



E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.  
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL  
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL  
Código: 28806127. Febrero 2017. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Sean los puntos  $\mathbf{p}_0 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{p}_1 = (1, -1)$ ,  $\mathbf{p}_2 = (2, 1)$ . ¿Son una referencia afín? En caso de que lo sean, determine las coordenadas baricéntricas  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  del punto  $(-1, 3)$  respecto a esta referencia.

**Solución:** Son referencia afín si los siguientes vectores son linealmente independientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = (1, -1) - (0, 1) = (1, -2), \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 = (2, 1) - (0, 1) = (2, 0). \end{aligned}$$

El determinante de la matriz que forman es

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

y, por tanto, son base de  $\mathbb{R}^2$ . Luego son una referencia afín. Las coordenadas baricéntricas de  $(-2, 3)$  son

$$(x, y) = \lambda_0(0, 1) + \lambda_1(1, -1) + \lambda_2(2, 1),$$

con  $1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$ . Entonces

$$\begin{aligned} (-1, 3) &= \lambda_0(0, 1) + \lambda_1(1, -1) + (1 - \lambda_0 - \lambda_1)(2, 1) \\ &= (-2\lambda_0 - \lambda_1 + 2, -2\lambda_1 + 1). \end{aligned}$$

Por eso:

$$\begin{aligned} 3 &= -2\lambda_1 + 1 \implies \lambda_1 = -1, \\ -1 &= -2\lambda_0 - \lambda_1 + 2 = -2\lambda_0 + 1 + 2 = -2\lambda_0 + 3 \implies \lambda_0 = 2, \\ \lambda_2 &= 1 - \lambda_0 - \lambda_1 = 1 - 2 - (-1) = 0. \end{aligned}$$

2. (1 punto) Sea  $\mathbf{v} = (1, -1, -1) \times (2, -1, 0)$ , es decir, es el producto vectorial de  $(1, -1, -1)$  y  $(2, -1, 0)$ . Determine  $\mathbf{v}$ . ¿Es perpendicular al vector  $\mathbf{u} = (2, -1, 0)$ ?

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

son perpendiculares.

3. (1 punto) Determinése el vector tangente y la recta tangente, en  $t = 0$ , a la curva de ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t^2 e^t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t, \quad z(t) = e^{t^2}.$$

**Solución:** Tenemos:

$$\mathbf{x}'(t) = (2te^t - t^2 e^t, \cos t, 2te^{t^2}), \quad \mathbf{x}'(0) = (0, 1, 0).$$

Además,  $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$ . Por tanto, la recta tangente es

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(0, 1, 0).$$

4. (1 punto) Escriba la ecuación de una curva  $\mathbf{x} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  que sea regular, y con  $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 2)$  y cuya velocidad no sea un vector constante. Compruebe que es así.

**Nota:** Muchas curvas polinómicas, con al menos una componente de grado 2, lo cumplen.

**Solución:** Vamos a elegir una curva polinómica con la primera componente de grado 2 para que el vector velocidad no sea constante. Podíamos haber elegido cualquier grado mayor que 2 en una de las componentes. Pero si el grado de todas las componentes fuera 1, el vector tangente sería constante.

Como  $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 2)$ , podemos buscar curvas de la forma:

$$\mathbf{x}(t) = (a_1 t^2 + b_1 t + 1, b_2 t, b_3 t + 2).$$

Además, debe ser

$$\mathbf{x}'(t) = (2a_1 t + b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0) \text{ en } [0, 1].$$

Elegimos, por ejemplo,  $b_2$  o  $b_3$  distintas de 0, y así la curva ya va a ser regular. Y  $a_1 \neq 0$  para que el vector velocidad no sea constante.

Por ejemplo,

$$b_2 = 1, b_3 = -1, a_1 = 1, b_1 = 0.$$

da la siguiente curva, que cumple estas condiciones:

$$\mathbf{x}(t) = (t^2 + 1, t, -t + 2).$$

Otros ejemplos sencillos son curvas donde aparecen funciones trigonométricas o exponenciales.

## EJERCICIOS

5. (3 puntos) Sea  $C$  la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (t^3 + 2t - 1, t^2 + 1).$$

a) Estudie si es una curva regular y si tiene puntos múltiples.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

a) La curva

$$\mathbf{x}(t) = (t^3 + 2t - 1, t^2 + 1)$$

es regular si sus componentes son diferenciables y la función derivada no es  $(0, 0)$  nunca. Como esto significa

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= (3t^2 + 2, 2t) = (0, 0) \\ \implies 3t^2 + 2 &= 0, 2t = 0.\end{aligned}$$

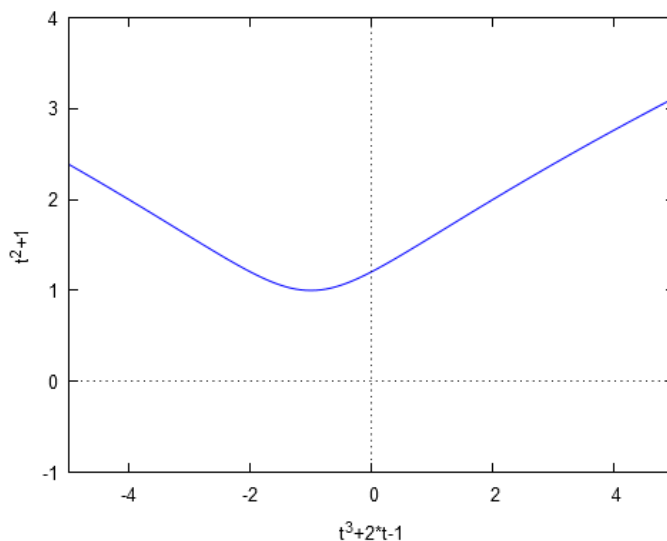
Pero la primera condición es imposible, porque  $t^2 \geq 0$  siempre. Entonces, la curva es regular. Estudiamos si tiene puntos múltiples buscando  $t_1$  y  $t_2$  tales que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2) &\iff (t_1^3 + 2t_1 - 1, t_1^2 + 1) = (t_2^3 + 2t_2 - 1, t_2^2 + 1) \\ \iff \begin{cases} t_1^3 + 2t_1 - 1 = t_2^3 + 2t_2 - 1 \iff t_1^3 + 2t_1 = t_2^3 + 2t_2 \\ t_1^2 = t_2^2 \iff t_1 = \pm t_2. \end{cases}\end{aligned}$$

Sustituimos  $t_1 = -t_2$ , obtenido en la segunda condición (la condición  $t_1 = t_2$  no resulta interesante para determinar puntos múltiples), en la primera ecuación. Tenemos:

$$\begin{aligned}t_1^3 + 2t_1 &= (-t_2)^3 + 2(-t_2) = -t_2^3 - 2t_2 \\ \implies 2t_2^3 + 4t_2 &= 2t_2(t_2^2 + 2) = 0 \implies t_2^2 = -2,\end{aligned}$$

que es imposible. La gráfica de la función es



Esta gráfica se ha hecho con la sentencia: `wxplot2d(['parametric, t^3+2*t-1, t^2+1, [t, -2, 2], [nticks, 300]]], [x,-5,5], [y,-1,4])$.`

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Ahora podemos calcular la curvatura:

$$\begin{aligned}k(t) &= \det \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left( \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3} \\&= \begin{vmatrix} 3t^2 + 2 & 2t \\ 6t & 2 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 16t^2 + 4}^3} \\&= \frac{4 - 6t^2}{\sqrt{9t^4 + 16t^2 + 4}^3}.\end{aligned}$$

El radio de curvatura es

$$r(t) = \frac{1}{|k(t)|} = \frac{\sqrt{9t^4 + 16t^2 + 4}^3}{|4 - 6t^2|}.$$

c) Como el vector tangente es

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 16t^2 + 4}}(3t^2 + 2, 2t),$$

el vector normal es

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 16t^2 + 4}}(-2t, 3t^2 + 2).$$

Particularizamos en  $\mathbf{x}(0) = (-1, 1)$ :

$$\mathbf{t}(0) = \frac{1}{\sqrt{9 \cdot 0^4 + 16 \cdot 0^2 + 4}}(3 \cdot 0^2 + 2, 2 \cdot 0) = (1, 0),$$

$$\mathbf{n}(0) = \frac{1}{\sqrt{9 \cdot 0^4 + 16 \cdot 0^2 + 4}}(-2 \cdot 0, 3 \cdot 0^2 + 2) = (0, 1),$$

$$k(0) = \frac{4 - 6 \cdot 0^2}{\sqrt{9 \cdot 0^4 + 16 \cdot 0^2 + 4}^3} = \frac{1}{2},$$

$$r(0) = 2.$$

El vector curvatura es

$$\mathbf{k}(0) = k(0) \mathbf{n}(0) = \frac{1}{2}(0, 1).$$

El centro de curvatura es el punto

$$\begin{aligned}\mathbf{c}(0) &= \mathbf{x}(0) + \frac{1}{k(0)} \mathbf{n}(0) \\&= (-1, 1) + \frac{1}{1/2}(0, 1) = (-1, 3).\end{aligned}$$

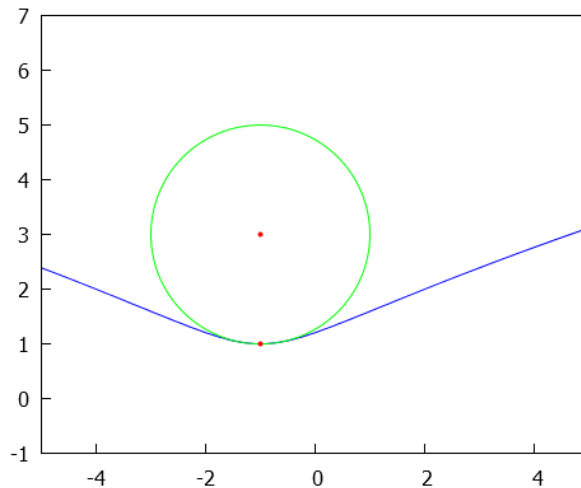
Entonces, la circunferencia osculadora tiene por ecuación

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99



6. (3 puntos) Considere la superficie dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( -\frac{1}{2} \cos(2u), \frac{1}{2} \sin(2u), -v \right), \quad u, v \in [0, 2\pi].$$

Compruebe que la parametrización es regular y determine el área de la región delimitada por las curvas coordenadas  $u_0 = 0, u_1 = \pi, v_0 = 0$  y  $v_1 = \pi$ .

**Solución:** Calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (\sin(2u), \cos(2u), 0), \\ \mathbf{x}_v &= (0, 0, -1). \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin(2u) & \cos(2u) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-\cos(2u), \sin(2u), 0).$$

La parametrización es regular ya que  $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq (0, 0, 0) \forall u, v \in [0, 2\pi]$ .

Determinemos los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \cos^2(2u) + \sin^2(2u) = 1, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1. \end{aligned}$$

Entonces  $\sqrt{EG - F^2} = 1$ , por lo que

$\int_0^\pi \int_0^\pi \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = 2$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**  
 ---  
**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99



E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.  
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL  
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL  
Código: 28806127. Febrero 2017. Modelo B

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Defina isometría.

**Solución:** Es una transformación afín de la forma  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ , donde la matriz  $\mathbf{A}$  es ortogonal, es decir,  $\mathbf{A}\mathbf{A}^t = \mathbf{I}$ .

2. (1 punto) Estudie si la curva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\alpha(t) = (\sin t, t^2)$  es regular. Determine sus puntos múltiples, si los tiene.

**Solución.** Sí lo es, porque su derivada

$$\alpha'(t) = (\cos t, 2t)$$

no se anula por ningún valor de  $t$ .

No tiene puntos múltiples porque

$$\alpha(t) = (\sin t, t^2) = (\sin t', (t')^2) = \alpha(t') \implies t = t' + 2k\pi, t' = \pm t$$

y no se pueden cumplir las dos condiciones a la vez.

3. (1 punto) Determine la envolvente de la familia de circunferencias de radio 1 y centro en el eje  $OX$ , dada por las ecuaciones paramétricas:

$$\mathbf{x}(\lambda, t) = (\lambda + \cos t, \sin t).$$

**Solución.** Está en los apuntes. Tenemos:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}(\lambda, t) = (1, 0), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\lambda, t) = (-\sin t, \cos t).$$

Entonces debe ser

$$0 = \det \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) = \begin{vmatrix} 1 & -\sin t \\ 0 & \cos t \end{vmatrix} = \cos t.$$

Esto implica

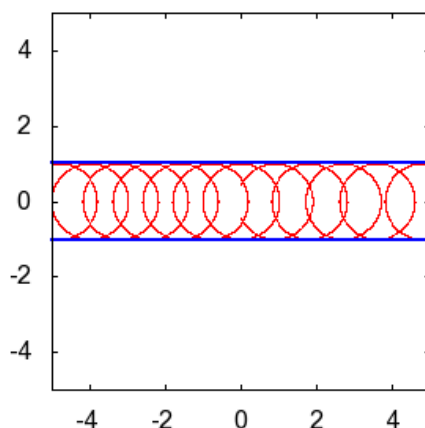
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Son dos rectas, paralelas al eje  $= X$ , y de ecuación  $y = 1, y = -1$ , como se aprecia en la figura:





4. (1 punto) Determine si la superficie dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\sin u, \cos(uv), \tan v) \quad u, v \in [0, 2\pi]$$

tiene una parametrización regular.

**Solución:** Calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (\cos u, -v \sin(uv), 0), \\ \mathbf{x}_v &= (0, -u \sin(uv), 1 + \tan^2 v). \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= (\cos u, -v \sin(uv), 0) \times (0, -u \sin(uv), 1 + \tan^2 v) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos u & -v \sin(uv) & 0 \\ 0 & -u \sin(uv) & 1 + \tan^2 v \end{vmatrix} \\ &= (-v \sin(uv)(1 + \tan^2 v), -\cos u(1 + \tan^2 v), -v \sin(uv) \cos u). \end{aligned}$$

Por ejemplo, como en  $(u_0, v_0) = (\frac{\pi}{2}, 0)$  se tiene que  $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (0, 0, 0)$ , la parametrización no es regular.

### EJERCICIOS

5. (3 puntos) Sea  $C$  la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (e^t, t^2 - 1, 2t + 1)$$

para  $t \in [-2, 2]$ .

a) Estudie si es una curva regular.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Pero como la tercera componente siempre es distinta de 0, entonces es una curva regular.

b) Tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= (e^t, 2t, 2), \quad \mathbf{x}''(t) = (e^t, 2, 0), \quad \mathbf{x}'''(t) = (e^t, 0, 0), \\ \mathbf{x}'(0) &= (1, 0, 2), \quad \mathbf{x}''(0) = (1, 2, 0), \quad \mathbf{x}'''(0) = (1, 0, 0).\end{aligned}$$

El vector tangente unitario en  $\mathbf{x}(0)$  es

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(0) &= \frac{1}{\|(1, 0, 2)\|} (1, 0, 2) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} (1, 0, 2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 0, 2).\end{aligned}$$

Un vector con la misma dirección y sentido que el vector normal principal  $\mathbf{n}$  es:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t) = ((1, 0, 2) \times (1, 2, 0)) \times (1, 0, 2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \times (1, 0, 2) \\ &= (-4, 2, 2) \times (1, 0, 2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4, 10, -2).\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(4, 10, -2)}{\sqrt{4^2 + 10^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{30}} (4, 10, -2) = \frac{1}{\sqrt{30}} (2, 5, -1).$$

Por tanto, el vector binormal es

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 0, 2) \times \frac{1}{\sqrt{30}} (2, 5, -1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt{6}} (-10, 5, 5) = \frac{1}{\sqrt{6}} (-2, 1, 1).\end{aligned}$$

Entonces el triedro de Frenet es

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 0, 2), \frac{1}{\sqrt{30}} (2, 5, -1), \frac{1}{\sqrt{6}} (-2, 1, 1) \right\}.$$

c) El plano rectificante es el plano perpendicular a la recta normal, es decir, pasa por  $\mathbf{x}(0) = (1, -1, 1)$  y es perpendicular al vector normal. es decir, los puntos  $(x, y, z)$  verifican

1  
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



6. (3 puntos) Sea el cilindro dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Determinense los vectores curvatura geodésica y curvatura normal en la la elipse dada por

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t + \sin t)$$

en el punto  $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 1)$ .

**Solución:**

Primero determinamos los vectores tangentes y normal al cilindro. Tenemos

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0),$$

$$\mathbf{x}_v(u, v) = (0, 0, 1).$$

El vector normal a la superficie es

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(u, v) &= \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\|} \\ &= \frac{(-\sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1)}{\|(-\sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1)\|} \\ &= (\cos u, \sin u, 0). \end{aligned}$$

Ahora estudiamos la curva. Para la elipse, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= (-\sin t, \cos t, -\sin t + \cos t), & \mathbf{x}'(0) &= (0, 1, 1), \\ \mathbf{x}''(t) &= (-\cos t, -\sin t, -\cos t - \sin t), & \mathbf{x}''(0) &= (-1, 0, -1). \end{aligned}$$

Sabemos que el vector  $\mathbf{v} = (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0)$  tiene la misma dirección y sentido que el vector normal (y, por tanto, que el vector curvatura) y que el módulo del vector curvatura es

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Entonces, el vector  $\mathbf{v}$  es

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) \\ &= ((0, 1, 1) \times (-1, 0, -1)) \times (0, 1, 1) \\ &= (-1, -1, 1) \times (0, 1, 1) \\ &= (-2, 1, -1). \end{aligned}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\frac{\|(-2, 1, -1)\|^3}{\|(0, 1, 1)\|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

Cartagena99

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(0) &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{6}}{6} (-2, 1, -1) \\ &= \frac{1}{4} (-2, 1, -1). \end{aligned}$$

Lo podemos escribir a partir de los vectores curvatura geodésica y curvatura normal,  $\mathbf{k}(s) = \mathbf{k}_g(s) + \mathbf{k}_n(s)$ , que están en los planos tangente a la superficie y en la recta normal. En  $(1, 0, 1)$ , tenemos

$$\begin{aligned} (1, 0, 1) &= \mathbf{x}(0, 1), \\ \mathbf{x}_u(0, 1) &= (-\operatorname{sen} 0, \cos 0, 0) = (0, 1, 0), \\ \mathbf{x}_v(0, 1) &= (0, 0, 1), \\ \mathbf{N}(0, 1) &= (\cos 0, \operatorname{sen} 0, 0) = (1, 0, 0). \end{aligned}$$

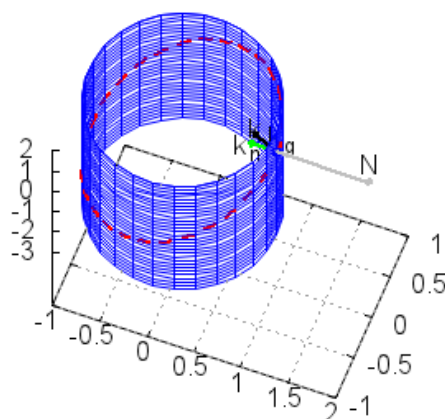
Entonces, como una base del espacio tangente es  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  y una base de la recta normal es  $(1, 0, 0)$ , tenemos que

$$\frac{1}{4} (-2, 1, -1) = \frac{1}{4} (0, 1, -1) + \frac{-1}{2} (1, 0, 0),$$

donde

$$\mathbf{k}_g(0) = \frac{1}{4} (0, 1, -1), \quad \mathbf{k}_n(0) = \frac{-1}{2} (1, 0, 0).$$

En la siguiente figura se representan el cilindro, la elipse, los vectores curvatura (en azul), curvatura geodésica (en



Para determinar los vectores curvatura geodésica y curvatura normal no hemos parametrizado la

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99