venta adicional de una unidad de un determinado bien.
Conocer estas funciones marginales, ayudará a las empresas a determinar a qué precio puede y tiene que vender sus productos y en función de ello decidirá qué cantidad les conviene producir. Teniendo en cuenta que las empresas quieren maximizar sus beneficios, **no producirán ninguna unidad cuyo coste marginal sea superior al precio**.



Desde un punto de vista matemático, las funciones marginales se calculan a partir de la función derivada, de modo que el coste marginal es la derivada de la función coste respecto de la cantidad producida y el ingreso marginal es la derivada del ingreso respecto de la cantidad.

Ejemplo

Coste marginal e ingreso marginal

Coste marginal e ingreso marginal

En una empresa el coste total de producir x unidades viene dado por la función $C(x)= 3x^3 +2x^2 +x-2$ y el

Ejemplo

El coste marginal

El coste marginal

Dada la función de coste *C(x)= 5x³ +2x² -7x-1*, calcular el coste marginal de producir 6 unidades.

Para calcular la función de coste marginal, derivamos la función de coste $C_m(x) = 15x^2+4x-7$, si producimos 6 unidades, el coste marginal será $C_m(6) = 557$.

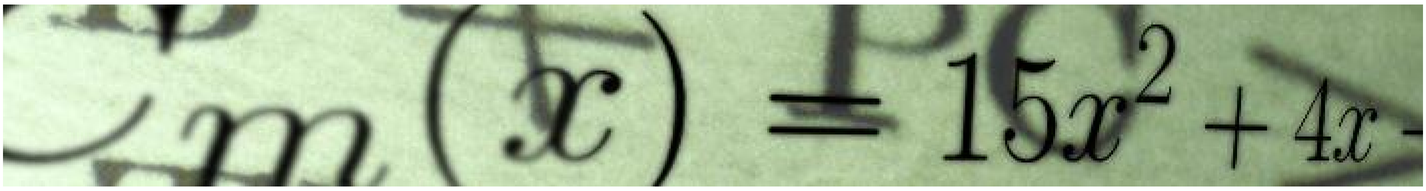
Derivadas sucesivas

En este tema hemos definido el concepto de derivada de una función. Si la función que obtenemos (función derivada) es también derivable, podemos derivarla obteniendo, de nuevo, una función que llamaremos **derivada segunda** y que denotaremos por $f''(x)$ y así, sucesivamente, obtendremos $f'''(x)$, $f^{iv}(x)$,...

Si la primera derivada nos indica cómo cambia la función *f*, la segunda derivada nos indicará la variación de la primera. De esta forma cuando decimos que "el número de parados ha aumentado con un ritmo más lento", o bien, que "se ha producido una desaceleración en el aumento del paro", estamos utilizando la segunda derivada: la **primera derivada** nos indica un **crecimiento** del paro y la **segunda derivada** nos habla de un **aumento** cada vez menor.

En física, cuando se mide el cambio en el espacio recorrido por unidad de tiempo hablamos de la velocidad (primera derivada), y si medimos el cambio de la velocidad, hablamos de **aceleración** (segunda derivada).

> Las derivadas sucesivas nos ayudarán a estudiar los máximos y mínimos de las funciones, su curvatura o sus puntos de inflexión.



Ejemplo

Sea $f(x)=3x^4+x^2-x+11$ calcular las cuatro primeras derivadas.

Las derivadas serán:

Resumen

La derivada de una función nos indica la razón de cambio. De modo que podemos estudiar cómo cambia la función a través de la derivada.

La derivada de una función en un punto se define a partir del límite:

$$fx(x) = lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para calcular la función derivada, utilizamos las reglas de derivar y sus operaciones.

Podemos interpretar el valor de la derivada según distintos campos. Así, desde un punto de vista geométrico, la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.

Desde un punto de vista económico, la derivada es la función marginal. Por ejemplo, la producción marginal se define como la variación de la producción cuando aumentamos en una unidad la materia prima utilizada.