

# Construcción de Diagramas de Bode asintóticos

Universidad Rey Juan Carlos  
Área de Tecnología Electrónica

 CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## ÍNDICE

1	INTRODUCCIÓN .....	2
2	DIAGRAMAS DE BODE .....	3
3	MÉTODO PRÁCTICO DE CONSTRUCCION DE DIAGRAMAS DE BODE .....	6
	ANEXO A: Módulo y fase de la función de transferencia de un circuito.....	9

## 1 INTRODUCCIÓN

El objeto del presente documento es el de dar unas normas prácticas para la construcción de Diagramas de Bode de la función de transferencia de un sistema lineal partiendo de su expresión factorizada en términos simples, es decir, descompuesta en productos de polos y ceros.

Un caso concreto de sistema lineal, a modo de ejemplo, puede ser un amplificador realizado con transistores, y la función de transferencia a representar sería la expresión de la ganancia del amplificador teniendo en cuenta las frecuencias de corte inferior y superior. Para bajas frecuencias son los condensadores de acoplo de señales de entrada y salida o de acoplo entre etapas (para amplificadores de varias etapas) y de desacoplo de resistencias los que determinan los polos y ceros a bajas frecuencias. Para altas frecuencias son las capacidades parásitas base-emisor (o puerta-fuente) y base-colector (o puerta-drenador) las que determinan los polos y ceros a altas frecuencias.

Existe mucha y muy buena bibliografía sobre el estudio de la respuesta en frecuencia (o análisis frecuencial) de sistemas lineales. A modo de ejemplo se incluyen las siguientes referencias disponibles en la biblioteca de la URJC:

- *Ingeniería de Control Moderna* (Modern Control Engineering ), Autor: Katsuhiko Ogata, Ed. Pearson. Contiene un desarrollo teórico y práctico completo sobre la respuesta en frecuencia y sus distintas formas de representarla, entre ellas los Diagramas de Bode.
- *Control de sistemas continuos. Problemas resueltos*, Autor: Antonio Barrientos, Ed. McGraw Hill.

Libro de problemas muy práctico y en cada capítulo incluye una pequeña introducción teórica. En el Cap. 7 se encuentra cómo realizar un Diagrama de Bode asintótico. Este

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

## 2 DIAGRAMAS DE BODE

Los Diagramas de Bode son una forma de representar gráficamente la respuesta en frecuencia de un sistema lineal, invariante y estable, en régimen permanente que es excitado con una señal senoidal de amplitud constante y frecuencia variable (de 0 a  $\infty$ ). La respuesta en frecuencia de este tipo de sistemas en régimen permanente viene dada por otra señal senoidal de igual frecuencia en todo momento a la frecuencia de la señal de entrada, pero de amplitud y fase distintas y dependientes ambas de la frecuencia.

Es decir, si la entrada al sistema es una función tipo:

$$x(t) = R \cdot \text{sen}(\omega t)$$

La salida será del tipo:

$$y(t) = A(j\omega) \cdot \text{sen}(\omega t + \theta)$$

Los valores de la **amplitud** de la salida se representan en un diagrama de módulos, en el que en el eje de abscisas se representa la frecuencia en escala logarítmica (habitualmente en rad/s) y en ordenadas se representa el módulo en decibelios,  $20 \cdot \log(|A|)$ . La amplitud representa el **módulo de la ganancia** (módulo del valor de salida del sistema dividido entre valor de entrada al sistema) de la función de transferencia del sistema en función de la frecuencia.

Las pendientes de los diagramas de módulos se describen habitualmente en dB/década. Una década es un factor que multiplica por 10, por lo que cada vez que el módulo se multiplica/divide por 10, la ganancia en dB aumenta/disminuye 20dB:

Si la ganancia es  $A[\text{dB}] = 20 \cdot \log(|A|)$  y se multiplica el módulo por 10, se obtiene:

$$A'[\text{dB}] = 20 \cdot \log(10 \cdot |A|) = 20 \cdot \log(|A|) + 20 \cdot \log(10) = A[\text{dB}] + 20[\text{dB}]$$

*Nota 1.- Las pendientes de los diagramas módulos también pueden describirse en dB/octava. Una octava es un factor que multiplica por 2, por lo que cada vez que el módulo se multiplica/divide por 2, la ganancia en dB aumenta/disminuye aproximadamente 6dB:*

*Si la ganancia es  $A[\text{dB}] = 20 \cdot \log(|A|)$  y multiplico el módulo por 2, se obtiene:*

$$A'[\text{dB}] = 20 \cdot \log(2 \cdot |A|) = 20 \cdot \log(|A|) + 20 \cdot \log(2) \approx A[\text{dB}] + 6[\text{dB}]$$

*Nota 2.- El Belio (o Bell) se define como una figura adimensional para expresar la ganancia de potencia de un sistema.*

$$\text{Ganancia de potencia } A[\text{B}] = \log\left(\frac{P_s}{P_e}\right)$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

La potencia está relacionada con la tensión o la corriente a través de la impedancia, por lo que se puede expresar la ganancia de potencia como:

$$\text{Ganancia de potencia } A[\text{dB}] = 10 \cdot \log\left(\frac{V_s^2/R_s}{V_e^2/R_e}\right)$$

$$\text{Ganancia de potencia } A[\text{dB}] = 10 \cdot \log\left(\frac{R_s \cdot I_s^2}{R_e \cdot I_e^2}\right)$$

**Únicamente** si las impedancias de entrada,  $R_e$ , y de salida,  $R_s$ , del sistema son iguales, se puede expresar la ganancia de potencia como:

$$\text{Ganancia de potencia } A[\text{dB}] = 10 \cdot \log\left(\frac{V_s^2}{V_e^2}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{V_s}{V_e}\right)$$

$$\text{Ganancia de potencia } A[\text{dB}] = 10 \cdot \log\left(\frac{I_s^2}{I_e^2}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{I_s}{I_e}\right)$$

Sin embargo, por analogía, es habitual expresar la **ganancia de tensión o de corriente** del sistema como:

$$\text{Ganancia de tensión } A[\text{dB}] = 20 \cdot \log\left(\frac{V_s}{V_e}\right); \text{ Ganancia de corriente } A[\text{dB}] = 20 \cdot \log\left(\frac{I_s}{I_e}\right)$$

Se denomina **frecuencia de corte** a aquella frecuencia en la que la potencia de la señal de salida  $P_s$  es la mitad de la potencia de la señal de entrada  $P_e$ .

Expresada en decibelios se obtendría,

$$A[\text{dB}] = 10 \cdot \log\left(\frac{P_s}{P_e}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{P_e/2}{P_e}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) = 10 \cdot (\log(1) - \log(2))$$

$$A[\text{dB}] = -10 \cdot \log(2) = -3,01\text{dB} \approx -3\text{dB}$$

Por lo tanto, la frecuencia de corte es aquella frecuencia en que la ganancia es  $-3\text{dB}$ , o “ha caído”  $3\text{dB}$ . Sin embargo, por analogía, es habitual expresar la frecuencia de corte de la ganancia de tensión o de corriente del sistema de la misma manera:

$$A[\text{dB}] = 20 \cdot \log\left(\frac{V_s}{V_e}\right) = -3,01\text{dB}; \log\left(\frac{V_s}{V_e}\right) = \frac{-3,01}{20} = -0,15$$

$$\text{alog}(-0,15) = 0,71 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por tanto, para la corriente o la tensión, la frecuencia de corte es cuando la relación entre el módulo de la tensión (o corriente) de salida y la de entrada es:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Las pendientes de los diagramas fase se describen habitualmente en °/década.

La ventaja de este método es que se transforman productos y cocientes de números complejos en sumas (con su signo) de logaritmos de módulos y en sumas (con su signo) de argumentos.

Se parte de la función de transferencia del sistema (por ejemplo, ganancia de un amplificador) **factorizada** en términos simples (es decir, conociendo los polos y ceros de la ganancia, tanto a frecuencias bajas como altas). Los distintos tipos de términos, su representación gráfica y numérica tanto de la amplitud o módulo de la función de transferencia (ganancia) como de la fase de la misma se deducen a continuación y encuentran resumidos en la Tabla I.

a) Términos constantes K:

$$A[dB] = 20 \cdot \log(K)$$

$$\psi(\omega) = 0^\circ \quad \forall K > 0$$

$$\psi(\omega) = -180^\circ \quad \forall K < 0$$

b) Polos y ceros en el origen  $s^{\pm n} = j\omega^{\pm n}$ :

$A(\omega)[dB] = 20 \cdot \log(\sqrt{\omega^{\pm 2n}}) = \pm n \cdot 20 \cdot \log(\omega)$ , varía  $\pm 20dB$  por cada década que varía  $\omega$

$$\psi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{0} = \pm n \cdot 90^\circ$$

c) Términos de primer orden  $(s + a)^{\pm n} = (j\omega + a)^{\pm n}$ :

$$A(\omega)[dB] = 20 \cdot \log\left(\sqrt{a^2 + \omega^2}^{\pm n}\right) = \pm n \cdot 20 \cdot \log\left(\sqrt{a^2 + \omega^2}\right)$$

Asintóticamente:

$$\pm n \cdot 20 \cdot \log(a) \quad \forall \omega \in (0, a)$$

$$\pm n \cdot 20 \cdot [\log(a) + \log \sqrt{2}] \quad \forall \omega = a, \text{ hay } \pm 3dB \text{ más que antes.}$$

$$\pm n \cdot 20 \cdot \log(\omega) \quad \forall \omega \in (a, \infty), \text{ varía } \pm 20dB \text{ por cada}$$

década que varía  $\omega$ .

$$\psi(\omega) = \pm n \arctan \frac{\omega}{a}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

d) Términos de segundo orden  $(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)^{\pm 1} = ((j\omega)^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2)^{\pm 1}$ :

$$A(\omega)[dB] = 20 \cdot \log \left( \sqrt{[\omega_n^2 - \omega^2]^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2} \right)$$

Asintóticamente:

$$\pm 20 \cdot \log (\omega_n^2) \quad \forall \omega \in (0, \omega_n)$$

$$\pm 20 \cdot \log (2\xi\omega_n^2) \approx \pm 20 \cdot \log (\omega_n^2) \quad \forall \omega = \omega_n, \text{ hay una sobreoscilación en}$$

$\omega_r$  de valor  $M_r^*$ .

$$\pm 20 \cdot \log (\omega^2) = \pm 40 \cdot \log (\omega) \quad \forall \omega \in (\omega_n, \infty), \text{ varía } \pm 40\text{dB por cada}$$

década que varía  $\omega$ .

$$* \text{siendo } \omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad \forall \xi \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ y } M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad \forall \xi \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\psi(\omega) = \pm \arctan \left[ \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right]$$

Asintóticamente:

$$\psi(\omega) = 0^\circ \quad \forall \omega \in (0, \omega_n/10)$$

$$\psi(\omega) = \pm 90^\circ / \text{dec} \quad \forall \omega \in (\omega_n/10, 10\omega_n)$$

$$\psi(\omega) = \pm 180^\circ \quad \forall \omega \in (10\omega_n, \infty)$$

La fase también depende de la amortiguación  $\xi$ .

e) Retardos puros  $e^{-sT} = e^{-j\omega T}$ :

$$A(\omega)[dB] = 0\text{dB}$$

$$\psi(\omega) = \omega T \text{ rad} = -57,3 \cdot \omega T^\circ$$

### 3 MÉTODO PRÁCTICO DE CONSTRUCCION DE DIAGRAMAS DE BODE

a) Expresar la función de transferencia en términos simples (factorizarla).

Ejemplo: Función de transferencia  $A(s) = \frac{3 \cdot (s+1)}{s+2}$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Frecuencias vs. términos	1		2
3	0	0	0
$s + 1$	0	1	1
$1/(s + 2)$	0	0	-1
Total	0	1	0

c) Se calcula un punto de referencia para comenzar a dibujar.

A bajas frecuencias:

$$A_{\omega \rightarrow 0} [dB] = 20 \log \frac{3 \cdot (0+1)}{0+2} = 3,52dB$$

A altas frecuencias:

$$A_{\omega \rightarrow \infty} [dB] = 20 \log(3) + 20 \log\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 20 \log(3) = 9,5dB$$

d) Para el diagrama de fases se construye una tabla donde las columnas representen las frecuencias a las que hay un cambio de pendiente y las filas los distintos términos. Se rellena con la aportación de cada término a la pendiente en múltiplo de  $45^\circ/\text{dec}$ .

Frecuencias vs. términos	0,1		0,2	10	20
3	0	0	0	0	0
$s + 1$	0	1	1	0	0
$1/(s + 2)$	0	0	-1	-1	0
Total	0	1	0	-1	0

e) Se calcula un punto de referencia para comenzar a dibujar.

A bajas frecuencias:

$$\psi_{\omega \rightarrow 0} = (n_{z-\text{origen}} - n_{p-\text{origen}}) \cdot 90^\circ - \psi(K)$$

*Nota.- En sistemas de fase no mínima (algún polo o cero en el semiplano complejo positivo, hay que añadir un*

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

f) Se dibuja los diagramas a partir de los datos anteriores.

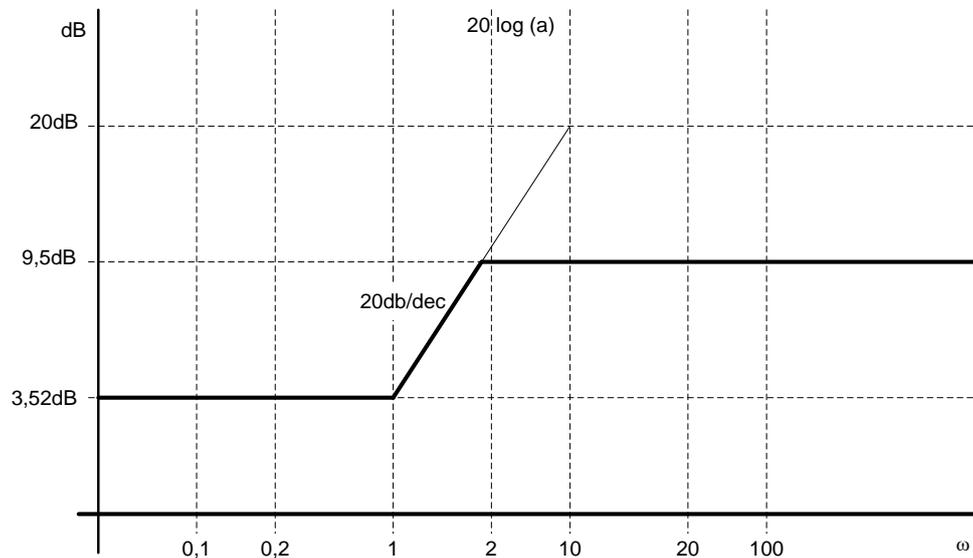


Diagrama de Bode asintótico. Módulo

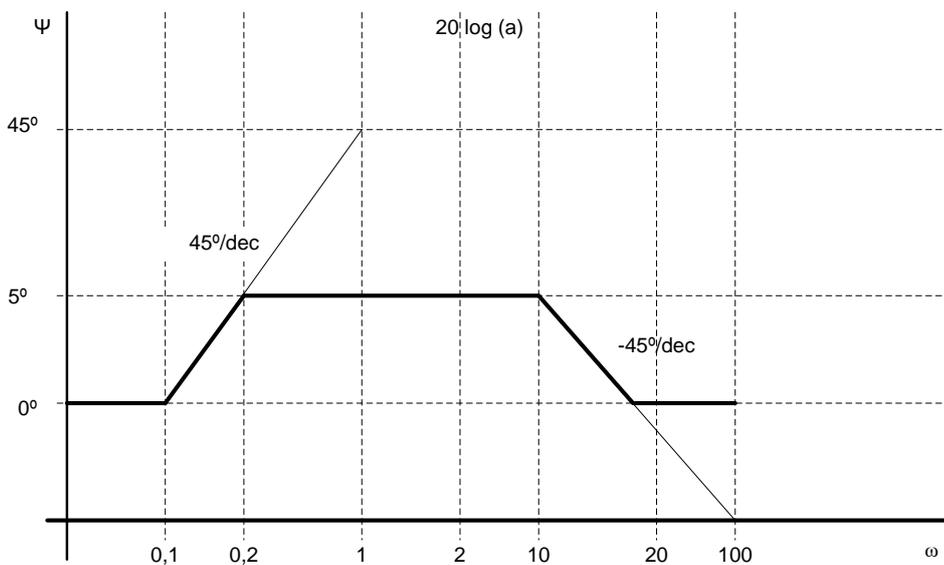


Diagrama de Bode asintótico. Fase

Cartagena99

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

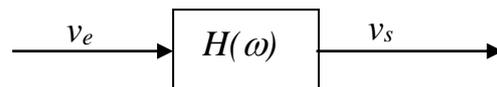
---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

## ANEXO A: Módulo y fase de la función de transferencia de un circuito.

### a) Medida del módulo y fase de la función de transferencia de un circuito.

En general cualquier circuito en régimen senoidal se puede estudiar como una “caja negra” caracterizada por una función de transferencia  $H(\omega)$  compleja, es decir  $H(\omega)$  es un número complejo que depende de  $\omega$ .



Si tenemos una onda senoidal de entrada  $v_e$ , con frecuencia  $\omega_0$ , la salida del sistema viene dada por

$$v_s(\omega_0) = H(\omega_0) v_e(\omega_0)$$

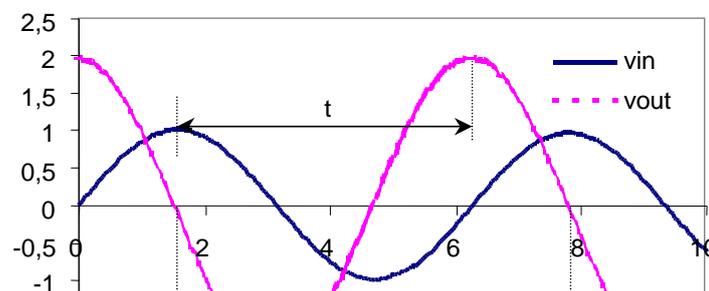
Para medir el módulo y la fase de esta función de transferencia a una frecuencia  $\omega$  determinada, bastará con visualizar en un osciloscopio las formas de onda de  $v_e$  y  $v_s$ . El módulo de  $H(\omega)$  se halla dividiendo la amplitud de la onda de salida entre la amplitud de la onda de entrada, es decir:

$$|H(\omega)| = \frac{|v_s(\omega)|}{|v_e(\omega)|}$$

Para medir el desfase en radianes o en grados es necesario leer el desfase en la escala de tiempo de un osciloscopio y después convertir los segundos a radianes o grados. Se debe recordar que un periodo  $T$  (segundos) de una onda de una determinada frecuencia ( $f = \frac{1}{T}$ ) son  $2\pi$  radianes, por lo que un tiempo de desfase  $t$  (distancia en segundos entre dos máximos o dos mínimos) equivale a  $x$  radianes o grados:

$$x_{rad} = \frac{2\pi}{T} t; \quad x_{grados} = \frac{360^\circ}{T} t$$

En la siguiente figura se puede ver un ejemplo que ilustra lo anterior.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

### b) Cálculo del módulo y fase de la función de transferencia.

Mediante operaciones habituales de los números complejos, si se tiene una función de transferencia compleja  $H(\omega)$  expresada como el cociente de dos números complejos, el módulo de dicha función será el cociente de los módulos de dichos números complejos y la fase será la diferencia entre la fase del numerador y la del denominador, es decir si

$$H(\omega) = \frac{a + jb}{c + jd}$$

entonces, el módulo de  $H(\omega)$  es

$$|H(\omega)| = \frac{|a + jb|}{|c + jd|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

y la fase de  $H(\omega)$  es

$$\text{fase}(H(\omega)) = \text{fase}(a + jb) - \text{fase}(c + jd) = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) - \arctg\left(\frac{d}{c}\right)$$

### c) Cálculo de la frecuencia de corte.

Como se ha explicado anteriormente, se denomina **frecuencia de corte** a aquella frecuencia en la que la potencia de la señal de salida  $P_s$  es la mitad de la potencia de la señal de entrada  $P_e$ .

Expresada en decibelios se obtendría,

$$A[dB] = 10 \cdot \log\left(\frac{P_s}{P_e}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{P_e/2}{P_e}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) = 10 \cdot (\log(1) - \log(2))$$

$$A[dB] = -10 \cdot \log(2) = -3,01dB \approx -3dB$$

Por lo tanto, la frecuencia de corte es aquella frecuencia en que la ganancia es  $-3dB$ , o "ha caído"  $3dB$ . Sin embargo, por analogía, es habitual expresar la frecuencia de corte de la ganancia de tensión o de corriente del sistema de la misma manera:

$$A[dB] = 20 \cdot \log\left(\frac{V_s}{V_e}\right) = -3,01dB; \log\left(\frac{V_s}{V_e}\right) = \frac{-3,01}{20} = -0,15$$

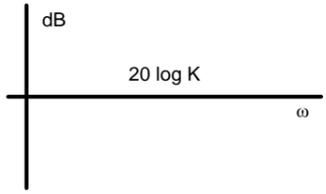
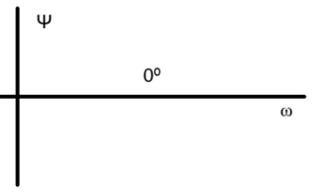
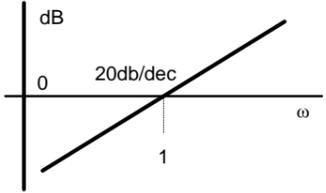
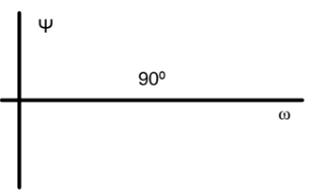
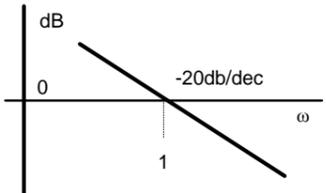
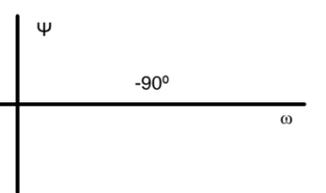
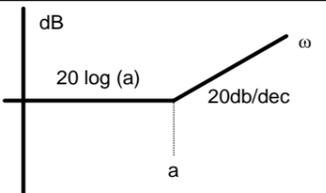
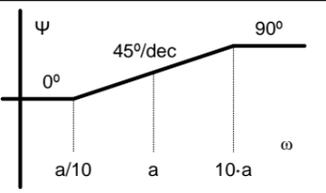
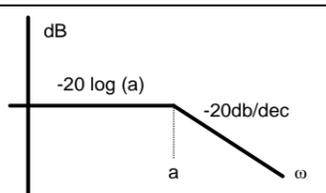
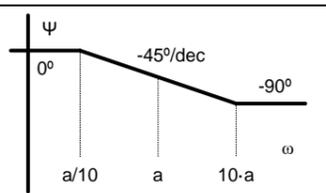
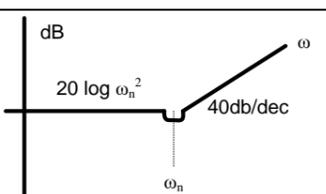
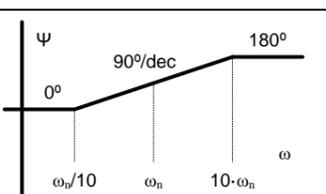
$$\log(-0,15) = 0,71 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por tanto, para la corriente o la tensión, la frecuencia de corte es cuando la relación entre el

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Términos	$A = 20\log  A(j\omega) $	Comentarios	$\varphi = \arg[A(j\omega)]$	Comentarios	Otros
Ganancia $K$		Valor constante $20 \cdot \log(K)$		Valor constante $0^\circ$	Si $K < 0$ Fase = $180^\circ$
Cero en el origen $s^n$		Pendiente 20dB/dec $A = 0[dB]$ en $\omega = 1$		Valor constante $90^\circ$	Si $n > 1$ la fase y la amplitud se multiplican por $n$ para todos los casos.
Polo en el origen $1/s^n$		Pendiente -20dB/dec $A = 0[dB]$ en $\omega = 1$		Valor constante $-90^\circ$	
Cero simple $(s + a)^n$		$20 \cdot \log(a) \quad \forall \omega \leq a$ Pendiente 20dB/dec $\forall \omega > a$		$(0, a/10) \quad 0^\circ$ $(a/10, 10a) \quad 45^\circ/\text{dec}$ $(10a, \infty) \quad 90^\circ$	Para $\omega = a$ $\psi = 45^\circ$
Polo simple $1/(s + a)^n$		$-20 \cdot \log(a) \quad \forall \omega \leq a$ Pendiente -20dB/dec $\forall \omega > a$		$(0, a/10) \quad 0^\circ$ $(a/10, 10a) \quad -45^\circ/\text{dec}$ $(10a, \infty) \quad -90^\circ$	Para $\omega = a$ $\psi = -45^\circ$
Cero complejo conjugado $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$		$20 \cdot \log \omega_n^2 \quad \forall \omega \leq \omega_n$ Pendiente 40dB/dec $\forall \omega > \omega_n$		$(0, \omega_n/10) \quad 0^\circ$ $(\omega_n/10, 10\omega_n) \quad 90^\circ/\text{dec}$ $(10\omega_n, \infty) \quad 180^\circ$	Siendo $(s + a)^2 + b^2$ con amort. $\xi = \tan \frac{b}{a} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ : - La frec. de resonancia $\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70