Universidad Europea de Madrid
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

DERIVADA E INTEGRAL

OPTIMIZACIÓN. APLICACIONES A LA ECONOMÍA

Índice

Presentación

Uno de los principales problemas asociados a la derivada es el problema de la **optimización** de funciones. Si buscamos en el diccionario de la Real Academia Española el significado de *optimizar* descubrimos que es "buscar la mejor manera de realizar una actividad".

¿Cuál es el significado de optimización en el campo de las matemáticas?

En matemáticas, la optimización (también llamada programación matemática) comprende problemas en los que hay que buscar los extremos de una función. Buscar el óptimo, o el mayor provecho, unas veces pasa por encontrar el mínimo (como por ejemplo, minimizar el coste), y otro el máximo (como en el caso del beneficio o del ingreso).

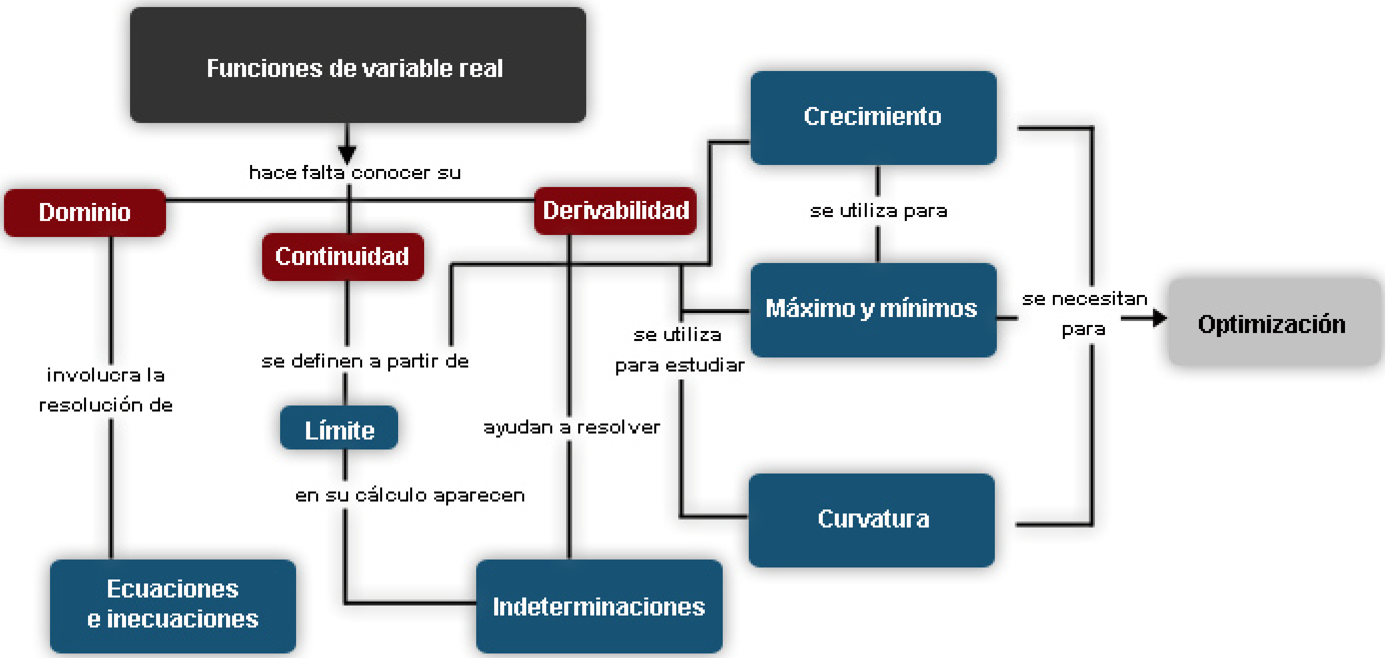
Los problemas de optimización de funciones se estudian como una de las aplicaciones del **cálculo diferencial**. Por lo tanto, utilizaremos la función derivada para llegar a su solución.

En general, este tipo de problemas tienen un enunciado que los contextualiza. Su dificultad radica en comprender el enunciado, plantear correctamente el problema y resolverlo adecuadamente interpretando el resultado.

Optimización de funciones de variable real

Los problemas de optimización están relacionados con el cálculo de máximos o mínimos de una función. Por ello, podemos decir que la optimización es una de las aplicaciones de la derivada.

El siguiente mapa conceptual relaciona los conceptos de las funciones de variable real hasta llegar a la optimización.



Problemas de optimización

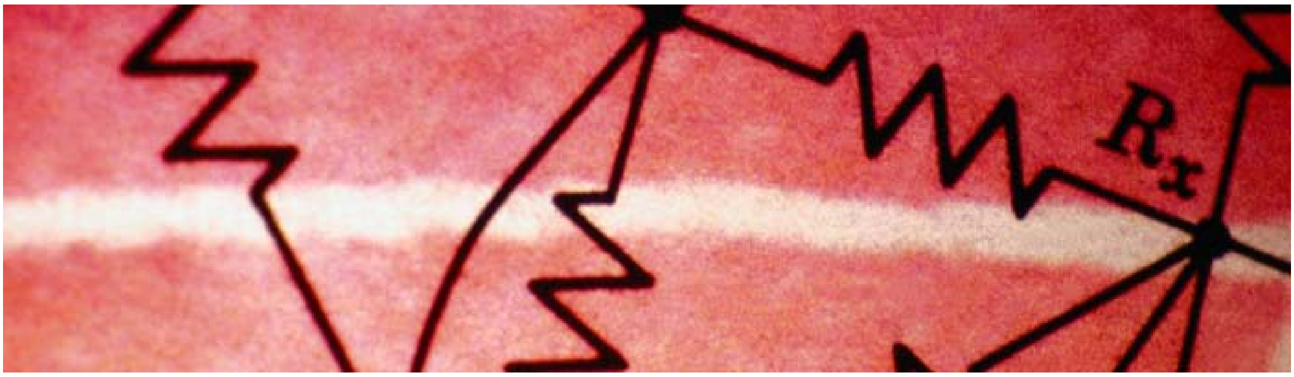
Los problemas de optimización, en general, quedan determinados cuando se especifica:

- **La función objetivo**. Es la función de la que se pretende obtener el máximo o el mínimo.
- **El conjunto de restricciones**. Se denomina conjunto de restricciones a los posibles valores de las variables o las relaciones en términos de igualdad o desigualdad entre ellas.

En función de cómo sea la función objetivo y las restricciones, se planteará un problema u otro de optimización: programación lineal o no lineal, programación estocástica, etc

En la práctica, el número de variables o las restricciones entre ellas podría ser ilimitado. Por ello es importante conocer algoritmos que permitan resolver este tipo de problemas. Algunos de estos algoritmos son, por ejemplo, el método del Simplex o el algoritmo de Kamarkan.

En nuestro caso, los problemas que vamos a plantear son más sencillos y requieren identificar la función objetivo y las restricciones, si las hay.



Ejemplos

Comenzaremos identificando en cada problema la función objetivo y las restricciones (si las hubiera). Se debe tener presente que la función objetivo es de la que se quiere obtener el máximo o el mínimo.

- Si disponemos de un listón de madera de 2 metros: ¿qué dimensiones tendrá que tener un marco de ventana de forma que su área sea máxima?
    - **Variables** *x, y*
    - **Función objetivo**: área del marco $A=xy$
    - **Restricciones**: $x>0$, $y>0$ (las dimensiones tienen que ser positivas) $2x+2y=2$ (el listón mide 2 metros, por lo tanto, el perímetro del cuadro es igual a 2)

- Si la función de demanda del mercado de una empresa viene dada por la ecuación $4p+q-16 = 0$, donde *p* es el precio y *q* la cantidad producida de un bien. ¿Qué cantidad debemos producir del bien para conseguir el máximo ingreso?
    - **Variables**: *p,q*
    - **Función objetivo**: Ingreso: $I(q)=p\cdot q$
    - **Restricciones**: Función de demanda: $q=16-4p$

Ejemplo [Producto máximo]

Ejemplo

Producto máximo

De todos los pares de números naturales cuya suma es 16, encontrar los que su producto es máximo.

Variables: *x, y*

Función objetivo: Producto $P=x\cdot y$

Restricciones: *x, y* son *N* , $x+y=16$

Optimización sin restricciones

Los problemas de optimización pueden tener o no restricciones. El caso más sencillo es aquel en el que no existen más restricciones que los valores de la variable, es decir, aquellos problemas que consisten en encontrar el máximo o el mínimo de una función cuando sus variables pueden tomar cualquier valor dentro de un intervalo.

En este caso, el problema se resuelve calculando el máximo (o el mínimo) a través de la función derivada y clasificando los puntos críticos obtenidos mediante alguno de los criterios existentes para ello (criterio del crecimiento o el criterio de la segunda derivada). Se comprendrá mejor solucionando los siguientes ejemplos:

- El dueño de un kiosco de bebidas sabe que sus beneficios vienen dados por la función –p2+10p-21, donde p es el precio (en euros) de cada lata de bebidas vendida. ¿Qué precio debe poner si quiere que sus beneficios sean máximos?

Ejemplo Beneficios máximos

Ejemplo

Beneficios máximos

Variables: *p*

Función objetivo: $B(p)= -p^2 +10p-21$

Restricciones: no hay

En este caso la función objetivo es el beneficio (pues es la función que queremos maximizar) $B(p)= -p^2+10p-21$

En primer lugar calculamos sus puntos críticos (candidatos a máximo y mínimo).

$B'(p)=-2p+10=0 \Rightarrow p=5$

Para clasificar el punto calculamos la segunda derivada: $B''(p)=-2$

Como $B''(5)=-2<0$ el punto ***p=5* es un máximo**.

Por lo tanto, **el precio al que se máximiza el beneficio es 5 euros**.

- La rentabilidad R dada en tanto por cien de una empresa depende de la cuota de mercado m del bien producido según la siguiente función R(m)=-0,05m2+3.6m – 35. ¿Qué cuota de mercado hace máxima la rentabilidad de la empresa?

Ejemplo Rentabilidad máxima

Ejemplo

Rentabilidad máxima

Función objetivo: $R(m) = -0{,}1m^2 + 4m - 35$

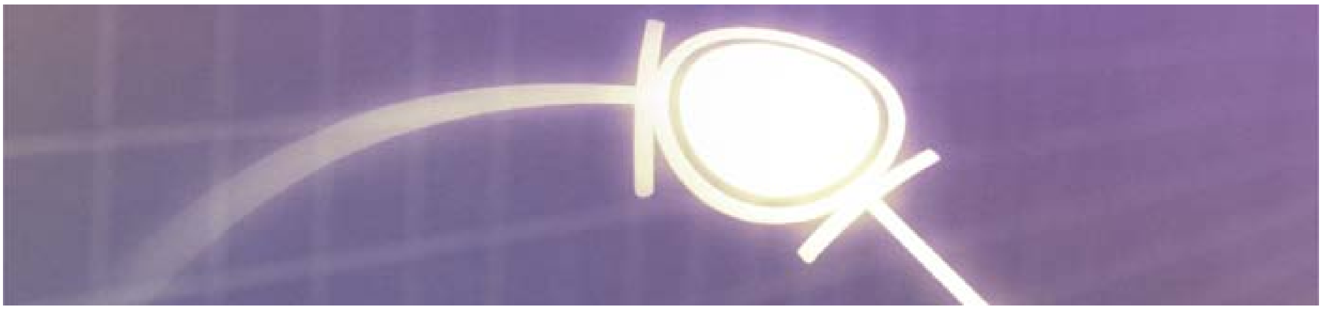
En primer lugar calculamos sus puntos críticos (candidatos a máximo y mínimo).

$R'(m)=-0.2m+4=0 \Rightarrow m=20$

Para clasificar el punto calculamos la segunda derivada: $R''(m)=-0.2$

Como $B''(20)=-0.2<0$ el punto ***m=20* es un máximo**.

Por lo tanto, **la cuota de mercado que hace máxima la rentabilidad es m=20**.



Aplicaciones económicas

Es frecuente encontrar problemas económicos relacionados con la optimización de funciones: maximización del beneficio o de los ingresos, minimización del coste, maximizar la utilidad, etc. Por ello es importante aprender las técnicas para resolver estos problemas. Repasemos este tipo de ejercicios resolviendo los siguientes ejemplos:

- La función de costes totales de una empresa que fabrica un solo producto es $C(x)=x^3-6x^2+13x+15$ y su función de ingresos $I(x) = 28x$, siendo x la cantidad fabricada. Calcular el mínimo coste marginal y el máximo beneficio que puede obtener la empresa.

Ejercicio Solución

Ejercicio

Solución

Mínimo coste marginal:

Función objetivo: $C_{marg}(x)=3x^2 -12x+13$

Calculamos los puntos críticos: $C'_{marg}(x) =6x-12=0 \Rightarrow x=2$

Clasificamos el punto crítico con la segunda derivada: $C''_{marg}(x)=6$

Por lo tanto, como $C''_{marg}(2)=6>0$, entonces $x=2$ es un mínimo.

El mínimo coste marginal será, por tanto, $C_{marg}(2)=3\cdot 2^2 -12\cdot 2+13=1$

Máximo beneficio

Función objetivo: $B(x)=I(x)-C(x)=28x-(x^3-6x^2+13x +15)=-x^3+6x^2+15x-15$

Calculamos los puntos críticos: $B'(x)=-3x^2+12x+15=0 \Rightarrow x=-1,x=5$

Clasificamos los puntos críticos con la segunda derivada: $B''(x)=-6x+12$

Por lo tanto, como $B''(-1)=18>0$, entonces $x=-1$ es un mínimo. Y como $B''(5)=-18<0$, entonces $x=5$ es un máximo.

El máximo beneficio será, por tanto, $B(5)= -5^3+6\cdot 5^2+15\cdot 5-15=85$.

Observa que el resultado $x=-1$ no tiene sentido económico, puesto que no es posible producir -1 elementos.

- Una empresa vende un producto con la siguiente función de demanda: $p = 256- 50x$, siendo x la cantidad producida y p el precio de venta. Los costes totales viene dados por la función $C(x) = 182+56x$. Obténgase el máximo beneficio de la empresa y el precio de venta del producto.

Ejercicio Solución

Ejercicio

Solución

Máximo beneficio:

Función objetivo: $B(x)=I(x)-C(x)=xp-C(x)=x(256-50x)-(182+56x)=-50x^2+200x-182$

Calculamos los puntos críticos: $B'(x)=-100x+200=0 \Rightarrow x=2$

Clasificamos los puntos críticos con la segunda derivada: $B''(x)=-100$

Por lo tanto, como $B''(2)=-100<0$, entonces $x=2$ es un máximo.

El máximo beneficio será, por tanto, $B(2)= -50\cdot 2^2+200\cdot 2-182=18$. Y el precio será $p=256-50\cdot 2=156$

- Una compañía estima que el coste por producir x artículos viene dado por la función $C(x)=0.001x^2+5x+2298$. Si la función de coste medio se define como el cociente entre la función de coste y el número de artículos producidos, ¿a qué nivel de producción obtendremos el mínimo coste medio?, y ¿cuál será ese coste medio mínimo?

Ejercicio Solución

Ejercicio

Solución

Mínimo coste medio:

Función objetivo: *Coste medio:* $C_{medio}(x)= 0.001x+5+2298/x$

Calculamoslos puntos críticos: $C'_{medio}(x)=0.001-2298/x^2=0$ $x=1516$

Clasificamos el punto crítico con la segunda derivada: $C''_{medio}(x)=4596/x^3$

Por lo tanto, como $C''_{medio}(1516)>0$, entonces $x=1516$ es un mínimo.

El mínimo coste marginal se minimiza si producimos 1516 unidades y éste coste será, por tanto, $C_{medio}(1516)=6.52$ euros por unidad.

En detalle Definiciones de funciones

En detalle

Definiciones de funciones

Para resolver los problemas de aplicaciones económicas recuerda algunas definiciones de las funciones más relevantes de este campo:

- Función ingreso. La función de ingreso relaciona el precio (función de demanda) y la cantidad de un bien $I(p,q)=p\bullet q$.

- Función demanda. La función de demanda para cualquier producto, es la función que nos da, en función del precio p, el número de unidades de producto que los consumidores están dispuestos a comprar.

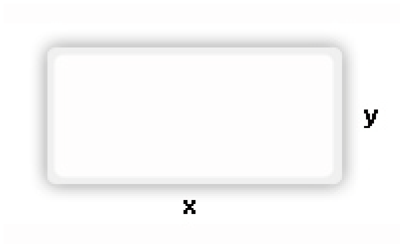
- Función beneficio. La función beneficio se define como la diferencia entre el ingreso y el coste $B(x)=I(x)-C(x)$.

- Funciones marginales. La función marginal (coste marginal, producción marginal, etc.) es la función derivada de la función original.

Optimización con restricciones de igualdad

Existen diversos métodos para resolver problemas de optimización con restricciones de igualdad. Uno de los más sencillos es el **método de sustitución** que consiste en sustituir la restricción en la función objetivo antes de calcular sus extremos. Veamos cómo se aplica está técnica resolviendo el siguiente ejemplo ya enunciado:

- Si disponemos de un listón de madera de 2 metros. ¿Qué dimensiones tendrá que tener un marco de ventana de forma que su área sea máxima?



  - **Variables** x, y
  - **Función objetivo**: área del marco $A=xy$
  - **Restricciones**:

    $x>0, y>0$ (las dimensiones tienen que ser positivas)

    $2x+2y=2$ (el listón mide 2 metros, por lo tanto, el perímetro del cuadro es igual a 2)

En este ejemplo la función a maximizar (el área) depende de dos variables. Se puede despejar una de ellas de la restricción $(2x+2y=2)$ y sustituir en la función objetivo.

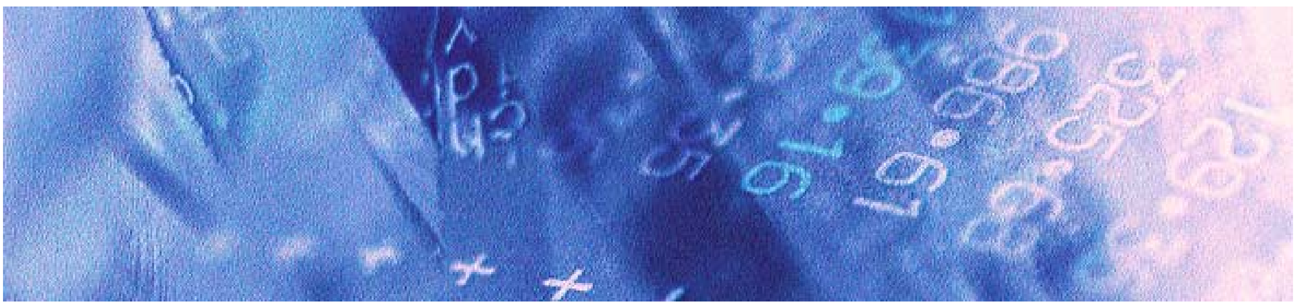
$2x+2y=2 \rightarrow y=1-x$

$A=x \bullet y=x \bullet (1-x)=x-x^2$

Ahora, para maximizar el área seguimos los mismos pasos:

Se calculan los puntos críticos: $A'(x)=1-2x=0 \rightarrow x=1/2$. Lo clasificamos a partir de la segunda derivada: $A''(x)=-2$, como $A''(1/2)=-2<0$, el punto es un máximo.

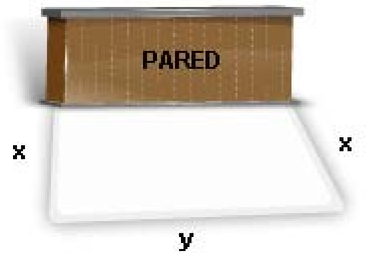
El área máxima se obtiene de construir un marco que tenga $x=1/2$ e $y=1-x=1-1/2=1/2$, es decir, si construimos un cuadrado de lado $1/2$.



Ejemplos

Resolver los siguientes ejercicios. Es importante determinar bien la función objetivo (de la que se quiere calcular su mínimo o su máximo) y las restricciones. Se debe leer el enunciado e identificar las variables, hacer un dibujo de lo que se pide y utilizar símbolos matemáticos para nombrar las cantidades desconocidas y sus relaciones.

- Se quiere vallar un terreno rectangular aprovechando una pared existente, de manera que encierre una superficie de 1.600 m^2. ¿Qué dimensiones tendrá que tener la valla para que su longitud sea mínima y así conseguir la valla que resulte más barata?



Ejercicio Solución

Ejercicio

Solución

Variables: *x,y*

Función objetivo *P=2x+y*

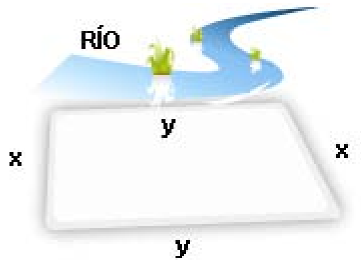
Restricción: *A=xy= 1600*

Si *y=1600/x*, la función a minimizar es *P(x)=2x+1600/x*

Los puntos críticos son: $P'(x)=2-1600/x^2=0 \Rightarrow x=28.3,\ x=-28.3$

Para clasificar, se calcula la segunda derivada: $P''(x)=3200/x^3$. Como $P''(28.3)>0$, es un mínimo. Las dimensiones son *x=28.3* e *y=56.6*

- Se quiere cercar un campo rectangular que está junto a un río. Si la valla del lado que está junto al río cuesta 40 €/m y para los otros lados 20 €/m. Hallar el área del mayor campo que puede cercarse con 14.400 €.



Ejercicio Solución

Ejercicio

Solución

Variables: x,y

Función objetivo: $A=xy$

Restricción: Presupuesto $14400=40\bullet 2\bullet y+20\bullet 2\bullet x$

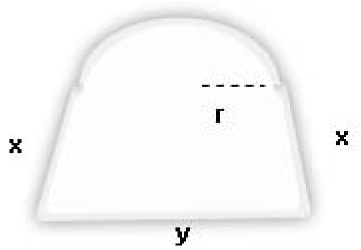
Si $y=180-x/2$, tenemos que la función a minimizar es $A(x)=180x-x^2/2$

Los puntos críticos son: $A'(x)=180-2x=0 \Rightarrow x=90$

Para clasificar calculamos la segunda derivada: $A''(x)=-2$. Como $A''(90)<0$, es un máximo.

Las dimensiones son, entonces $x=90$ e $y=135$

- Una ventana rectangular rematada por un arco de medio punto (un semicírculo), tiene un perímetro de 10 metros. ¿Qué dimensiones debe tener la ventana para que su superficie sea la mayor posible?



Ejercicio Solución

Ejercicio

Solución

Variables: x,y. Radio $r=y/2$

Función objetivo: $Area=A_{rectángulo}+A_{semicírculo}$ donde $A_{rectángulo}=x\cdot y$, $A_{semicírculo}=(\pi(y/2)^2)/2$ por lo que área total es $A=xy+\pi y2/8$

Restricción: Perímetro: $10=P_{rectángulo}+P_{semicírculo}$ donde $P_{rectángulo}=2x+y$, $P_{semicírculo}=\pi y/2$

Con todo ello, $x=5-y/2-\pi y/4$, que al sustituir en la función objetivo, $A=y(5-y/2-\pi y/4)$, se deriva y se iguala a cero para obtener los puntos críticos, $A'(y)=5-y-\pi y/2=5\ y(1+\pi/2)=0 \Rightarrow y=5/(1+\pi/2)=1.95$

Como **$A''(1.95)=-1-\pi/2<0$ el punto es un máximo.** Sustituyendo, se obtiene que el valor de x es 2.49

Otros ejemplos económicos

Los problemas económicos en los que hay que minimizar o maximizar una función sujeta a restricciones son muy habituales. Estos son algunos casos en los que es necesario optimizar una función con restricciones de igualdad.

- Una empresa fabrica dos productos cuyos precios en el mercado son 30 y 50 euros respectivamente. Suponiendo que la función de costes totales sea $C(x,y)=x^2/2-2x+y^2-2y+xy$ donde x e y son las unidades producidas de cada producto. Hallar las cantidades que hay que producir para maximizar el beneficio si se fabrica un total de 50 unidades.

Ejemplo Solución

Ejercicio

Solución

Variables x,y (unidades producidas de los productos 1 y 2 respectivamente)

Función objetivo: Beneficio $B(x,y)=I(x,y)-C(x,y)$, donde $I(x,y)=30x+50y$

$B(x,y)=30x+50y-(x^2/2-2x+y^2-2y+xy)=30x+50y-x^2/2+2x-y^2+2y-xy$

Restricción: $x+y=50 \Rightarrow y=50-x$

Sustituyendo: $B(x)=32x+52(50-x)-x^2/2-(50-x)^2-x(50-x)$. Se deriva para buscar los puntos críticos obteniendo la función simplificada $B'(x)=30-x=0 \Rightarrow x=30$

Clasificamos el punto mediante la segunda derivada. Como $B''(x)=-1<0$, **el punto es un máximo. Al sustituir en la restricción se obtiene que** $y=20$

- Un comerciante quiere comprar dos tipos de productos por un valor total de 2.000 €. Le ofrecen cada producto a un precio de salida de fábrica de 4 y 8 euros respectivamente. Además de este gasto, ha calculado que tendrá que costear el trasporte de los productos cuyo valor es $C(x,y)=(x^2-5xy+y^2)/40$. Si vende cada producto a 15 y 24 euros respectivamente, ¿cuántos productos de cada tipo tiene que comprar para maximizar sus beneficios?

Ejemplo Solución

Ejercicio

Solución

Variables: x,y (unidades compradas de cada producto)

Función objetivo: Beneficio $B(x,y)=I(x,y)-C(x,y)$, donde $I(x,y)=15x+24y$ *y la* $C(x,y)=(x^2-5xy+y^2)/40$

Restricción: presupuesto $4x+8y=2000$ $y=250-x/2$

Por lo tanto, la función beneficio será: $B(x,y)= 15x+24y -(x^2-5xy+y^2)/40$

Sustituyendo la restricción en dicha función, derivando e igualando a cero, se obtiene un único punto crítico: $B'(x)=40.5-15x/80=0$ $x=216$

Para comprobar que es un máximo se deriva de nuevo y se sustituye el valor obtenido en la segunda derivada

$B''(x)=-15/80; B''(216)=-15/80<0$.

Es un máximo.

Sustituyendo en la restricción se obtiene el valor de y: $y=250-216/2=142$

Por lo tanto, **tendrá que comprar 216 producto del primer tipo y 142 del segundo.**

Resumen

En numerosas ocasiones nos encontramos con problemas en los que hay que buscar la mejor solución de las posibles: a este procedimiento se le denomina optimización. Aunque estos ejercicios los realizamos de manera cotidiana cuando elegimos la mejor opción entre varias disponibles, en ocasiones es necesario plantear el problema en términos matemáticos antes de buscar una solución.

Una vez planteado el problema, necesitamos disponer de técnicas que nos permitan saber si este tiene solución o no, y en caso de tenerla, cómo localizarla.

- Los problemas de optimización se reducen a calcular el máximo o el mínimo de una función (función objetivo), sujeto a una o varias restricciones sobre las variables.
- En el caso de no existir restricciones, para calcular el máximo o el mínimo de una función buscamos sus puntos críticos igualando la primera derivada a cero, y clasificamos estos puntos utilizando alguno de los criterios aprendidos para ello (criterio del crecimiento o segunda derivada).
- En el caso de existir una restricción de igualdad, resolveremos el ejercicio despejando una de las variables en función de la otra y sustituyéndola en la función objetivo. Entonces procederemos del mismo modo que en el caso de no existir restricciones.