Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

EJERCICIOS DE APLICACIÓN A LA ECONOMÍA

Índice

Presentación 3
Introducción 4
Descripción matemática mediante una función de varias variables 5
Funciones marginales de funciones económicas 6
Maximización de beneficios 8
Optimización aplicada al entorno económico 9
Clasificación de puntos críticos 10
Puntos críticos 11
Optimización con restricciones de igualdad 12
Resumen 13

Presentación

En este tema trabajaremos diversos ejercicios de aplicación de los contenidos vistos sobre **funciones de varias variables aplicados algunos de ellos al campo de la economía.**

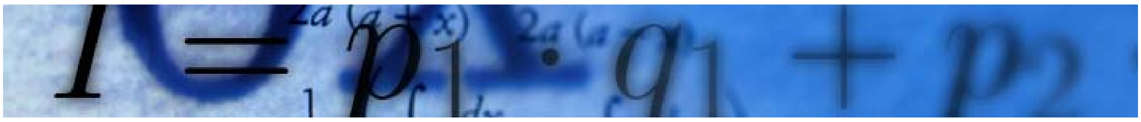
Repasaremos los conceptos de derivabilidad de las funciones, el cálculo de derivadas parciales, a través de las funciones marginales.

La obtención de los óptimos de una función será el contenido del resto de problemas. En ellos utilizaremos la **matriz hessiana** en el criterio de clasificación de puntos críticos.

Introducción

Antes de comenzar con los ejercicios, repasaremos algunas **funciones de dos variables que se utilizan en la economía**:

Función	Fórmula	Concepto
Función de demanda	$D_1 = f(p_1, p_2)$	Expresa la cantidad demandada de dos bienes en función de sus precios.
Ingreso	$I = p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2$	Expresa el ingreso que obtiene el productor al vender las cantidades q_1 y q_2 de los bienes Q_1 y Q_2 a los precios p_1 y p_2 respectivamente.
Coste total de producción	$C = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + CF$	Expresa el coste total en función de los insumos variables x_1 y x_2. El coste fijo está representado por CF, y los costes de los insumos variables por unidad están dados por p_1 y p_2.
Beneficio	$B(x_1, x_2) = I - C$	Expresa la diferencia entre el ingreso y el coste total.
Producción	$q = f(x_1, x_2)$	Expresa la cantidad de un producto que se puede elaborar en función de las cantidades de los insumos o recursos x_1 y x_2.
Producción conjunta	$x = f(q_1, q_2)$	Expresa la cantidad total de insumo *X* utilizado para producir las cantidades q_1 y q_2 de los bienes Q_1 y Q_2. Esta función se aplica cuando un mismo insumo se utiliza en la producción de más de un bien.
Utilidad	$U = f(q_1, q_2)$	Expresa el nivel de satisfacción o preferencia de un consumidor cuando adquiere las cantidades q_1 y q_2 de los bienes Q_1 y Q_2.



Descripción matemática mediante una función de varias variables

El siguiente ejemplo tiene como **objetivo describir matemáticamente mediante una función de varias variables**:

Un bar tiene un coste de funcionamiento mensual de 30.000€, si además cada actuación de su grupo musical le cuesta 3.000€ y la de un cómico de monólogos 1.000€. Escribir una fórmula que describa el coste total (mensual) del bar.

Ejercicio **Solución**

Ejercicio

Solución:

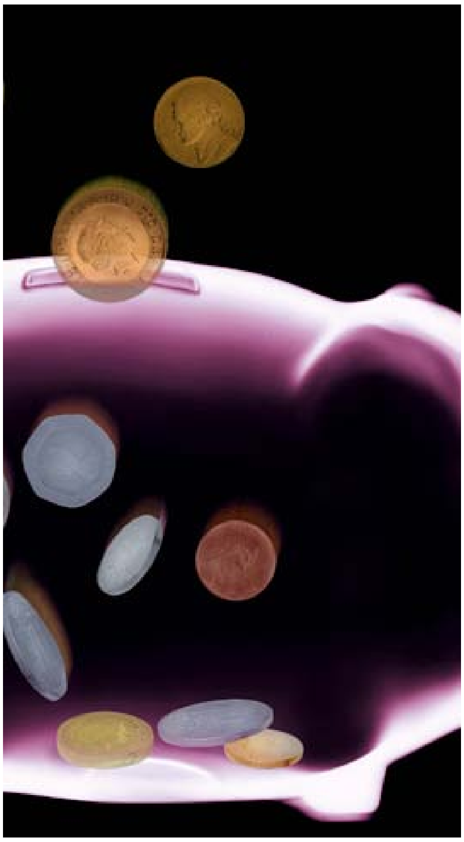
Para describir el coste total del bar debemos identificar en primer lugar las variables y a continuación, la relación entre ellas.

Llamamos x al número de actuaciones del grupo musical al mes, e y al número de actuaciones de monólogo mensuales.

El **coste total** será: $C(x,y)=30000+3000x+1000y$

Funciones marginales de funciones económicas

Ahora calcularemos las **funciones marginales de algunas funciones económicas**.



1. La producción de cierto país se puede describir mediante la función:

$$f(x,y) = 50x^{1/3}y^{2/3}$$

donde *x* es la contabilidad de las unidades de mano de obra e *y* las unidades de capital. Calcular la productividad marginal de la mano de obra y del capital si los gastos son 130 y 7 respectivamente.

Ejercicio **Solución**

Ejercicio

Solución

Para calcular las funciones marginales debemos realizar las derivadas parciales respecto de cada variable.

Al derivar respecto de cada variable, tenemos que:

$$f_x(x,y) = \frac{50}{3}x^{-2/3}y^{2/3}$$

$$f_y(x,y) = \frac{100}{3}x^{1/3}y^{-1/3}$$

Como nos piden la productividad marginal en *x=130* e *y=7*, sustituyendo, obtenemos:

$$f_x(130,7) = 2.38 \quad f_y(130,7) = 88.27$$

2. Una fábrica de ropa produce dos tipos de camisetas, la de manga corta y la de manga larga. Si la función de coste de producir *x* camisetas de manga corta e *y* de manga larga viene dada por la ecuación:

$$C(x, y) = 0.07x^2 + 75x + 85y + 6000$$

Calcular los costes marginales de producir 100 camisetas de manga corta y 50 de manga larga.

Ejercicio **Solución**

Ejercicio

Solución

Para calcular las funciones marginales debemos realizar las derivadas parciales respecto de cada variable.
En éste caso, los costes marginales son:

$C_x(x, y) = 0.14x + 75$

$C_y(x, y) = 85$

Para las cantidades pedidas tenemos que:

$C_x(100, 50) = 89 \quad C_y(100, 50) = 85$

Maximización de beneficios

Una empresa produce dos tipos (A y B) de un bien y los vende a 15€ los de tipo *A* y a 9€ los de tipo *B*. Si se sabe que el coste total diario de producir *x* unidades del tipo *A* e *y* unidades del tipo *B* viene dado por la expresión:

$$C(x,y) = 0.04x^2 + 0.01xy + 0.01y^2 + 4x + 2y + 500$$

Calcular cuántas unidades debe producir si quiere maximizar sus beneficios.

Solución

Como ves, se trata de resolver un problema de optimización sin restricciones, pues nos piden que calculemos el número de unidades que hay que producir (es decir, el valor de *x* e *y*) para maximizar los beneficios.

Para resolver deberás seguir los siguientes pasos:

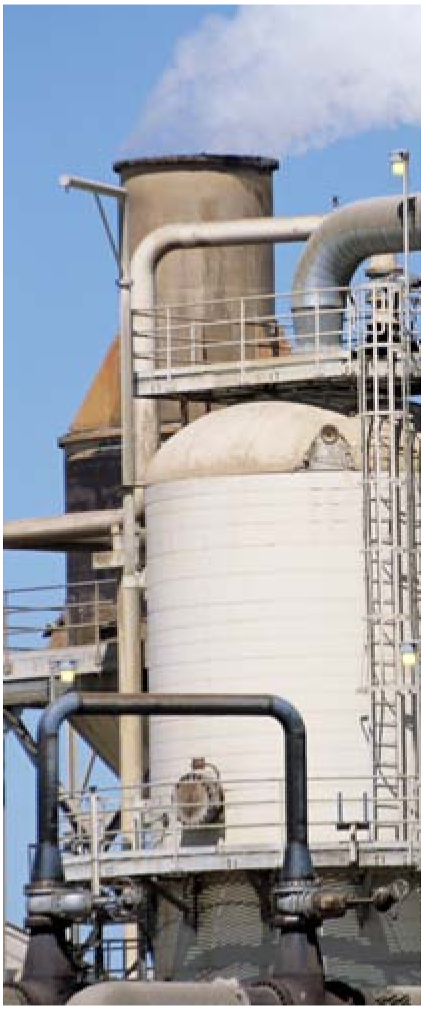
1. **Construye** la función beneficio, recordando que *B(x,y)=I(x,y)-C(x,y)*. Ten cuidado con el signo menos que hay delante de la función de coste, recuerda que ese signo involucra a todos los términos de la función de coste.
2. **Calcula** las derivadas parciales e iguala a cero para obtener los puntos críticos.
3. **Clasifica** los puntos críticos utilizando la matriz hessiana.
4. **Busca** el punto que hace máxima la función.

La solución completa del ejercicio puedes encontrarla en el siguiente documento.

Documentos **Maximización de beneficios**

Optimización aplicada al entorno económico

Practiquemos con otro ejemplo de **optimización aplicado al entorno económico**.



Una empresa que tiene dos fábricas que producen el mismo artículo. La primera de ellas produce *x* unidades y la segunda *y* de dicho bien. Si las funciones de coste de cada fábrica vienen dadas por las expresiones:

$$CC_1(x) = 200 + \frac{1}{100}x^2 - 10x \quad C_2(y) = 200 + \frac{1}{300}y^2$$

Calcular el número de unidades que deben producir para minimizar el coste.

Solución

De nuevo se trata de resolver un problema de optimización sin restricciones, pues nos piden que calculemos el número de unidades que hay que producir (es decir, el valor de *x* e *y*) para minimizar el coste.

Para resolver deberás seguir los siguientes pasos:

1. **Construye** la función de coste total sumando ambas funciones.
2. **Calcula** las derivadas parciales e iguala a cero para obtener los puntos críticos.
3. **Clasifica** los puntos críticos utilizando la matriz hessiana.
4. **Busca** el punto que hace mínima la función.

La solución completa del ejercicio puedes encontrarla en el siguiente documento.

Documentos **Minimización del coste**

Clasificación de puntos críticos

Continúa practicando la optimización sin restricciones, con el siguiente ejemplo:

Una empresa produce dos artículos de lujo A y B cuyos precios son, respectivamente, 1800 y 900 euros por unidad y cuyos costes vienen dados por las expresiones.

$$C_1 = 240q_1^2 - 10q_1^3 + 370 \qquad C_2 = 150q_2^2 + 300$$

Donde q_1 y q_2 son las cantidades producidas de cada artículo. Determinar las cantidades que debe producir para maximizar el beneficio.

Documentos Solución

Puntos críticos

Resuelve un nuevo problema de optimización del beneficio de una empresa.

Una empresa produce dos tipos de artículos cuyos precios son 2000 y 3000 euros por unidad. Si su función de costes conjunta es:

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$$

Donde *x e y* denotan las cantidades producidas de cada artículo (medidas en miles de unidades) y la función de coste está expresada en millones de euros. ¿Cuántas unidades debe producir para maximizar el beneficio?

Solución

Construimos la función beneficio como

$$B(x, y) = 2x + 3y - x^2 - 2y^2 + xy$$

Si derivamos e igualamos a cero, obtenemos los puntos críticos, en este caso

$$B_x = 2 - 2x + y = 0 \qquad B_y = 3 - 4y + x = 0$$

El punto crítico es (11/7, 8/7) que, al clasificarlo mediante la matriz hessiana

$$BH = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Vemos que se trata de un máximo. Por lo tanto, como las unidades están expresadas en miles, tenemos que producir un total de 1571.43 unidades del primer artículo y 1142,86 unidades del segundo.

Optimización con restricciones de igualdad

Resolveremos ahora un problema con restricciones de igualdad.

Si en las condiciones del ejemplo anterior nos limitaran la producción total a 8000 unidades, ¿cuántas unidades debemos producir para maximizar el beneficio?

Solución

En esta ocasión tenemos que maximizar la función beneficio B(x,y) (función objetivo) sujeta a la restricción de producir un total de 8000 artículos, escribiremos el problema como

$$\left.\begin{array}{l} \text{Opt. } f(x,y) \\ \text{s.a } g(x,y)=0 \end{array}\right\}$$

Para resolver el problema podemos utilizar le método de sustitución, de manera que despejamos una variables de la restricción y la sustituimos en la función objetivo, para después calcular el máximo. De esta manera:

Si $y=8-x$, la función de beneficio queda

$$B(x) = 2x + 3(8-x) - x^2 - 2(8-x)^2 + x(8-x) = -4x^2 + 39x - 104$$

Que es una función de una variable. Derivando e igualando a cero, obtenemos el punto crítico que clasificamos con la segunda derivada.

$$B'(x) = -8x + 39 = 0$$

por lo que $x=39/8$, y como la segunda derivada en el punto es negativa, el punto es un máximo. Sustituyendo en la restricción obtenemos que $y=8-x=25/8$. Como está expresado en miles, multiplicamos por mil, de forma que tenemos que producir 4875 unidades del primer artículo y 3125 del segundo para maximizar el beneficio bajo la restricción de producir un total de 8000 artículos.

Resumen

En esta lección hemos repasado varios ejemplos del cálculo de funciones de dos variables aplicado al campo de la economía.

Hemos visto cómo calcular funciones marginales de una función económica como la derivada de una función.

Maximizar el beneficio o minimizar el coste son problemas que se presentan de forma habitual y que resolvemos gracias a la optimización de funciones.

Recuerda que para ello debes plantear la función adecuada y obtener sus puntos críticos igualando a cero las derivadas parciales.

Después clasificaremos los puntos gracias a la matriz hessiana construida a partir de las derivadas parciales de segundo orden.