Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

PRIMEROS CONCEPTOS

Índice

Presentación

En este tema generalizaremos el concepto de "función de una variable" al de "varias variables".

En la mayoría de los campos es necesario establecer las **relaciones de dependencia que existen entre variables**. Si esta relación es funcional, se puede representar mediante funciones. En particular en el campo de la Economía nos encontramos con numerosos ejemplos de funciones de variables, ya que, en general la producción, el beneficio, la función de coste, etc., dependen de más de una magnitud.

Definiremos la **función de varias variables** como una generalización de las funciones de una variable. Por lo tanto también será necesario definir el concepto de **dominio de la función** y su **imagen**.

Veremos algunos ejemplos de funciones de varias variables y cómo calcular la imagen de diferentes puntos. De forma análoga, podemos dibujar las gráficas de las funciones de dos variables. En este caso, como veremos, se tratará de superficies en tres dimensiones, por lo que no será siempre fácil llegar a tal representación. Las **curvas de nivel** serán de gran ayuda para describir las funciones más complejas.

Funciones de varias variables

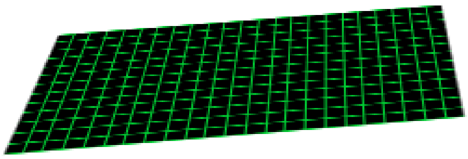
La importancia de la utilización de las funciones en Economía (como en muchas otras disciplinas) radica en que gracias a ellas podemos **describir cualquier variación o cambio de una cantidad**. En la mayoría de los casos nos encontraremos con funciones que dependen de varias magnitudes.

Podemos definir la función de varias variables como una regla para obtener un nuevo número (real) a partir de los valores de varias variables *x, y, z, t,…* y que denotaremos por *f(x,y,z,t…)*.

Por simplicidad, en la mayoría de los ejercicios trataremos con funciones de dos variables, ya que así podremos dibujarlas en un espacio tridimensional. Estas funciones serán del tipo $f(x,y)=z$, de modo que a cada par de números reales (x,y) le asignaremos un único valor real $(z=f(x,y))$.

Del mismo modo que pasa en las funciones de una variable, las funciones más sencillas son las **funciones lineales**, que en el caso de dos variables tienen como expresión $z=f(x,y)=ax+by+c$. Estas funciones están definidas mediante un polinomio de grado uno en x e y. La **gráfica de esta expresión** corresponde a un **plano**, que es la superficie más simple que podemos encontrar en tres dimensiones.

Recordemos que, al igual que en las funciones de una variable, a las variables *x,y* las denominaremos **variables independientes** *y* a *z* **variable dependiente**.



Ejemplos

Hemos visto los planos como ejemplos de funciones de varias variables sencillas. Veremos ahora algunos ejemplos de funciones de **varias variables no lineales** y cómo podemos calcular la imagen de los puntos utilizando dicha función.

1. Consideremos la función $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$, calcular:

   a) *f(0,0)*
   b) *f(1,6)*
   c) *f(-2,-3)*
   d) Existe algún punto tal que *f(x,y)=0*

Ejercicio **Solución**

Solución

Para calcular el valor de la función de un punto debemos sustituir en la expresión correspondiente el primer valor en la *x* y el segundo en la *y*. Por lo tanto:

a) $f(0,0)=1+0^2+0^2=1$

b) $f(1,6)=1+1^2+6^2=38$

c) $f(-2,-3)=1+(-2)^2+(-3)^2=14$

d) Para resolver el último apartado debemos pensar en qué valores de x e y se cumple que *f(x,y)=0*, o lo que es lo mismo, que $1+x^2+y^2=0$. Para ello, se tiene que dar $x^2+y^2=-1$. Sin embargo, ésto no es posible ya que si sumamos dos números positivos (observemos que al estar elevados al cuadrado siempre serán positivos) nunca obtendremos un número negativo.

2. Consideremos la función $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, calcular:

   a) *f(0,0)*
   b) *f(2,5)*
   c) *f(1,0)* y *f(0,1)*

Ejercicio **Solución**

Solución

De la misma forma que en el caso anterior, para calcular el valor de los puntos pedidos, sustituimos el primer valor del par en la x y el segundo en la y.

a) $f(0,0) = \sqrt{1-0^2-0^2} = 1$

b) $f(2,5) = \sqrt{1-2^2-5^2}$ No está definido dentro de los números reales.

c) $f(1,0) = \sqrt{1-1^2-0^2} = 0 = f(0,1) = \sqrt{1-0^2-1^2} = 0$

Otros ejemplos económicos

Veamos algún ejemplo de funciones de varias variables de tipo económico.

Supongamos que somos dueños de una empresa que fabrica dos modelos de cochecitos infantiles: el mini y el maxi. Su coste mensual total en euros por fabricar x minis e y maxis viene dado por la función:

C(x,y)=10000+10x+30y

¿Qué quiere decir cada término en esta fórmula?

- El **término constante** representa el coste total de no fabricar nada *(x=0, y=0)*. Por lo tanto es el coste fijo, o lo que es lo mismo, la cantidad que hay que pagar al mes por no fabricar cochecitos.
- Los **coeficientes** de la *x* y la *y*:
-

Supongamos que en un mes se fabrica cierta cantidad de cochecitos mini y maxi, y el mes siguiente se aumenta la producción de las mini en una unidad. Los costes serán:

$$C(x,y)=10000+10(x+1)+30y=10000+10x+10+40y=C(x,y)+10$$

Por lo tanto cada cochecito mini aumenta 10 euros al **coste total**. Se dice entonces, que 10 es el **coste marginal** de cada mini. De la misma forma, un maxi aumentará 30 euros al coste total. El coste marginal del maxi es de 30 euros.

Si nos piden calcular el coste de fabricar 5 cochecitos mini y 6 maxi, será:

C(5,6)=10000+50+180=10230 euros

En detalle **Observación**

En detalle

Ésta es una función lineal de dos variables. Los coeficientes representan papeles parecidos a los de la pendiente de una recta. En particular, expresa la razón de cambio de la función cuando cada variable aumenta y las demás permanecen constantes.

Dominio e imagen

Como cualquier función es posible definir, para las funciones de varias variables, el dominio y la imagen de la función.

Si miramos los ejemplos anteriores nos daremos cuenta que, en algunas ocasiones, no hemos podido obtener el valor de la función en el punto que nos pedían por no estar definido en los números reales o bien no hemos encontrado ningún par de valores *(x,y)* tales que *f(x,y)* fuera el valor solicitado.

Definiremos el **dominio de una función de varias variables** $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ como el conjunto de puntos $(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ para los que la función está definida.

La imagen de una función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente.

Recordemos que estamos trabajando con funciones de variable real, por lo tanto, tendremos que tener en cuenta que en las **funciones racionales** (cociente de funciones) no estará definida la función cuando el denominador sea cero, o en las **funciones definidas como raíces pares** (raíces cuadradas), no será posible calcular las raíces de valores negativos. Por su parte, las **funciones lineales o polinómicas** tendrán, en general, como dominio a todo R_n

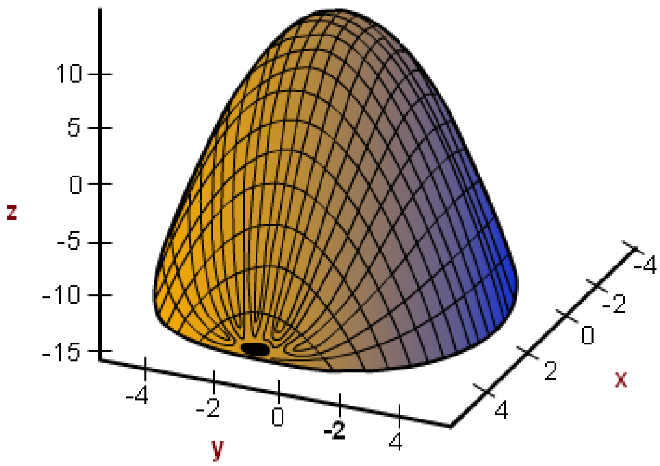
Documentos Cálculo del dominio

Gráficas

El concepto de gráfica de una función se puede extender también a las funciones de dos variables.

- En el caso de una función de **una variable** *y=f(x)*, para cada valor de *x* tendremos un valor de *y*, por lo tanto, la gráfica será en general, una **curva que estará contenida en un plano**.
- En el caso de funciones de **dos variables** *z=f(x,y)*, para cada par de valores *(x,y)* tendremos un valor *z*, por lo tanto, la **gráfica de estas funciones será una superficie en** $\mathbf{R^3}$ (tres dimensiones), en general, difícil de dibujar a mano.

Un ejemplo de gráfica de una función de dos variables la vemos en la siguiente figura.



Observación:

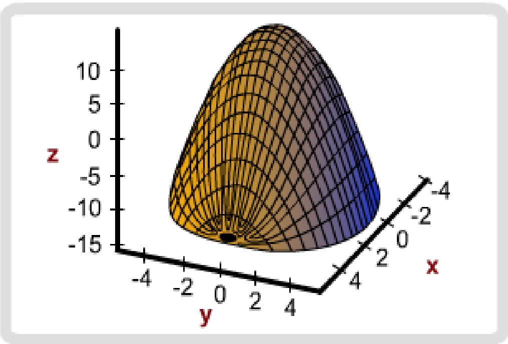
Para el caso de funciones de más de dos variables no es posible realizar una gráfica de la relación ya que necesitaríamos más de tres dimensiones.

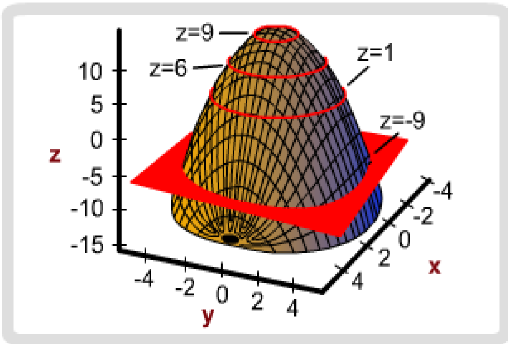
Curvas de nivel

En general, no es fácil dibujar la gráfica de una función de dos variables, por lo que en múltiples ocasiones, nos ayudamos de otras representaciones que nos permiten ver cómo es la relación entre las variables *x*, *y* y *z*, que son aquellos **puntos** en los que se **cumple que la función es igual a una constante**. A estos lugares se les denomina curvas de nivel.

Las curvas de nivel de una función *f(x,y)* son los puntos *(x,y)* del dominio de *f*, tales que *f(x,y)=k*, donde *k* es una constante.

Para calcularlas debemos imaginar cortes con un plano a la superficie a distintos niveles de *z*. Al cortar la superficie, las curvas resultantes son las curvas de nivel para distintos valores de *k*.





En el caso de la superficie del ejemplo anterior, las curvas de nivel son **circunferencias concéntricas**, de diferente radio en función de la altura del corte.

Ejemplos de curva de nivel

Es frecuente usar este tipo de representación "plana" de una superficie mediante las curvas de nivel.

¿Dónde podemos encontrar curvas de nivel?

Un ejemplo de curvas de nivel las encontramos en los **mapas de cartografía** donde es frecuente encontrar información correspondiente al relieve de la zona, marcando con curvas, los puntos que se encuentran a la misma altura.
Otro ejemplo lo encontramos en los **mapas de previsión del tiempo**. En ellos, se suelen marcar, por ejemplo, aquellas zonas que tienen la misma temperatura (isotermas) o la misma presión atmosférica (isobaras).

Curvas de nivel en economía

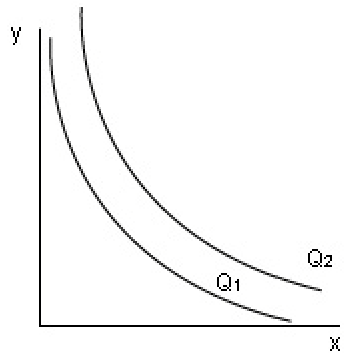
Resulta común utilizar las curvas de nivel de diferentes funciones económicas para describirlas con mayor exactitud. Una de las funciones más importantes en este campo es la **función de producción**.

La producción de una fábrica puede venir definida mediante la función de Cobb-Douglas:

$Q=F(x,y)=Kx^{r}\,y^{1-r}$

La función de Cobb-Douglas relaciona la producción con el trabajo *(x)* y el capital *(y)* y se cumple que $K>0$, $0<r<1$. Si consideramos aquellos valores de *x* e *y* para los que la producción es constante, estaremos calculando las curvas de nivel.

Las curvas de nivel de las funciones de producción se denominan **isocuantas** y medirán los valores de mano de obra (trabajo) y capital para los que se obtiene el mismo nivel de producción.



Otro ejemplo de este tipo de curvas en el campo de la economía se encuentra en las **curvas de indiferencia**. A nivel macroeconómico, una curva de indiferencia es el **conjunto de combinaciones de dos bienes** con los cuales se obtiene el mismo nivel de utilidad. En este caso *U(x,y)=Cte*.

Las **curvas de nivel** se pueden utilizar también para la **optimización de funciones de varias variables**. Gracias a ellas, podremos encontrar los máximos y los mínimos de una función de varias variables.

Resumen

Hemos visto los primeros conceptos relacionados con las **funciones de varias variables**. Estas funciones las representaremos mediante *f(x,y,z,t,…)* y relacionarán n-uplas de puntos con un valor de la recta real. Para estas funciones, del mismo modo que hacemos para las funciones de una variable, es posible calcular el **dominio** de la función que lo hemos definido como el conjunto de puntos para los que está definida la función. La **imagen** de la función, es el conjunto de puntos que toma la función.

La siguiente tabla relaciona los conceptos de dominio e imagen para una y varias variables:

Función de una variable *f (x)*	**Funciones de dos variables *f (x,y)***
Dominio de f en R	Dominio de f en R^2
Imagen de f en R	Imagen de f en R

Para el caso de funciones de dos variables es posible dibujar su gráfica aunque no siempre resulta sencillo. En este caso obtendremos **superficies en tres dimensiones** . Para facilitar esta representación nos ayudamos de la curvas de nivel que se definen como los valores de x e y para los que se obtiene un valor de la función constante.

En economía se definen las **isocuantas** como las curvas de nivel de la función de producción y las curvas de indiferencia como las curvas de nivel de la función de utilidad.