



**Universidad
Europea de Madrid**

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

MATRICES Y DETERMINANTES

EJERCICIOS RESUELTOS

Cartagena99

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Índice

Presentación	3
Operaciones con matrices	4
Potencias de una matriz	5
Productos notables de matrices	6
Determinantes de una matriz.....	7
Rango de matriz.....	8
Inversa de una matriz	10
Ecuaciones matriciales	11
Aplicación económica.....	12
Resumen.....	13



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Presentación

Se presentan en este tema algunos **ejercicios** resueltos con **matrices**. Los ejemplos planteados corresponden a distintos conceptos referentes a las matrices, determinantes y rango.

Para resolver estos problemas es importante no olvidar las **propiedades de las matrices** y sus operaciones, así como los **diferentes modos de calcular** lo que se pide. De esta forma se podrá elegir el método que más convenga en cada caso.

Una buena idea puede ser tratar de resolver los ejercicios por uno mismo antes de ver la solución y así detectar aquellos aspectos de la materia que no se entienden.

Una vez consultada la solución, hay que asegurarse de que se comprenden todos los pasos y en caso contrario consultar con el profesor las dudas que surjan.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Operaciones con matrices

Dadas las matrices A, B, C y D realizar las operaciones indicadas cuando sea posible.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcular, si es posible, las siguientes operaciones $A \cdot C$, $C \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot A$, $B \cdot C$, $C \cdot B$, $C \cdot D$, $D \cdot C$, $C + B$, $3C$ y D^{-1} .

Solución

Para poder sumar o restar dos matrices es necesario que tengan la misma dimensión; si se quiere multiplicar dos matrices, el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda. Obsérvese que las matrices dadas tienen las siguientes dimensiones:

Matriz A: 3x2

Matriz B: 3x3

Matriz C: 2x3

Matriz D: 2x2

- No es posible sumar o restar ninguna de ellas, al no coincidir sus dimensiones.
- Únicamente se pueden realizar los siguientes productos: $A \cdot C$, $C \cdot A$, $C \cdot B$, $A \cdot D$, $B \cdot A$, $D \cdot C$.
- Es posible multiplicar un número por cualquier matriz.
- Una matriz es invertible si es cuadrada y con determinante no nulo, por lo tanto, es posible calcular D^{-1} .

Las operaciones posibles puedes encontrarlas en el siguiente documento adjunto.



Operaciones posibles con matrices

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Potencias de una matriz

Dada la matriz A , calcular A^3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para calcular la **potencia de una matriz** se debe recordar la definición de potencia:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ veces}}$$

Por lo tanto, para calcular A^3 se debe multiplicar $A^3 = A \cdot A \cdot A$ (cuidado con el orden de multiplicación ya que el producto de matrices no es conmutativo).

$$\begin{aligned} A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 28 & 20 & -1 \\ 43 & 63 & 25 \\ -8 & 4 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 225 & 134 \\ 433 & 545 & 185 \\ 57 & -11 & -58 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Productos notables de matrices

Como ya se sabe, para los números reales se cumple que:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

¿Qué ocurre para las matrices?

Estudiar si dadas dos matrices A y B se cumple que:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Solución:

Para calcular $(A+B)^2$ se tiene que tener en cuenta que el producto de matrices no es conmutativo.

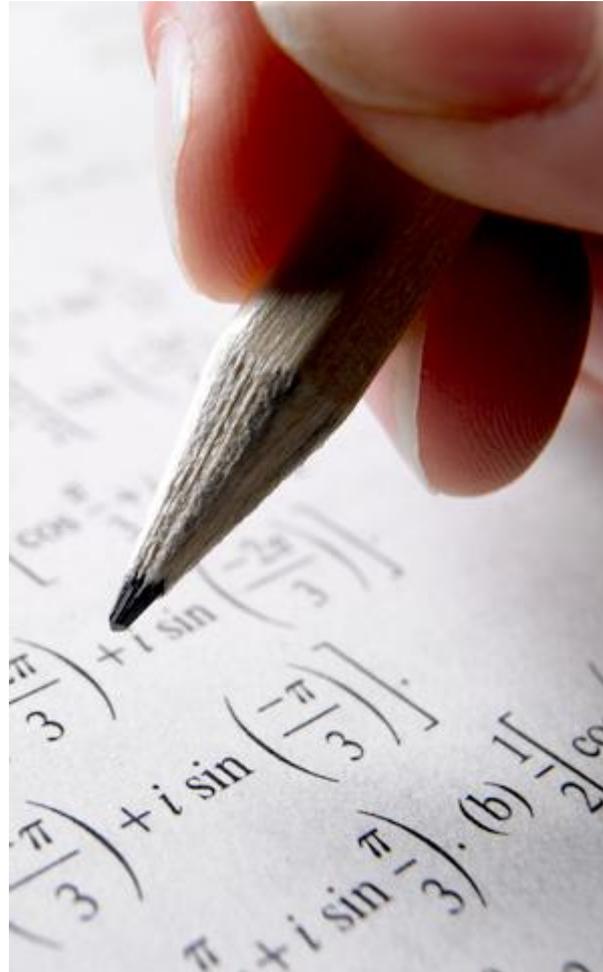
Operando se obtiene:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Obsérvese el resultado. ¿Podemos decir, en general, que $A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Dado que el producto de matrices no es conmutativo, en general no se cumple que $AB = BA$, por lo que no es cierta la afirmación anterior.

Por lo tanto, para matrices $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Determinantes de una matriz

Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 4 & x & 6 \\ 5 & 7 & 12 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Para resolver el sistema se calcula el determinante de la matriz de orden 3 y se iguala a cero. Se obtiene una ecuación de una variable que se tiene que resolver usando el método adecuado en función del grado de la ecuación.

Al resolver el **determinante** (utilizando, por ejemplo, la regla de Sarrus) se obtiene que:

$$\begin{vmatrix} 4 & x & 6 \\ 5 & 7 & 12 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix} = 64x - 5x^2 - 108$$

Por lo tanto, la ecuación para resolver es $64x - 5x^2 - 108 = 0$. Al ser una ecuación de segundo grado se calculan sus raíces mediante la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cuyo resultado es $x = 2$ y $x = 10.8$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Rango de matriz

Calcular el rango de la matriz en función del valor de a .

$$\begin{pmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{pmatrix}$$

Para calcular el rango de la matriz se pueden utilizar varios métodos. En esta ocasión se reducirá la matriz a una matriz escalonada con el objetivo de estudiar el número de filas linealmente independientes. Es importante recordar que es posible calcular el rango de una matriz a través del cálculo de determinantes. Al observar la matriz se comprueba que su dimensión es 3×4 . Por lo tanto, el máximo rango que puede tener es el 3.

$$\begin{pmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & a & 1 \\ a & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

$F_2: F_2 - F_1$
 $F_3: F_3 - aF_1$

Hay que fijarse en las filas que tienen el valor a , ¿Para qué valores de a se anula alguna fila?

Caso 1. Si $a = 1$, la matriz anterior queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rg A = 1



Caso 2

Ejemplo

Caso 2

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



Caso 3

Ejemplo

Caso 3

Si $a \neq \pm 1$, la matriz anterior queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Rg A = 3}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Inversa de una matriz

Calcular el valor de a para que la siguiente matriz sea invertible.

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 4 \\ 4 & a & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Para resolver el problema se debe tener presente que para que una matriz sea invertible debe ser:

- Cuadrada.
- Con determinante no nulo.

La matriz A es cuadrada y su determinante es:

$$A = \begin{vmatrix} a & 4 & 4 \\ 4 & a & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 3a - 4$$

Como se quiere que el determinante no sea cero, se busca el valor de a que no anule la ecuación, es decir, tal que $a^2 - 3a - 4 \neq 0$. Las raíces de este polinomio son $a = -1$ y $a = 4$, por lo que la matriz es invertible siempre que $a \neq -1$ y $a \neq 4$.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ecuaciones matriciales

Se estudia ahora la resolución de un problema que implica resolver una ecuación matricial.

Comprobar que la matriz x verifica $x^2 - 7x + 10I = 0$ donde x es la matriz.

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Se realizan las operaciones pedidas recordando que I es la matriz identidad y O la matriz nula.

En primer lugar se resuelve x^2

$$X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación se obtiene la igualdad pedida.

$$\begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 & 14 \\ 7 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 - 28 + 10 & 14 - 14 + 0 \\ 7 - 7 + 0 & 11 - 21 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Aplicación económica

Una de las aplicaciones de las matrices en el campo de la economía son los **procesos de producción**, ya que es posible representar varias cantidades simultáneamente mediante una matriz y calcular, a partir de ella, flujos de producción.

Wassily Leontief (1905-1999), premio Nobel en Economía en 1973, desarrolló un modelo input-output para la aplicación de problemas económicos. En este análisis introduce el **álgebra matricial** a los problemas de equilibrio general, estudiando la relación de dependencia entre los sectores productivos en los que se considera dividida la economía de un determinado país.



Wassily Leontief

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Resumen

En este tema se han repasado algunos ejercicios resueltos del uso de las **matrices**. No hay que olvidar que no siempre se puede operar una matriz, pues la **suma** y la **resta**, por ejemplo, sólo están definidas para matrices de la **misma dimensión**. El producto de matrices, por su parte, sólo está definido para aquella matriz cuyo número de columnas coincida con el número de filas de la otra.

Es importante también recordar que **no está definida la división de matrices**. Una operación que en ocasiones puede resultar equivalente es el uso de la **matriz inversa**.



Además, el **producto de matrices no es conmutativo**, lo que supone que propiedades y relaciones conocidas para los números reales no se cumplen con este tipo de cantidades abstractas.

Las matrices pueden aplicarse en economía en los **procesos de producción**.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70