E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Febrero 2016. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Considere la transformación afín en el plano $f(x) = Ax + b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 30 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Pruebe que f es una isometría.

Solución: Para que f sea una isometría, A debe ser una matriz ortogonal, es decir, $AA^t = I$, donde I es la matriz identidad. Comprobémoslo:

$$AA^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I.$$

2. (1 PUNTO) Defina polinomios de Bernstein.

Solución: Son polinomios de grado n, cuya expresión es

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}.$$

3. (1 PUNTO) Sea C una curva (llamada de Viviani) dada por la ecuación paramétrica

$$\mathbf{x}(t) = \left(1 + \cos t, \operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

Calcule el vector binormal en el punto $\mathbf{x}(0)$.

Solución: Se tiene que

$$(2,0,0) = \mathbf{x}(0)$$

y por ello calculamos

$$\mathbf{x}'(t) = \left(-\operatorname{sen} t, \cos t, \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right), \qquad \mathbf{x}'(0) = (0,1,1);$$
$$\mathbf{x}''(t) = \left(-\cos t, -\operatorname{sen} t, -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right), \quad \mathbf{x}''(0) = (-1,0,0).$$

Por tanto, la dirección del vector binormal es la del vector

$$\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -j + k,$$

o equivalentemente, el vector $(0,-1,1)$. Como el vector binormal es unitario,

$$\mathbf{b}(0)=\frac{(0,-1,1)}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}}=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

4. (1 PUNTO) Sea $\mathbf{x}(u,v)$, para $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ una parametrización de una superficie. Defina punto regular de la superficie y explique qué significa que una parametrización es regular.

   Solución: Se dice que el punto de la superficie $\mathbf{x}(u_0,v_0)$ es regular si la matriz cuyas las (o columnas) son las derivadas parciales tiene rango 2 (es decir, si la matriz jacobiana tiene rango 2). Esto es equivalente a decir que los vectores $\mathbf{x}_u(u_0,v_0)$ y $\mathbf{x}_v(u_0,v_0)$ son linealmente independientes, o que

$$\mathbf{x}_u(u_0,v_0)\times\mathbf{x}_v(u_0,v_0)\neq 0.$$

   Una parametrización es regular si todos sus puntos son regulares.

   EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Sea C la la curva dada por

$$\mathbf{x}(t)=\left(t^5-t,t^3-t,t^2-1\right).$$

   para $t\in[-2,2]$.

   (a) Estudie si es una curva regular y si $(0,0,0)$ es un punto múltiple.

   (b) Determine la función curvatura. Escriba qué condición deben cumplir los puntos de esta curva para que sean puntos de inflexión. No es necesario hacer todos los cálculos, pero sí indicar todas las operaciones y todos los pasos.

   (c) Calcule las ecuaciones de las rectas tangente y normal que pasan por $\mathbf{x}(0)$.

   Nota: Cada apartado vale 1 punto.

   Solución:

   (a) La curva es regular si no tiene puntos singulares, es decir, puntos donde el vector derivada sea $(0,0,0)$. Como el vector derivada es

$$\mathbf{x}'(t)=\left(5t^4-1,3t^2-1,2t\right),$$

   este vector se anula y y sólo si

$$\begin{aligned}5t^4-1&=0,\\3t^2-1&=0,\\2t&=0.\end{aligned}$$

   Esto no ocurre simultáneamente para ningún valor de t, por tanto, es una curva regular. Para que sea $(0,0,0)$ sea punto múltiple debe ser

$$\lambda^5-\lambda=0,\lambda^3-\lambda=0,\lambda^2-1=0$$

   para dos valores distintos de λ. Buscamos si existen estos valores:

$$\begin{aligned}\lambda^5-\lambda=0 &\iff \lambda\left(\lambda^4-1\right)=0, &&\iff \lambda=\pm1,\lambda=0,\\ \lambda^3-\lambda=0 &\iff \lambda\left(\lambda^2-1\right)=0, &&\iff \lambda=\pm1,\lambda=0,\\ \lambda^2-1=0 &\iff (\lambda-1)(\lambda+1)=0 &&\iff \lambda=\pm1.\end{aligned}$$

   en $[-2,2]$. Por eso, es un punto múltiple de multiplicidad 3.

(b) Sabemos que para curvas no parametrizadas por la longitud de arco, se tiene:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Para esta curva, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= \left(5t^4 - 1, 3t^2 - 1, 2t\right), \\
\mathbf{x}''(t) &= \left(20t^3, 6t, 2\right), \\
\|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{\left(5t^4 - 1\right)^2 + \left(3t^2 - 1\right)^2 + (2t)^2} \\
&= \sqrt{25t^8 - t^4 - 2t^2 + 2}, \\
\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5t^4 - 1 & 3t^2 - 1 & 2t \\ 20t^3 & 6t & 2 \end{vmatrix} \\
&= \left(5t^4 - 1, 3t^2 - 1, 2t\right) \times \left(20t^3, 6t, 2\right) \\
&= \left(-6t^2 - 2, 30t^4 + 2, 20t^3 - 6t - 30t^5\right).
\end{aligned}$$

Su módulo es

$$m = \sqrt{\left(-6t^2 - 2\right)^2 + \left(30t^4 + 2\right)^2 + \left(20t^3 - 6t - 30t^5\right)^2}.$$

Por tanto, la función curvatura es

$$\begin{aligned}
k(t) &= \frac{\sqrt{\left(-6t^2 - 2\right)^2 + \left(30t^4 + 2\right)^2 + \left(20t^3 - 6t - 30t^5\right)^2}}{\sqrt{\left(5t^4 - 1\right)^2 + \left(3t^2 - 1\right)^2 + (2t)^2}^3} \\
&= \frac{\sqrt{60t^2 - 84t^4 + 760t^6 - 300t^8 + 900t^{10} + 8}}{\sqrt{\left(5t^4 - 1\right)^2 + \left(3t^2 - 1\right)^2 + (2t)^2}^3} \\
&= \frac{4\sqrt{15t^2 - 21t^4 + 180t^6 - 75t^8 + 225t^{10} + 2}}{\sqrt{\left(5t^4 - 1\right)^2 + \left(3t^2 - 1\right)^2 + (2t)^2}^3}.
\end{aligned}$$

Los puntos de inflexión son aquellos donde la curvatura $k(t)$ vale 0. Esto ocurre al menos en los puntos

$$15t^2 - 21t^4 + 190t^6 - 75t^8 + 225t^{10} + 2 = 0.$$

(c) La recta tangente que pasa por $\mathbf{x}(0) = (0, 0, -1)$ tiene por vector director a

$$\mathbf{x}'(0) = (-1, -1, 0).$$

por tanto, su ecuación paramétrica es

$$\alpha(\lambda) = (0, 0, -1) + \lambda(-1, -1, 0) = (-\lambda, -\lambda, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La recta normal en $\mathbf{x}(0)$ pasa por $(0, 0, -1)$ y un vector director suyo esLa recta tangente que pasa por $\mathbf{x}(0) = (0, 0, -1)$ tiene por vector director a

$$\mathbf{x}'(0) = (-1, -1, 0).$$

por tanto, su ecuación paramétrica es

$$\alpha(\lambda) = (0, 0, -1) + \lambda(-1, -1, 0) = (-\lambda, -\lambda, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

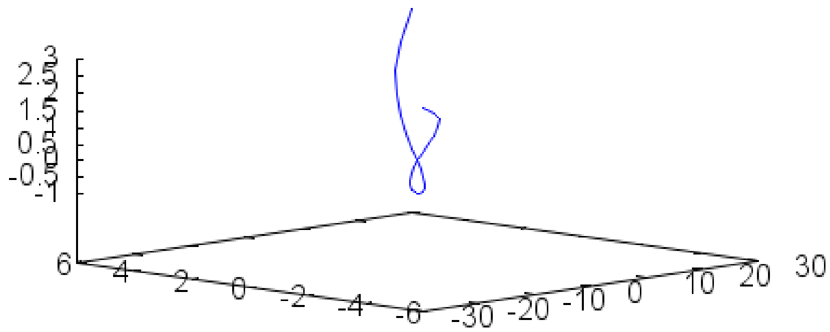
La recta normal en $\mathbf{x}(0)$ pasa por $(0,0,-1)$ y un vector director suyo es

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}'(0)\times\mathbf{x}''(0))\times\mathbf{x}'(0) &= ((-1,-1,0)\times(0,0,2))\times(-1,-1,0)\\ &= (-2,2,0)\times(-1,-1,0)=(0,0,4)\,.\end{aligned}$$

Como este vector tiene la misma dirección que $(0,0,1)$, podemos escribir su ecuación paramétrica como

$$\beta(\lambda)=(0,0,-1)+\lambda(0,0,1)=(0,0,-1+\lambda)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Una representación gráfica de esta curva es la siguiente:



Se ha representado utilizando las sentencias de `Maxima`:

```
load(draw)$
wxdraw3d(parametric(t^5-t,t^3-t, t^2-1,t,-2,2),view=[71,314]);
```

6. (3 PUNTOS) Sea S la superficie dada por

$$z=x^2+y^2.$$

(a) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental.

(b) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental. Clasifique los puntos de la superficie.

(c) Determine la curvatura de Gauss y la curvatura media de la superficie en el punto $(1,0,1)$.

Nota: Cada apartado vale 1 punto.

Solución:

(a) La superficie está dada por la ecuación $\mathbf{x}(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$. Entonces:

$$\mathbf{x}_u(u,v)=(1,0,2u)\,,\quad \mathbf{x}_v(u,v)=(0,1,2v)\,,$$

$$\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 0 & 2u\\ 0 & 1 & 2v\end{vmatrix}=-2u\mathbf{i}-2v\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

Entonces los coeficientes de la primera forma fundamental son:

$$\begin{aligned}E&=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u=(1,0,2u)\cdot(1,0,2u)=1+4u^2,\\ F&=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=(1,0,2u)\cdot(0,1,2v)=4uv,\\ G&=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v=(0,1,2v)\cdot(0,1,2v)=1+4v^2.\end{aligned}$$

(b) Tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(u,v)\times\mathbf{x}_v(u,v) &= (-2u,-2v,1)\,,\\
\mathbf{N}(u,v) &= \frac{\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\|}=\frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}(-2u,-2v,1)\,,\\
\mathbf{x}_{uu}(u,v) &= (0,0,2)\,,\quad \mathbf{x}_{uv}(u,v)=(0,0,0)\,,\\
\mathbf{x}_{vv}(u,v) &= (0,0,2)\,.
\end{aligned}$$

Los coeficientes de la segunda forma fundamental son:

$$\begin{aligned}
e &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{u\,u}=\frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}(-2u,-2v,1)\cdot(0,0,2)=\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}},\\
f &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uv}=\frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}(-2u,-2v,1)\cdot(0,0,0)=0,\\
g &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{vv}=\frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}(-2u,-2v,1)\cdot(0,0,2)=\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}.
\end{aligned}$$

Podemos clasificar los puntos calculamos

$$eg-f^2=\left(\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right)^2>0$$

para todo $(u.v)$. Luego todos los puntos son elípticos.

(c) Tenemos que $(1,0,1)=\mathbf{x}(1,0)$. En este punto, tenemos:

$$\begin{aligned}
E &= 1+4(1)^2=5,\\
F &= 4\cdot1\cdot0=0,\\
G &= 1+4\cdot0^2=1,\\
e &= \frac{2}{\sqrt{4(1)^2+4\cdot0^2+1}}=\frac{2}{\sqrt5},\\
f &= 0,\\
g &= \frac{2}{\sqrt{4(1)^2+4\cdot0^2+1}}=\frac{2}{\sqrt5}.
\end{aligned}$$

La curvatura de Gauss es

$$K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=\frac{\frac{2}{\sqrt5}\frac{2}{\sqrt5}-0}{5\cdot1}=\frac{4}{25}.$$

La curvatura media es

$$H=\frac{Eg-2Ff+Ge}{2(EG-F^2)}=\frac{5\frac{2}{\sqrt5}+1\frac{2}{\sqrt5}-0}{2(5\cdot1-0)}=\frac{6}{25}\sqrt5.$$

E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Febrero 2016. Modelo B

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Sea $f(x,y) = (e^x y^4, y\cos x^3)$. Determinar su matriz jacobiana.

   Solución:
$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x y^4 & 4e^x y^3 \\ -3yx^2 \operatorname{sen} x^3 & \cos x^3 \end{pmatrix}.$$

2. (1 PUNTO) Estudie si la curva $\mathbf{x} : [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{x}(t) = (\cos t, e^t - t, t^4)$ es regular.

   Solución: Una curva es regular si sus componentes son diferenciables y además no se anulan a la vez (es decir, si no tiene puntos singulares, o puntos donde $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{0}$). En esta curva, las componentes son diferenciables, porque $\cos t$, e^t, los polinomios y sus sumas lo son. Se cumple, entonces, la primera condición. Vamos a ver si hay algún t para el que $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{0}$:
$$\mathbf{x}'(t) = \left(-\operatorname{sen} t, e^t - 1, 4t^3\right) = (0,0,0)$$
$$\iff \begin{cases} \operatorname{sen} t = 0 \Longrightarrow t = k\pi, \\ e^t - 1 = 0 \Longrightarrow t = 0, \\ 4t^3 = 0 \Longrightarrow t = 0. \end{cases}$$
   Observamos que
$$\mathbf{x}'(0) = (0,0,0)$$
   por lo que la curva no es regular, al ser $t = 0$ un punto singular.

3. (1 PUNTO) Demuestre que la curvatura de una recta es 0.

   Solución: Siempre podemos parametrizar la curva por la longitud de arco y determinar su curvatura, sin perder generalidad. Sabemos que una recta parametrizada por el arco está dada por la ecuación
$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{p} + s\mathbf{v},$$
   donde $\mathbf{p}$ es un punto por el que pasa la recta y $\mathbf{v}$ es un vector unitario que es el vector director de la recta. Además, sabemos que
$$\mathbf{x}'(s) = \mathbf{v}, \quad \|\mathbf{x}'(s)\| = \|\mathbf{v}\| = 1.$$
   Por eso,
$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{x}''(s) = 0, \quad k(s) = 0.$$
   Intuitivamente confirmamos este resultado, porque una recta no es una curva.

   No es válido el razonamiento de que en una recta la aceleración es el vector nulo, porque esto sólo es así si está parametrizada por la longitud de arco. De hecho, el ejercicio 18 de "Notas de Geometría diferencial" pide que se encuentre una parametrización de una recta recorreida a velocidad no constante. Como ejemplo sirve: $(1 - \cos t, -1 + 3\cos t)$.

4. (1 PUNTO) Determínense el vector tangente y la recta tangente, en $\mathbf{x}(0)$ a la curva de ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^2 \cos t, t\operatorname{sen} t, 3t\right).$$

Solución: Tenemos:

$$\mathbf{x}'(t) = \left(2t\cos t - t^2 \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - t\cos t, 3\right), \ \mathbf{x}'(0) = (0,0,3).$$

Luego el vector tangente unitario es $(0,0,1)$. Además, $\mathbf{x}(0) = (0,0,0)$. Por tanto, la recta tangente es

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(0,0,3).$$

EJERCICIOS

5. (3 PUNTOS) Sea la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (t^3 + t^2 - t - 1, t^2 - 1).$$

(a) Escríbase como una curva de Bézier considerando $t \in [0,1]$.

(b) Estudie si es una curva regular para $t \in \mathbb{R}$. Estudie si tiene puntos múltiples para $t \in \mathbb{R}$ y determínelos, en caso de que los tenga.

Nota: Cada apartado puntúa 1.5 puntos.

Solución:

(a) Como el grado máximo de los polinomios que dan las componentes es 3, entonces se puede escribir como una curva de Bézier a partir de los polinomios de Bernstein de grado 3.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^{3} \mathbf{b}_i B_i^3(t) \\
&= \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t) \\
&= \mathbf{b}_0 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} t^0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t^1 (1-t)^2 + \mathbf{b}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} t^3 (1-t)^0 \\
&= \mathbf{b}_0 (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 3t^1 (1-t)^2 + \mathbf{b}_2 3t^2 (1-t)^1 + \mathbf{b}_3 t^3.
\end{aligned}$$

Si llamamos $\mathbf{b}_i = (x_i, y_i)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (x_0, y_0)(1-t)^3 + (x_1, y_1) 3t^1 (1-t)^2 + (x_2, y_2) 3t^2 (1-t)^1 + (x_3, y_3) t^3 \\
&= \begin{pmatrix} x_0 - 3x_0 t + 3x_0 t^2 - x_0 t^3 + 3t x_1 - 6t^2 x_1 + 3t^3 x_1 + 3t^2 x_2 - 3t^3 x_2 + t^3 x_3, \\ y_0 - 3y_0 t + 3y_0 t^2 - y_0 t^3 + 3t y_1 - 6t^2 y_1 + 3t^3 y_1 + 3t^2 y_2 - 3t^3 y_2 + t^3 y_3 \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} x_0 + (-3x_0 + 3x_1)t + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2)t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)t^3, \\ y_0 + (-3y_0 + 3y_1)t + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2)t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)t^3 \end{pmatrix}^t \\
&= (t^3 + t^2 - t - 1, t^2 - 1).
\end{aligned}$$

Igualando la segunda componente, obtenemos:

$$y_0 + (-3y_0 + 3y_1)t + (3y_0 - 6y_1 + 3y_2)t^2 + (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3)t^3 = t^2 - 1,$$

lo que implica

$$\begin{aligned}
y_0 &= -1, \\
-3y_0 + 3y_1 = 0 &\Longrightarrow 3y_1 = 3(-1) = -3 \Longrightarrow y_1 = -1, \\
3y_0 - 6y_1 + 3y_2 = 1 &\Longrightarrow 3y_2 = 1 - 3y_0 + 6y_1 = 1 - 3(-1) + 6(-1) = -2 \Longrightarrow y_2 = -\frac{2}{3}, \\
-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3 = 0 &\Longrightarrow y_3 = y_0 - 3y_1 + 3y_2 = -1 - 3(-1) + 3\left(-\frac{2}{3}\right) = 0.
\end{aligned}$$

De la misma forma, con la primera componente, tenemos:

$$x_0 + (-3x_0 + 3x_1)\,t + (3x_0 - 6x_1 + 3x_2)\,t^2 + (-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)\,t^3 = t^3 + t^2 - t - 1.$$

Se deduce:

$$\begin{aligned}
x_0 &= -1,\\
-3x_0 + 3x_1 = -1 &\Longrightarrow 3x_1 = -1 - 3 = -4 \Longrightarrow x_1 = -\frac{4}{3},\\
3x_0 - 6x_1 + 3x_2 = 1 &\Longrightarrow 3x_2 = 1 - 3x_0 + 6x_1 = 1 - 3\,(-1) + 6 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -4 \Longrightarrow x_2 = -\frac{4}{3},\\
-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 &\Longrightarrow x_3 = 1 + x_0 - 3x_1 + 3x_2 = 1 - 1 - 3\left(-\frac{4}{3}\right) + 3\left(-\frac{4}{3}\right) = 0.
\end{aligned}$$

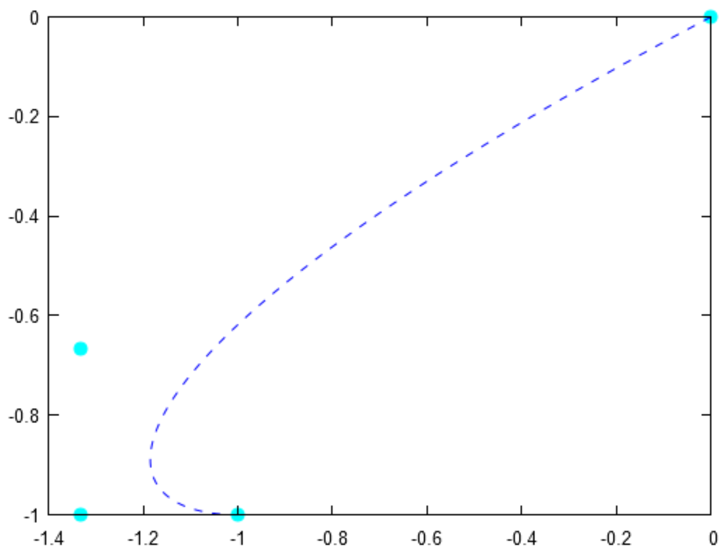
Entonces, se puede escribir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (t^3 + t^2 - t - 1, t^2 - 1) = \mathbf{b}_0 B_0^3\,(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3\,(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3\,(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3\,(t)\\
&= (-1,-1)\,B_0^3\,(t) + \left(-\frac{4}{3}, -1\right) B_1^3\,(t) + \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) B_2^3\,(t) + (0,0)\,B_3^3\,(t)\,.
\end{aligned}$$

Podíamos haber calculado los puntos de control como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_0 &= \mathbf{x}\,(0) = (-1,-1)\,,\\
\mathbf{b}_3 &= \mathbf{x}\,(1) = (0,0)\,,\\
\mathbf{x}'\,(0) = 3\,(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) &\Longrightarrow \mathbf{b}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{x}'\,(0) + \mathbf{b}_0 = \left(-\frac{1}{3} - 1, -1\right)\\
&\Longrightarrow \mathbf{b}_1 = \left(-\frac{4}{3}, -1\right),\\
\mathbf{x}'\,(1) = 3\,(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2) &\Longrightarrow \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 - \frac{1}{3}\mathbf{x}'\,(1) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right).
\end{aligned}$$

La gráfica es:



(b) La curva

$$\mathbf{x}(t) = (t^3 + t^2 - t - 1, t^2 - 1).$$

es regular si sus componentes son diferenciables y además no tiene puntos singulares, o puntos donde $\mathbf{x}'\,(t) = \mathbf{0}$). Las componentes son diferenciables, porque los polinomios y sus sumas lo son. Se cumple, entonces, la primera condición.

Comprobemos que su derivada no es $(0,0)$ nunca. Como esto significa

$$\mathbf{x}'(t) = (3t^2 + 2t - 1, 2t) = (0,0)$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 3t^2 + 2t - 1 = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{1}{3}, -1, \\ 2t = 0 \Longleftrightarrow t = 0. \end{cases}.$$

Como los valores de t que dan son distintos, entonces no puede ser $\mathbf{x}'(t) = (0,0)$ para $t \in \mathbb{R}$ y, por eso, la curva es regular.

Estudiamos si tiene puntos múltiples buscando t_1 y t_2 tales que

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2) \Longleftrightarrow (t_1^3 + t_1^2 - t_1 - 1, t_1^2 - 1) = (t_2^3 + t_2^2 - t_2 - 1, t_2^2 - 1)$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t_1^3 + t_1^2 - t_1 = t_2^3 + t_2^2 - t_2, \\ t_1^2 = t_2^2 \Longleftrightarrow t_1 = \pm t_2. \end{cases}$$

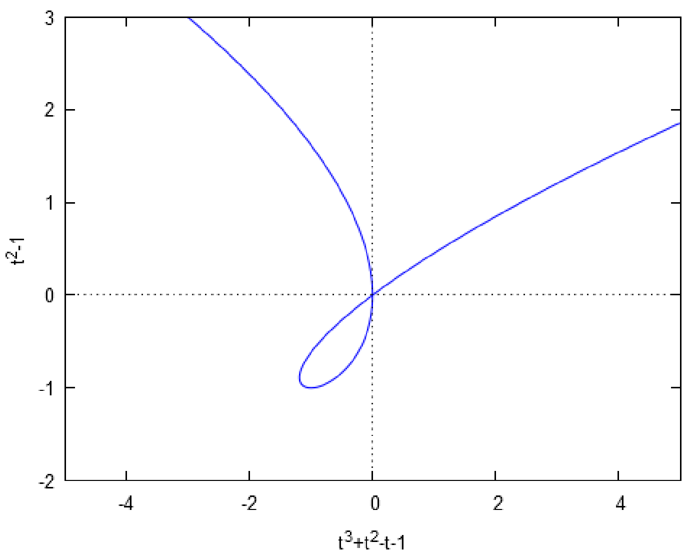
Sustituimos $t_1 = -t_2$, obtenida en la segunda condición (la condición $t_1 = t_2$ no resulta interesante para determinar puntos múltiples), en la primera para ver en qué valores se cumple de t_1, t_2:

$$t_1^3 + t_1^2 - t_1 = (-t_1)^3 + (-t_1)^2 - (-t_1) = -t_1^3 + t_1^2 + t_1$$
$$\Longrightarrow t_1^3 - t_1 = 0 \Longrightarrow t_1 = 0 \text{ o } t_1 = \pm 1.$$

Por tanto, tenemos:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}(-1) = (0,0).$$

La gráfica de la función es:



Esta gráfica se ha hecho con la sentencia: `wxplot2d([['parametric, t^3+t^2-t-1, t^2-1, [t, -2, 2], [nticks, 300]]], [x,-5,5],[y,-2,3])$`.

6. (3 PUNTOS) Sea S la superficie dada por

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u \cos v, \operatorname{sen} v, u^3\right).$$

(a) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental de la superficie en el punto $\mathbf{x}(1,0)$.

(b) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental de la superficie en el punto $\mathbf{x}(1,0)$.

(c) Sea C la curva en la superficie S determinada si consideramos $(u(t), v(t)) = (t^2+1, \pi t)$ para $t \in [-1,1]$. Determine el vector tangente a esta curva a partir de $\mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_v$. No se considerará respuesta válida la que lo determina sin considerar estos vectores.

Nota: Cada apartado puntúa 1 punto.

Solución:

(a) Partimos de

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(u,v) &= \left(u\cos v, \operatorname{sen} v, u^3\right), \\
\mathbf{x}_u(u,v) &= \left(\cos v, 0, 3u^2\right), \\
\mathbf{x}_v(u,v) &= \left(-u\operatorname{sen} v, \cos v, 0\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \left(\cos v, 0, 3u^2\right) \cdot \left(\cos v, 0, 3u^2\right) = 9u^4 + \cos^2 v, \\
F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \left(\cos v, 0, 3u^2\right) \cdot \left(-u\operatorname{sen} v, \cos v, 0\right) = -u\cos v\operatorname{sen} v, \\
G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \left(-u\operatorname{sen} v, \cos v, 0\right) \cdot \left(-u\operatorname{sen} v, \cos v, 0\right) = \cos^2 v + u^2\operatorname{sen}^2 v.
\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(1,0) &= (1,0,1), \\
\mathbf{x}_u(1,0) &= (1,0,3), \\
\mathbf{x}_v(1,0) &= (0,1,0).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (1,0,3)\cdot(1,0,3) = 1+9 = 10, \\
F &= \mathbf{x}u \cdot \mathbf{x}_v = (1,0,3)\cdot(0,1,0) = 0, \\
G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (0,1,0)\cdot(0,1,0) = 1^2 = 1.
\end{aligned}$$

(b) Tenemos que calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental en $\mathbf{x}(1,0) = (0,0,0)$. Sabemos que

$$\mathbf{x}_u(1,0) = (1,0,3), \quad \mathbf{x}_v(1,0) = (0,1,0).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(1,0) \times \mathbf{x}_v(1,0) &= (1,0,3)\times(0,1,0) = (-3,0,1), \\
\mathbf{N} &= \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,0,1).
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_{uu}(u,v) = (0,0,6u), \quad \mathbf{x}_{uv}(u,v) = (-\operatorname{sen} v, 0, 0), \quad \mathbf{x}_{vv}(u,v) = (-u\cos v, -\operatorname{sen} v, 0), \\
&\mathbf{x}_{uu}(1,0) = (0,0,6), \quad \mathbf{x}_{uv}(1,0) = (0,0,0), \quad \mathbf{x}_{vv}(1,0) = (-1,0,0).
\end{aligned}$$

Por eso:

$$\begin{aligned}
e &= \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{10}}(0,0,6)\cdot(-3,0,1) = \frac{3}{5}\sqrt{10}, \\
f &= \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{10}}(0,0,0)\cdot(-3,0,1) = 0, \\
g &= \mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,0,0)\cdot(-3,0,1) = \frac{3}{10}\sqrt{10}.
\end{aligned}$$

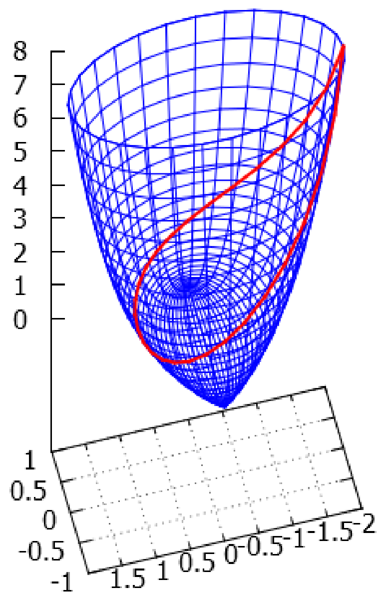
(c) Consideramos la curva dada por

$$(u(t), v(t)) = \left(t^2+1, \pi t\right)$$

para $t \in [-1,1]$ contenida en la superficie. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u(t), v(t)) = \mathbf{x}(u,v) &= \left(u(t)\cos v(t), \operatorname{sen} v(t), \left(t^2+1\right)^3\right) \\ &= \left(\left(t^2+1\right)\cos(\pi t), \operatorname{sen}(\pi t), \left(t^2+1\right)^3\right)\end{aligned}$$

está contenida en la superficie. Se representa en la siguiente figura:



Determinamos el vector tangente a la curva en $t=0$. Como

$$\begin{aligned}u'(t) = 2t, \quad v'(t) &= \pi, \\ \mathbf{x}_u(u,v) &= \left(\cos v, 0, 3u^2\right), \\ \mathbf{x}_v(u,v) &= (-u\operatorname{sen} v, \cos v, 0),\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= u'(t)\mathbf{x}_u(u(t),v(t)) + v'(t)\mathbf{x}_v(u(t),v(t) \\ &= 2t\left(\cos \pi t, 0, 3\left(t^2+1\right)^2\right) + \pi\left(-\left(t^2+1\right)\operatorname{sen}\pi t, \cos\pi t, 0\right) \\ \mathbf{x}'(0) &= 2\cdot 0\left(\cos 0, 0, 3\cdot 1^2\right) + \pi\left(-1\operatorname{sen} 0, \cos 0, 0\right) \\ &= (0,\pi,0).\end{aligned}$$