

1. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ la sucesión de números reales definida, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, mediante

$$x_{2n-1} = 2n - 1,$$

$$x_{2n} = 0.$$

Estudiar si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es convergente en el espacio topológico:

a) (R, T_{CF}) , siendo $T_{CF} = \{\emptyset, R\} \cup \{A \subset R \mid R - A \text{ es finito}\}$.

b) (R, T_{CN}) , siendo $T_{CN} = \{\emptyset, R\} \cup \{B \subset R \mid R - B \text{ es numerable}\}$.

c) (R, T) , siendo $T = \{\emptyset, R\} \cup \{(a, \rightarrow) \mid a \in R\}$.

En caso afirmativo, determinar el conjunto de todos los puntos que son límite de la sucesión dada, en el espacio topológico correspondiente.

Justifique sus respuestas.

2. Sean

$$(X_1, T_1) = (X_2, T_2) = (R, T_u),$$

consideremos el producto topológico

$$(R \times R, T_P) = (X_1, T_1) \times (X_2, T_2),$$

y el subespacio topológico (X, T) de $(R \times R, T_P)$ definido mediante

$$X = \{(x, y) \in R \times R \mid (y = 0) \text{ o } (y = 1)\},$$

$$T = (T_P)_X, \text{ topología de } X \text{ relativa de la topología producto } T_P \text{ de } R \times R.$$

Estudiar si:

a) (X, T) es de Hausdorff.

b) (X, T) cumple el Segundo Axioma de Numerabilidad.

c) (X, T) es compacto.

d) (X, T) es conexo, y si (X, T) es conexo por caminos.

Justifique sus respuestas.

3. Sean R el conjunto de los números reales, T_u la topología usual de R , $T(B)$ la topología cuya base es

$$B = \{[a, b) \mid a, b \in R, a < b\}.$$

Estudiar si el espacio topológico (R, T_u) es homeomorfo al espacio topológico $(R, T(B))$.

Justifique sus respuestas.

Nota 1: Cada problema se calificará sobre 10 puntos y después se calculará la media aritmética de las tres calificaciones así obtenidas.

Nota 2: Material autorizado: Ninguno.