

1. En (\mathbb{R}^2, T_u^2) , se considera los subconjuntos

$$\begin{aligned} A &= S^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}, \\ B &= \{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \}, \\ X &= A \cup B. \end{aligned}$$

Se pide:

a) Estudiar si el espacio topológico $(A, (T_u^2)_A)$ es del mismo tipo de homotopía que el espacio topológico $(X, (T_u^2)_X)$.

b) Estudiar si el espacio topológico $(X, (T_u^2)_X)$ es contractible.

Justifique sus respuestas.

2. Sea $f : Z \times Z \rightarrow Z$ el único homomorfismo de grupos tal que

$$f(1, 0) = 32,$$

$$f(0, 1) = 11.$$

a) Estudiar si f es *sobreyectivo* (o *suprayectivo*).

b) En caso afirmativo, determinar un elemento $(a, b) \in Z \times Z$ tal que

$$f(a, b) = 1.$$

Justifique sus respuestas.

3. En (\mathbb{R}^2, T_u^2) , sean

$$\begin{aligned} C &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 2)^2 + y^2 \leq 1 \}, \\ D &= \{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 1 \}, \\ E &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + y^2 \leq 1 \}, \\ X &= C \cup D \cup E. \end{aligned}$$

a) *Triangular* X , es decir, obtener un complejo simplicial geométrico orientado K tal que

$(X, (T_u^2)_X)$ sea *homeomorfo* al poliedro geométrico $(|K|, (T_u^2)|K|)$.

b) *Determinar los grupos de homología simplicial* $H_1(K)$ y $H_2(K)$.

c) *Estudiar si el espacio topológico* $(X, (T_u^2)_X)$ es contractible.

Justifique sus respuestas.

Nota 1: Cada problema se calificará sobre 10 puntos y después se calculará la media aritmética de las tres calificaciones así obtenidas.

Nota 2: Material autorizado: Ninguno.