

1. Sea X el subespacio topológico de $(\mathbb{R}^3, T_u^3)$ definido por

$$\begin{aligned} X &= A \cup B, \\ A &= \{ (x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \}, \\ B &= \{ (0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \}. \end{aligned}$$

- a) Estudiar si el espacio topológico X es contractible.
b) Determinar el grupo fundamental de homotopía del espacio topológico X .
Justifique sus respuestas.

2. Un grupo abeliano G está definido por un conjunto de generadores $\{a, b, c\}$ y un sistema completo de relaciones para estos generadores

$$2a + b = 0.$$

$$a + 5b = 0.$$

- a) Determinar el rango o número de Betti de G . Probar que el conjunto G es infinito numerable.
b) Calcular los coeficientes de torsión de G . Sea T el subgrupo de torsión de G . Determinar el número de elementos del conjunto T .
c) Escribir G en su forma canónica dada por el Teorema de Estructura de Grupos Abelianos de Tipo Finito.

Justifique sus respuestas.

3. En $(\mathbb{R}^2, T_u^2)$, consideramos los puntos

$$A = (1, 1), B = (0, 2), C = (-1, 1), D = (-2, 0), E = (2, 0),$$

y sea K el complejo simplicial geométrico orientado definido por

$$\begin{aligned} K &= \{ \langle A \rangle, \langle B \rangle, \langle C \rangle, \langle D \rangle, \langle E \rangle, \\ &\langle A, B \rangle, \langle B, C \rangle, \langle C, A \rangle, \langle C, D \rangle, \langle D, E \rangle, \langle E, A \rangle, \\ &\langle A, B, C \rangle \}. \end{aligned}$$

Determinar los grupos de homología simplicial $H_1(K)$ y $H_2(K)$.

Estudiar si el poliedro geométrico $(|K|, (T_u^2)_{|K|})$ es contractible.

Justifique sus respuestas.

Nota 1: Cada problema se calificará sobre 10 puntos y después se calculará la media aritmética de las tres calificaciones así obtenidas.

Nota 2: Material autorizado: Ninguno.