Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

CONTINUIDAD Y DERIVADA

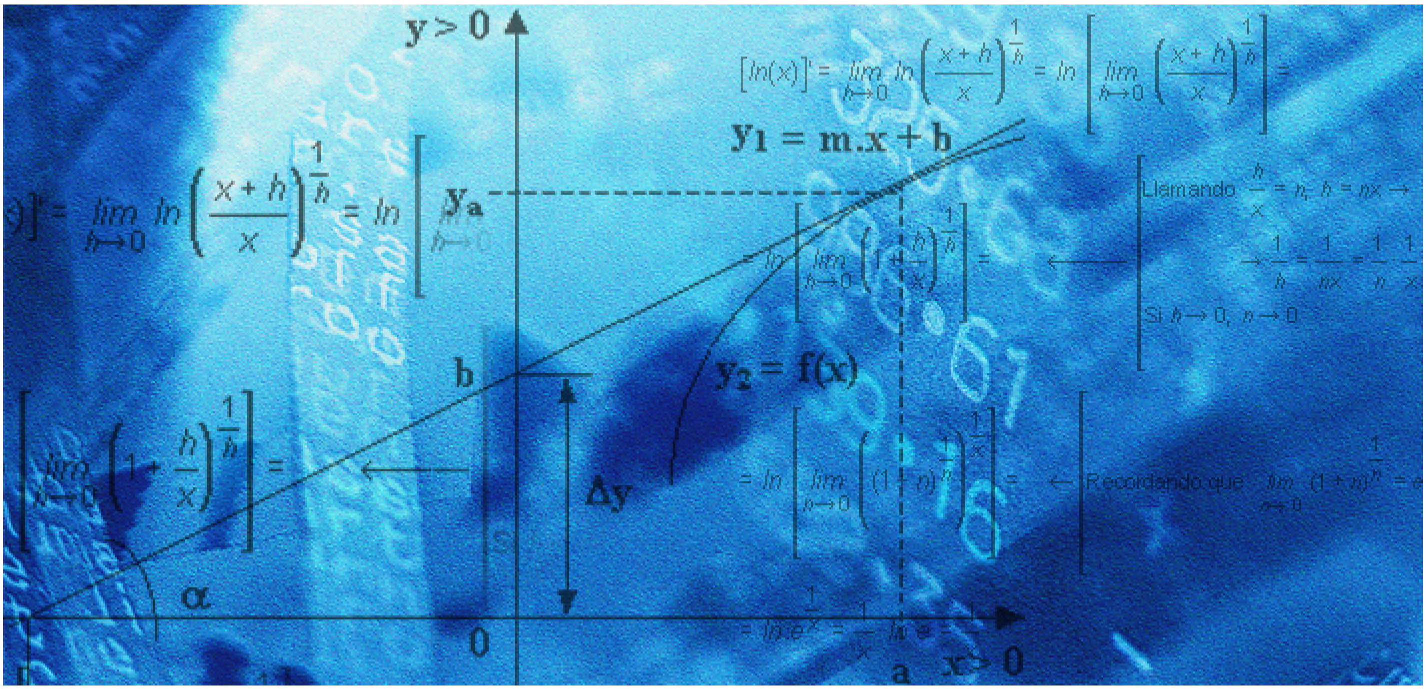
APLICACIONES DE LA DERIVADA I

Índice

Presentación

En este tema estudiaremos algunas de las aplicaciones de la derivada.

En primer lugar veremos un teorema que utiliza la función derivada para la resolución de indeterminaciones en los límites de funciones: el Teorema de L'Hôpital.



En segundo lugar estudiaremos el crecimiento de una función a partir del signo de la primera derivada.

Esta aplicación la desarrollaremos más ampliamente posteriormente, completando el estudio local de funciones mediante el uso de las sucesivas funciones derivadas, estudiando los máximos y los mínimos de una función y su curvatura.

Regla de L`Hôpital

La primera aplicación de la función derivada es la llamada **Regla de L´Hôpital** en honor al matemático Guillaume François, marqués de L´Hôpital.

Sean *f* y *g* dos funciones derivables tales que

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$$

o bien

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \infty$$

Y además *g'(x)≠0*. Entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

O en otras palabras, en los límites con indeterminaciones del tipo *0/0* o ∞/∞, es posible resolver la indeterminación mediante el cociente de las derivadas de las funciones.

Observaciones:

- Esta regla se puede aplicar tantas veces como sea necesario hasta resolver la indeterminación.
- Para la resolución de otro tipo de indeterminaciones, es necesario primero operar convenientemente hasta lograr una indeterminación del tipo *0/0* o ∞/∞.
- Observa que para resolver el límite derivamos las funciones del numerador y del denominador por separado, NO se trata de resolver la derivada de un cociente de funciones.

Ejemplo Ejemplo

Ejemplo de la regla de L´Hôpital

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x \to 1} 2x^2 = 2$$

Un poco de historia

La **regla de L'Hôpital** fue publicada en 1696 por el marqués de L'Hôpital en el primer libro conocido de cálculo diferencial llamado *l'Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes*.

A **Guillaume François Antoine, marqués de L`Hôpital**, siempre le interesaron las matemáticas y en particular el nuevo cálculo diferencial desarrollado por Leibniz. Sin embargo, estos avances matemáticos que se estaban sucediendo eran demasiado complejos y L'Hôpital necesitaba un apoyo para dominar esta nueva técnica, con el objetivo de profundizar en el cálculo infinitesimal, L'Hôpital solicitó la ayuda de un tutor: Johan Bernoulli.

Guillaume François Antoine,
Marqués de L'Hôpital (1661 – 1704)

Johann Bernoulli (1667 - 1748)

Johan Bernoulli perteneció a una de las familias más influyentes en el desarrollo de las matemáticas y la física de todos los tiempos. Johan que se doctoró en medicina, tenía, al igual que su hermano Jakob, una extraordinaria habilidad para las matemáticas y pronto dominó el cálculo diferencial desarrollado por Leibniz (y Newton). Conoció al marqués de L'Hôpital en París y llegaron a un trato: el marqués le pagaría un sueldo a cambio de que le explicase algunos temas matemáticos y le comunicase sus descubrimientos por escrito, no pudiéndoselos contar a nadie más.

En el libro, el marqués reconoce haberse “servido libremente de los descubrimientos de Bernoulli”. Bernoulli, una vez muerto el marqués, se atribuyó la autoría de la regla. Según la historia deberíamos referirnos a la regla como la regla de Bernoulli o de Bernoulli-L’Hôpital.

Ejemplos

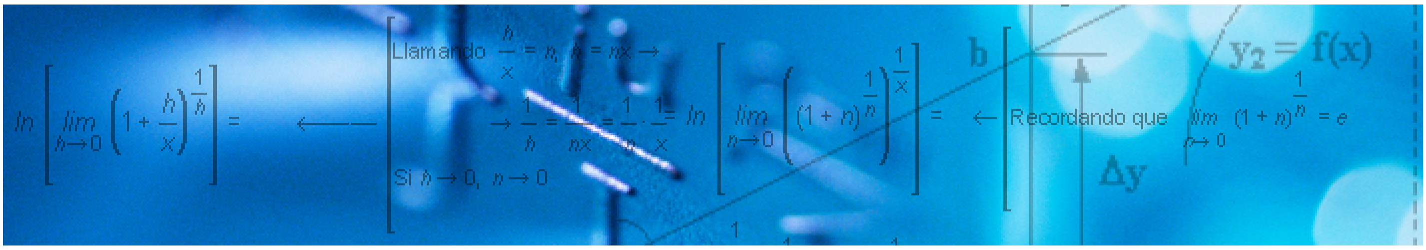
Calcula, utilizando la regla de L`Hôpital, los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^3-x^2+x-1} = \left\{\frac{0}{0}\right\}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^3-x^2+x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{3x^2-2x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x} = \left\{\frac{0}{0}\right\}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1/x} = 1$$



Crecimiento de una función

Para estudiar el comportamiento de las funciones utilizamos la función derivada. Veremos de qué manera afecta la derivada a la forma de la gráfica en cuanto a su **crecimiento**.

Decimos que una función es **creciente** en un intervalo [a,b] si para cualquier valor $x_1 < x_2$ tenemos que $f(x_1) < f(x_2)$.

Una función es creciente si valores grandes de *x* están relacionados con valores grandes de *y*. Si miramos la gráfica de una función, será creciente si a medida que *x* toma valores cada vez más grandes, la gráfica de **la función sube**.

De manera análoga, decimos que una función es **decreciente** en un [a,b] si para cualquier valor $x_1 < x_2$ tenemos que $f(x_1) > f(x_2)$.

En este caso, valores grandes de *x* se relacionan con valores pequeños de *y*. Al observar la gráfica de una función decreciente vemos que a medida que *x* toma valores cada vez más grandes, **la función baja**.

La derivada de una función nos permite conocer en que intervalos la función crece o decrece. Recordemos que hemos definido la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto, por lo que el signo de la pendiente nos dirá si la función crece o decrece.

Criterio para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada

Una función $f(x)$ derivable en un intervalo es:

- Creciente si $f'(x)>0$ en todo el intervalo.
- Decreciente si $f'(x)<0$ en todo el intervalo.
- Constante si $f'(x)=0$ en todo el intervalo.

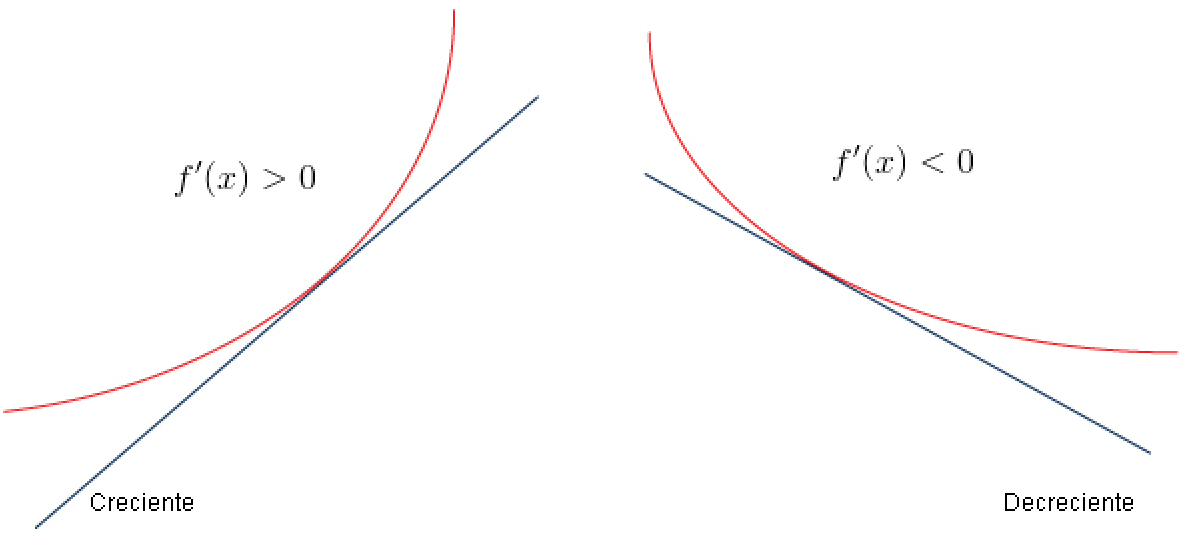
Por lo tanto, una función será **creciente** si la pendiente de la recta tangente es **positiva**, y **decreciente** si es **negativa**.En el caso de que la derivada en todo el intervalo sea 0, la pendiente es 0 y la recta tangente es **horizontal**, lo que significa que la función es **constante**

Cómo determinar los intervalos de crecimiento

Para estudiar cómo cambia del crecimiento de una función debemos determinar los intervalos de crecimiento, es decir, aquellos intervalos en los que la función es **creciente** o **decreciente**.

Para obtener los **intervalos de crecimiento** debemos seguir los siguientes pasos:

- Calcular el dominio de la función identificando las discontinuidades.
- Calcular la primera derivada de la función.
- Igualar la derivada a cero, obteniendo los valores de *x* que anulan la primera derivada.
- Construir los intervalos con los puntos que anulan la derivada y los puntos fuera de dominio (en los que existe discontinuidad).
- Estudiar el signo de la derivada en dichos intervalos.



Ejemplo

Estudiar el crecimiento de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

Para determinar los intervalos de crecimiento, seguiremos los pasos indicados:

- Dominio de la función: *Dom f=R-{2,-2}*
- Derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2}$$

- Igualamos la derivada a cero:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \qquad f'(x) = -2x = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 0$$

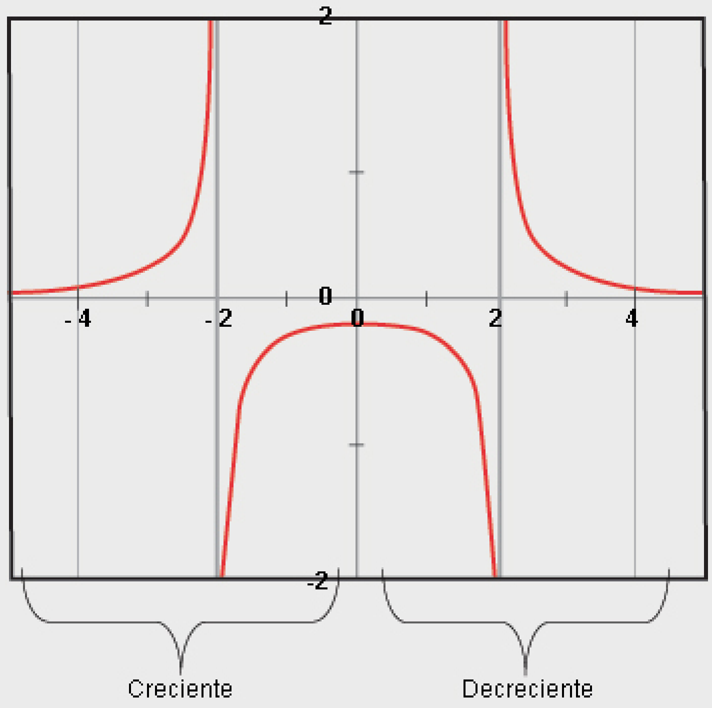
- Construimos los intervalos con los puntos fuera de dominio (el *2* y el *-2*) y con los puntos que anulan la primera derivada (el *0*):

  (-∞,-2), (-2,0), (0,2), (2,∞)
- Estudiamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos, para ello tomamos un punto cualquiera del intervalo y sustituimos en la función derivada para ver su signo:
- En *(-∞,-2)*: Probamos con el *-3*: *f ' (-3)=6/25>0* → **Creciente**
- En *(-2,0)*: Probamos con el *-1*: *f ' (-1)=2/9>0* → **Creciente**
- En *(0,2)*: Probamos con el *1*: *f ' (1)=-2/9<0* → **Decreciente**
- En *(2,∞)*: Probamos con el *3*: *f ' (3)=-6/25<0* → **Decreciente**

Gráfico

Gráfica de la función y su crecimiento

Gráfica de la función y su crecimiento



Crecimiento de las funciones económicas

Veamos qué crecimiento tienen algunas de las funciones económicas más importantes: las **curvas de oferta** y **demanda**.

Curva de Oferta

La curva de oferta representa la relación que existe entre los precios y las cantidades ofrecidas.

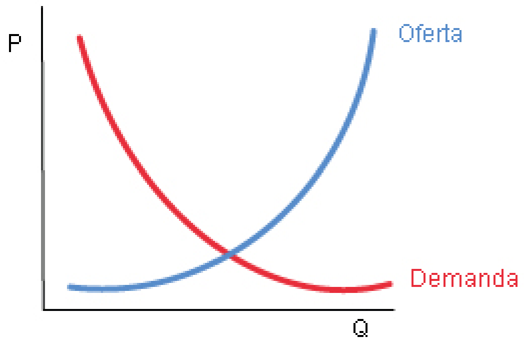
Cuando los precios son altos, se produce mucho por lo que las cantidades ofrecidas son altas mientras que si los precios disminuyen, la cantidad ofrecida disminuirá. Por lo tanto la función (o curva de oferta) es creciente y tiene pendiente positiva (su derivada es positiva).

Curva de Demanda

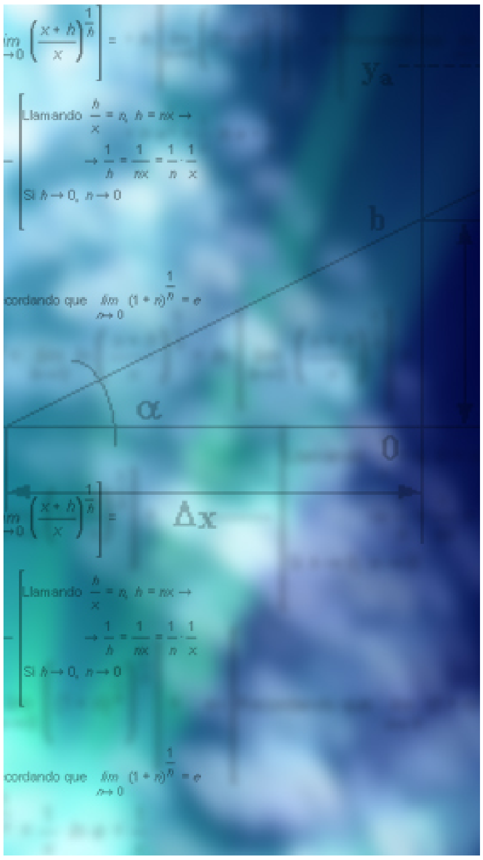
La curva de la demanda representa la relación entre la máxima cantidad de un determinado bien o servicios que un consumidor estaría dispuesto a pagar a cada precio de ese bien.

En un mercado ideal, los compradores (demandantes) quieren obtener la mayor cantidad de bienes al precio más bajo posible. Por lo tanto, cuanto mayor es el precio menor es la demanda: la función de demanda es decreciente y tiene pendiente negativa (la derivada es negativa).

Curvas de Oferta y Demanda



Ejemplos



Estudia el crecimiento de las siguientes funciones determinando los intervalos en los que la función es creciente o decreciente:

a) $$f(x) = \frac{5x}{x^2 - 4}$$

b) $$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$$

c) $$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

Soluciones

a) $$f(x) = \frac{5x}{x^2 - 4}$$

- $Dom\, f = R - \{2, -2\}.$
- $f\,'(x) = \dfrac{-5x^2 - 20}{(x^2 - 4)^2}$
- $f(x) = -5x^2 - 20 \neq 0 \longrightarrow$

No hay puntos (valores de *x*) que anulen la derivada, puesto que no existe ningún número real que al elevarlo al cuadrado obtengamos un valor negativo.

- Decreciente en $(-\infty, -2), (-2, 2), (2, \infty)$

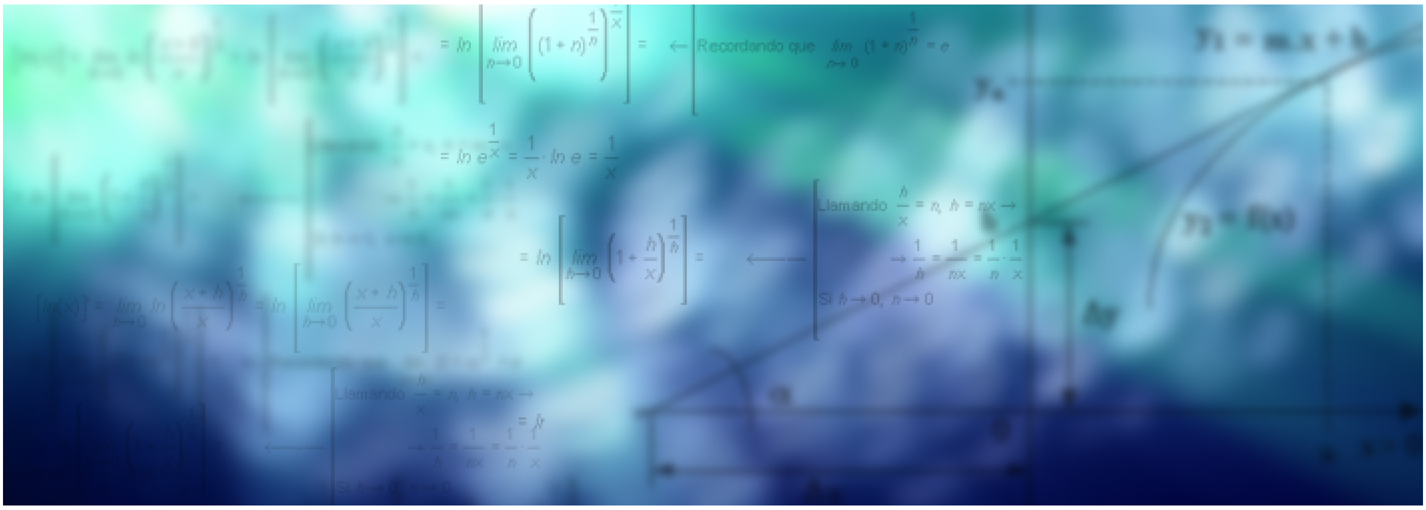
Ejemplos II

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

- $Dom\, f = R$
- $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
- $f\,'(x) = 0 \longrightarrow x = 0 \quad x = 2$
- Creciente en $(-\infty, 0), (2, \infty)$ y decreciente en $(0, 2)$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

- $Dom\, f = R$
- $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$
- $f\,'(x) = 0 \longrightarrow x = -1, \quad x = 3$
- Creciente en $(-\infty, -1), (3, \infty)$ y decreciente en $(-1, 3)$



Resumen

La derivada tiene múltiples aplicaciones. En este tema hemos visto dos de ellas: la regla de L'Hôpital y el estudio del crecimiento de una función.

La regla de L'Hôpital (o de Bernoulli) nos permite resolver indeterminaciones del tipo *0/0* o ∞/∞, mediante el cociente de las derivadas de las funciones.

La derivada de una función (y sus derivadas sucesivas) nos permiten estudiar el comportamiento de una función. En particular, el crecimiento de una función se puede determinar si observamos el signo de la derivada. De modo que, en un intervalo, si la derivada es positiva, la función es creciente y si es negativa, es decreciente.

Recuerda que la derivada de la función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto, por lo que dicha pendiente nos dirá si a función es creciente o decreciente en dicho punto.