E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Septiembre 2015. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Estudie si el punto $(0,0)$ es un punto doble de la curva general dada por las ecuaciones

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{t^3-t}{1+t^2}.$$

Solución: Sí lo es, porque

$$\begin{array}{lllllll} x(t)=0 & \Longleftrightarrow & 1-t^2=0 & \Longleftrightarrow & t=\pm 1, & & \\ y(t)=0 & \Longleftrightarrow & t^3-t=0 & \Longleftrightarrow & t\left(t^2-1\right)=0 & \Longleftrightarrow & t=0 \text{ o } t=\pm 1. \end{array}$$

Entonces, este punto es imagen de $t=1$ y de $t=-1$.

2. (1 PUNTO) Escriba las ecuaciones de Frenet para curvas planas.

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= k(s)\,\mathbf{n}(s), \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -k(s)\,\mathbf{t}(s), \end{aligned}$$

3. (1 PUNTO) Estudie si la parametrización

$$x = u, \qquad y = u - v, \qquad z = u^2 + v^2$$

con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ es regular.

Solución: Sí lo es, porque si $\mathbf{x}(u,v) = (u, u-v, u^2+v^2)$, entonces

$$rg\begin{pmatrix} D_1 r_1(u,v) & D_1 r_2(u,v) & D_1 r_3(u,v) \\ D_2 r_1(u,v) & D_2 r_2(u,v) & D_2 r_3(u,v) \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2u \\ 0 & -1 & 2v \end{pmatrix} = 2$$

para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

4. (1 PUNTO) Sea S la superficie parametrizada por

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u^2, e^v + \cos u, u+v\right)$$

para $u, v \in \mathbb{R}$. Determinar el vector normal a la superficie en un punto $\mathbf{x}(u,v)$.

Solución:

En un punto $\mathbf{x}(u,v)$ se tiene

$$\mathbf{x}_u = (2u, -\operatorname{sen} u, 1), \; \mathbf{x}_v = (0, e^v, 1).$$

El vector normal (unitario) es

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(u,v) &= \frac{\mathbf{x}_u(u,v)\times\mathbf{x}_v(u,v)}{\|\mathbf{x}_u(u,v)\times\mathbf{x}_v(u,v)\|} \\
&= \frac{(2u,-\operatorname{sen}u,1)\times(0,e^v,1)}{\|(2u,-\operatorname{sen}u,1)\times(0,e^v,1)\|} \\
&= \frac{(-\operatorname{sen}u-e^v,-2u,2ue^v)}{\|(-\operatorname{sen}u-e^v,-2u,2ue^v)\|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{sen}u+e^v)^2+4u^2+4u^2e^{2v}}}(-\operatorname{sen}u-e^v,-2u,2ue^v).
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Sea f la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida como

$$f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\operatorname{sen}y).$$

Razone:

(a) si esta función es localmente invertible en cada punto de $\mathbb{R}^2$,

(b) si tiene inversa global.

Solución: Es localmente invertible en cada punto de $\mathbb{R}^2$, pero no tiene inversa global porque no es inyectiva.

(a) Es de clase infinito en $\mathbb{R}^2$ por ser indefinidamente derivable. Además el determinante de la matriz jacobiana en un punto (x,y) es

$$\det f'(x,y)=\begin{vmatrix} e^x\cos y & -e^x\operatorname{sen}y \\ e^x\operatorname{sen}y & e^x\cos y\end{vmatrix}=e^{2x}\cos^2y+e^{2x}\operatorname{sen}^2y=e^{2x}$$

y esto es mayor que 0. para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Podemos asegurar que f tiene inversa local en un entorno de cada punto en donde este determinante es distinto de 0. Como no se anula en ningún punto, sabemos que f es localmente invertible en cada punto de $\mathbb{R}^2$.

(b) Pero la función no tiene inversa global porque no es inyectiva. La razón está en que aparecen las razones trigonométricas y entonces:

$$f(x,y)=f(x,y+2\pi).$$

Nota: La puntuación de cada uno de los apartados es 1.5 puntos.

6. (3 PUNTOS) Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t)=\left(t^2,4t,t^3\right).$$

(a) Determine el radio de curvatura en $\mathbf{x}(0)=(0,0,0)$.

(b) Determine la recta tangente en $\mathbf{x}(0)=(0,0,0)$.

(c) Determine el plano osculador en $\mathbf{x}(0)=(0,0,0)$.

Nota: La puntuación de cada uno de los apartados es 1 punto.

(a) El radio de curvatura R es el inverso de la curvatura k. Sabemos que

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Para esta curva, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= \left(2t, 4, 3t^2\right), \quad \mathbf{x}''(t) = (2, 0, 6t), \\
\mathbf{x}'(0) &= (0, 4, 0), \quad \mathbf{x}''(t) = (2, 0, 0), \quad \|\mathbf{x}'(0)\| = 4, \\
\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8k, \quad \|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\| = 8.
\end{aligned}$$

Entonces

$$k(0) = \frac{8}{4^3} = \frac{1}{8},$$

y el radio de curvatura es

$$R(0) = \frac{1}{1/8} = 8.$$

(b) Un vector tangente en $t = 0$ es el vector

$$\mathbf{x}'(0) = (0, 4, 0).$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$\begin{aligned}
(x, y, z)(t) &= \mathbf{x}(0) + t\mathbf{x}'(0) \\
&= (0, 0, 0) + (0, 4t, 0).
\end{aligned}$$

(c) El vector normal tiene la misma dirección y sentido que

$$(\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t).$$

En este caso, es

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) &= ((0, 4, 0) \times (2, 0, 0)) \times (0, 4, 0) = (0, 0, -8) \times (0, 4, 0) \\
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (32, 0, 0).
\end{aligned}$$

Por eso, el vector normal es el vector

$$\mathbf{n}(0) = (1, 0, 0).$$

El vector binormal es

$$\mathbf{b}(0) = (0, 1, 0) \times (1, 0, 0) = (0, 0, -1).$$

Por eso, el osculador es

$$\begin{aligned}
((x, y, z) - \mathbf{x}(0)) \cdot \mathbf{b}(0) = 0 &\Leftrightarrow ((x, y, z) - (0, 0, 0)) \cdot (0, 0, -1) = 0 \\
&\Leftrightarrow z = 0.
\end{aligned}$$

Este apartado también se puede resolver teniendo en cuenta que un punto (x, y, z) del plano osculador va a verificar:

$$\begin{aligned}
0 &= \det\left(\mathbf{x}'(0), \mathbf{x}''(0), (x, y, z) - \mathbf{x}(0)\right) \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -8z.
\end{aligned}$$

Por eso, la ecuación del plano osculador en $(0, 0, 0)$ es:

$$z = 0.$$