Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

CÁLCULO DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Índice

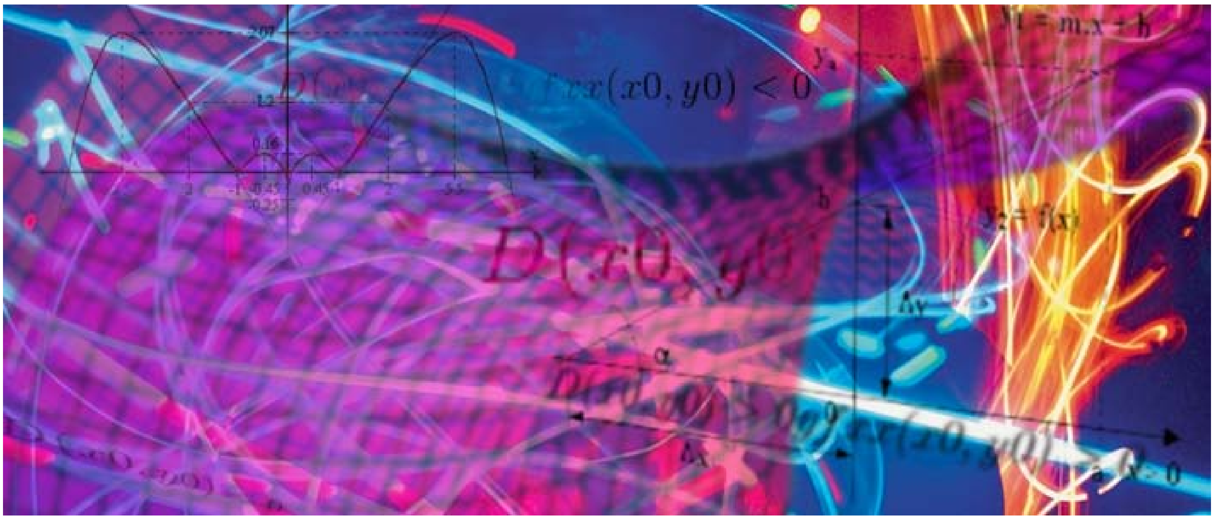
Presentación

Un problema importante del **cálculo diferencial** es la búsqueda de los máximos y los mínimos de una función. En este tema presentaremos cómo calcular los extremos (máximos o mínimos) relativos (o locales) de las funciones con dos variables, como generalización de las funciones de una sola variable.

Como veremos, será necesario encontrar primero los **puntos críticos**, para posteriormente clasificarlos como extremos relativos. Aprenderemos un criterio que nos permita decidir si son máximos, mínimos o puntos de silla.

Las **derivadas parciales** de la función serán la herramienta necesaria para poder clasificar estos puntos.

Los problemas de optimización (búsqueda de extremos) presentan, en ocasiones restricciones sobre las variables, presentaremos de forma escueta, algunos de los procedimientos para resolver problemas con restricciones de igualdad y de desigualdad.



Introducción

Como sabemos, para las funciones de una variable podemos definir el **máximo** de la función en un conjunto S cómo aquel valor x_0 que cumple que $f(x) \leq f(x_0)$ para cualquier valor x de dicho conjunto. De forma análoga se puede definir el **mínimo** si $f(x_0) \leq f(x)$ para cualquier punto del conjunto.

Utilizaremos el término **extremo** para referirnos indistintamente al máximo o al mínimo.

En las funciones de una variable, el cálculo de extremos relativos requiere como condición necesaria, que en dicho punto se anule la derivada (punto crítico).

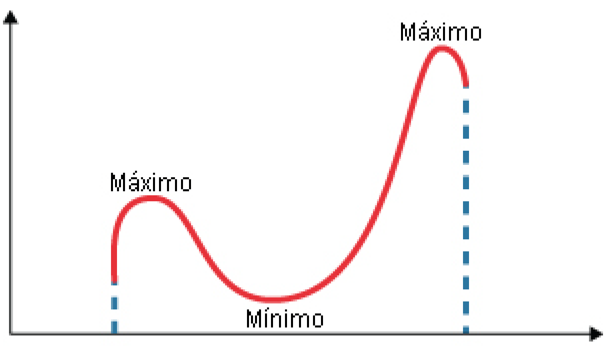
En general, hablaremos del cálculo de extremos relativos, es decir, de aquellos máximos o mínimos que se alcanzan en un entorno del punto y por lo tanto, son puntos críticos. El cálculo de extremos absolutos necesita de un estudio más profundo de la función y no será tratado en esta ocasión.

Recordemos que para estudiar si un punto crítico es un máximo o un mínimo (o nada) de una función utilizaremos la segunda derivada de modo que:

Sea $f(x)$ una función. Si x_0 es un punto crítico de la función ($f'(x_0)=0$), el punto es un:

Máximo local de la función si $f''(x_0) < 0$.

Mínimo local de la función si $f''(x_0) > 0$.



Puntos críticos

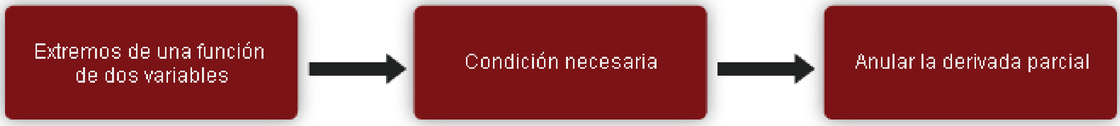
Generalizaremos ahora los resultados anteriores para el caso de funciones de dos variables.

De la misma manera que ocurre en las funciones de una variable, los extremos de una función de dos variables, tienen como condición necesaria anular la derivada parcial. Formalmente diremos que:

Si *f(x,y)* alcanza su máximo (o su mínimo) en el punto (x_0, y_0) del interior de un subconjunto del dominio de la función. Si existen las derivadas parciales, entonces se cumple que:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$$

A partir de este resultado diremos que un punto (x_0, y_0) es un **punto crítico** si en él, se anulan las derivadas parciales.



Ejemplo [Cálculo de puntos críticos]

Ejemplo

Calcular los puntos críticos de la función:

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4 + 3$$

Para calcular los puntos críticos, derivamos la función respecto de cada variable y la igualamos a cero.

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 4x - 4x^3 = 0 \\ f_y = 4y - 4y^3 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x(1-x^2) = 0 \\ 4y(1-y^2) = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 0 \quad \text{ó} \quad (1-x^2) = 0 \\ y = 0 \quad \text{ó} \quad (1-y^2) = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 0,\ x = 1,\ x = -1 \\ y = 0,\ y = 1,\ y = -1 \end{array}\right\}$$

¿Qué puntos críticos hemos obtenido?. Recuerda que en las funciones de dos variables, los puntos tienen dos coordenadas que corresponden a dichas variables. Lo que hemos obtenido son 3 valores para la x y 3 para la y, por lo tanto, en este caso, los puntos críticos corresponderán a las distintas combinaciones de estos valores: *(0,0), (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)*

Clasificación de los puntos críticos

Una vez que hemos encontrado los puntos críticos, tenemos que clasificarlos, es decir, tenemos que **ver si son máximos o mínimos locales**. Como dibujar la superficie de una función de dos variables no suele resultar sencillo, necesitamos algún método que nos permita saber cómo son estos puntos críticos.

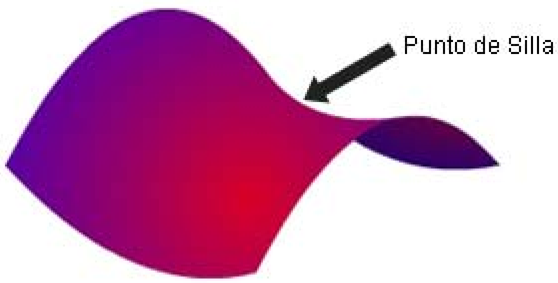
Recordemos que para el caso de una función de una variable, la clasificación la podemos realizar observando el signo de la segunda derivada. Ahora veremos que, para el caso de funciones de dos variables, es posible también, mediante un criterio similar, estudiar cómo son los puntos críticos encontrados.

Los puntos críticos de una función (que son puntos del interior del dominio de la función y no extremos) de dos variables se clasifican en:

- **Máximo locales**, si se cumple que $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ en un entorno del punto (x_0,y_0).
- **Mínimos locales**, si se cumple que $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ en un entorno del punto (x_0,y_0).
- **Puntos de silla**, si existen puntos donde $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ y puntos en los que $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$.

Observemos que no todos los puntos críticos son óptimos, es decir, hay puntos que no son ni máximos ni mínimos locales: los **puntos de silla**.

Los puntos de silla reciben este nombre porque se dan en un tipo de funciones cuya gráfica tiene forma de silla de montar a caballo.



Criterio de clasificación de puntos críticos

Una vez conocida la clasificación, nos interesa establecer criterios que permitan decidir a cuál de estos tipos pertenece el punto crítico encontrado. Para ello, buscaremos un método que utilice las derivadas de segundo orden. Tal y como venimos haciendo, presentaremos el criterio para funciones de dos variables.

Criterio de clasificación de puntos críticos

- Si las segundas derivadas parciales de la función *f(x,y)* son continuas

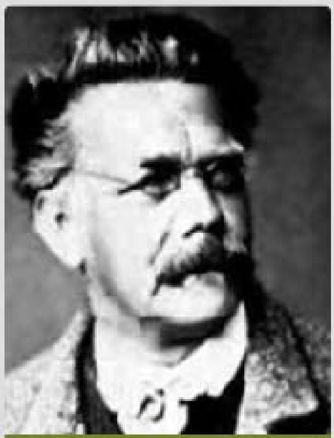
  en un entorno del punto *(a,b)* y se cumple que $f_x(a,b) = 0$ y $f_y(a,b) = 0$ (es decir, *(a,b)* es un punto crítico), entonces definido *D* como:

$$D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2$$

  - Si $D > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0$, entonces *(a,b)* es un **mínimo local**.
  - Si $D > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0$, entonces *(a,b)* es un **máximo local**.
  - Si $D < 0$, entonces *(a,b)* es un **punto de silla**.
  - Si $D=0$ el criterio no es concluyente.
  -

Observemos que este criterio no es válido si el valor de *D* es cero. En ese caso, necesitaremos de otro criterio para poder clasificarlo correctamente.

Matriz Hessiana



Ludwig Otto Hess (1811-1874).

Las derivadas parciales de segundo orden de la función *f(x,y)* pueden escribirse en una tabla siguiendo el siguiente orden:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Esta tabla recibe el nombre de **matriz Hessiana**.

Si multiplicamos en cruz los valores de las derivadas (recordando que el valor de las derivadas parciales cruzadas coincide bajo condiciones muy generales) y sustituimos el puntos critico, obtenemos:

$$f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2$$

Observemos que hemos llamado *D* a este número.

La cantidad calculada es el determinante de dicha matriz y recibe el nombre de **Hessiano**.

Ejemplo I

Clasificar los puntos críticos de la función $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4 + 3$.

Solución:

Hemos calculado los puntos críticos de esta función en un ejemplo anterior obteniendo 9 puntos que anulan las derivadas parciales: *(0,0), (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)*.

Para clasificarlos, calculamos la matriz hessiana, mediante las derivadas parciales de segundo orden, recordando que fx = 4x - 4x3 = 0, fy = 4y - 4y3 = 0.

$$H = \begin{pmatrix} 4-12x^2 & 0 \\ 0 & 4-12y^2 \end{pmatrix}$$

Y por lo tanto, $D(x,y) = (4-12x^2)(4-12y^2) - 0^2 = (4-12x^2)(4-12y^2)$

Para clasificar cada punto debemos **sustituir el punto en *D(x,y)***.

Punto	D(x,y)	Tipo de punto crítico
Punto *(0,0)*	$D(0,0) = 16 > 0$ y $f_{xx}(0,0) = 4 > 0$	*(0,0)* es un mínimo local
Punto *(0,1)*	$D(0,1) = -32 < 0$	*(0,1)* es un punto de silla
Punto *(0,-1)*	$D(0,-1) = -32 < 0$	*(0,-1)* es un punto de silla
Punto *(1,0)*	$D(1,0) = -32 < 0$	*(1,0)* es un punto de silla
Punto *(-1,0)*	$D(-1,0) = -32 < 0$	*(-1,0)* es un punto de silla
Punto *(1,1)*	$D(1,1) = 64 > 0$ y $f_{xx}(1,1) = -8 < 0$	*(1,1)* es un máximo local
Punto *(1,-1)*	$D(1,-1) = 64 > 0$ y $f_{xx}(1,-1) = -8 < 0$	*(-1,1)* es un máximo local
Punto *(-1,1)*	$D(-1,1) = 64 > 0$ y $f_{xx}(-1,1)= -8 < 0$	*(-1,1)* es un máximo local
Punto *(-1,-1)*	$D(-1,-1) = 64 > 0$ y $f_{xx}(-1,-1) = -8 < 0$	*(-1,-1)* es un máximo local

Ejemplo II

Determina y clasifica los puntos críticos de la función $f(x,y)=x^3+3xy^2-3y^2-3x^2+11$.

Solución:

Para determinar los puntos críticos calculamos las derivadas parciales y las igualamos a cero:

$$\left.\begin{array}{l} f_x=3x^2+3y^2-6x=0 \\ f_y=6xy-6y=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x^2+3y^2-6x=0 \\ 6y(x-1)=0 \end{array}\right\} y=0 \text{ ó } (x-1)=0 \Longrightarrow y=0 \text{ ó } x=1$$

- Si y=0, sustituimos en la primera ecuación de modo que:

$$3x^2+3\cdot 0^2-6x=0,\ 3x^2-6x=0 \Longrightarrow 3_x(x-2)=0 \Longrightarrow \left. x=0 \text{ ó } x=2 \right\} (0,0),(2,0)$$

- Si x=1, sustituimos en la primera ecuación de modo que:

$$3\cdot 1^2+3y^2-6\cdot 1=0,\ 3y^2=3 \Longrightarrow y^2=1 \Longrightarrow \left. y=1 \text{ ó } y=-1 \right\} (1,1),(1,-1)$$

Hemos obtenido cuatro puntos críticos (0,0), (2,0), (1,1), (1,-1).

Para clasificarlos, calculamos la matriz hessiana a partir de las derivadas de segundo orden:

$$H = \begin{pmatrix} 6x-6 & 6y \\ 6y & 6x-6 \end{pmatrix}$$

a) (0,0). $D(0,0) = 36 > 0$ y $f_{xx}(0,0) = -6 < 0$ $\rightarrow$ *(0,0)* es un máximo local.

b) (2,0). $D(2,0) = 36 > 0$ y $f_{xx}(0,0) = 6 > 0$ $\rightarrow$ *(2,0)* es un mínimo local.

c) (1,1). $D(1,1) = -36 < 0$ $\rightarrow$ *(1,1)* es un punto de silla.

d) (1,-1). $D(1,-1) = -36 < 0$ $\rightarrow$ *(1,-1)* es un punto de silla.

Optimización con restricciones

La resolución de problemas en los que hay que calcular el máximo o el mínimo de una función se conoce como optimización de funciones. Hasta ahora, en los problemas no hemos considerado ningún tipo de característica adicional sobre las variables, a este tipo de problemas se les denomina de **optimización libre o sin restricciones**.

Sin embargo suele ser habitual encontrarnos con situaciones en las que las variables sólo pueden tomar un rango de valores o bien dichas variables tienen que cumplir cierta relación. Si dicha condición es de igualdad, estos problemas se denominan de **optimización con restricciones de igualdad**.

En este tipo de problemas, del mismo modo que sucede en funciones de una variable, tendremos:

- **Función objetivo**: función de la cual queremos obtener su máximo o su mínimo.
- **Conjunto de restricciones**: condiciones que deben satisfacer las variables.

Opt. $f(x,y)$ **s.a $g(x,y) = 0$**	Optimizar la función $f(x,y)$ sujeta a la restricción $g(x,y) = 0$ (restricción de igualdad).

Al añadir al problema una restricción lo que hacemos es reducir el dominio de definición de la función objetivo.

El conjunto de valores que cumplen la restricción ($g(x,y) = 0$) se denomina conjunto de soluciones factible.

En detalle Métodos de resolución

En detalle

Métodos de resolución

Existen diversos métodos de resolución de problemas de optimización con restricciones de igualdad. Uno de ellos, es el **método de sustitución** en el que despejamos una de las variables de la restricción y se sustituye en la función objetivo, pasando así a ser una función de una variable fácilmente optimizable.

Sin embargo este método no siempre se puede aplicar, pues puede ocurrir que la restricción sea complicada o simplemente imposible de despejar una variable en función de la otra.

Un método alternativo y más general, es el **método de los multiplicadores de Lagrange**, que permite, además obtener cierta información complementaria.

Resumen

En este tema hemos visto cómo se obtienen los máximos y lo mínimos para el caso de funciones de dos variables. Del mismo modo que ocurre en las funciones reales de una variable, para calcular dichos óptimos necesitamos en primer lugar localizar los puntos críticos (puntos que anulan la derivada parcial):

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$$

Una vez encontrados dichos puntos, lo clasificaremos en máximo o mínimo local o en punto de silla mediante el uso adecuado de las derivadas parciales de segundo orden de modo que, si D es el hessiano sustituido en el punto crítico y

$$D > 0 \begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) < 0 & \Longrightarrow \text{El punto es un máximo local} \\ f_{xx}(x_0, y_0) > 0 & \Longrightarrow \text{El punto es un mínimo local} \end{cases}$$

$$D < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{El punto es un punto de silla.}$$

Donde

$$D = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2$$