

1. (5 puntos)

(a) Sea X un subespacio de (R^n, T_u) y sea p_0 un punto de X tal que para todo $p \in X$ el segmento $[p_0, p]$ de R^n está contenido en X . Esto se expresa diciendo que el conjunto X es estrellado desde el punto p_0 .

Pruebe que X es simplemente conexo.

(b) Determine los grupos fundamentales $\pi(Q; 0)$ y $\pi(S^1 \times S^1; (a, a))$, siendo Q el subespacio de (R, T_u) definido por los números racionales, $S^1 = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $a = (1, 0)$.

Justifique sus respuestas.

2. (5 puntos)

Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow R^n$ una aplicación continua e inyectiva, con $n > 1$, y sea $Y = f([0, 1] \times [0, 1] - (0, 1) \times (0, 1))$.

(a) Pruebe que Y es un poliedro curvilíneo compacto.

(b) Determine el grupo de homología simplicial $H_1(Y)$.

Justifique sus respuestas. Observe que $[0, 1] \times [0, 1] - (0, 1) \times (0, 1)$ es el subespacio de $[0, 1] \times [0, 1]$ formado por los lados del cuadrado.