COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Febrero. Modelo A

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Estudie si la base $\{(-1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ es dextrógira.

   Solución:

2. (1 punto) Demuestre que las siguientes ecuaciones definen una curva regular:

$$x(t) = t^2 e^t, \quad y(t) = t e^{t^2}.$$

   Solución:

3. (1 punto) Sea C la curva definida por las ecuaciones

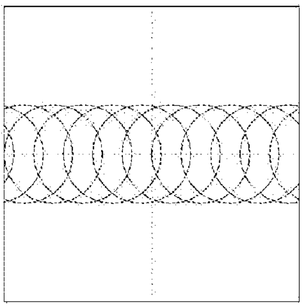
$$\mathbf{x}(t) = \left(e^t, 4 + t^2\right).$$

   Determine la recta tangente a la curva en $\mathbf{x}(0)$.

   Solución:

4. (1 punto) Sea, para $t \in \mathbb{R}$, $\{\mathbf{x}(\lambda, t)\}_{\lambda \in [a,b]}$ una familia de curvas dadas en ecuaciones paramétricas, donde para cada λ tenemos una curva regular. Defina su envolvente.

   Consideramos la familia de circunferencias representadas en la siguiente figura:



   Dibuje su envolvente sobre la misma gráfica.

   Solución:

EJERCICIOS

5. Sea C la curva dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^3, t^2 - t, t - 1\right), t \in \mathbb{R}.$$

   Determine:

   a) (1 punto) Los vectores tangente, normal y binormal a la curva en el punto $\mathbf{x}(0)$.

   b) (1 punto) El radio de curvatura en el punto $\mathbf{x}(0)$.

   c) (1 punto) El plano rectificante y la recta tangente a la curva en el punto $\mathbf{x}(0)$.

6. Sea S la superficie dada, para $(u, v) \in (0, 1) \times (0, 1)$, por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u \cos v, u \operatorname{sen} v, u^2\right).$$

   a) (0.75 puntos) Estudie si es una superficie regular.

   b) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental.

   c) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.

   d) (0.75 puntos) Clasifique los puntos de la superficie.

Curvas
Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k\left(t\right)=\det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt},\left(\frac{d^{2}\mathbf{x}}{dt^{2}}\right)\right)\frac{1}{\left\|d\mathbf{x}/dt\right\|^{3}}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k\left(x,y\right)=\frac{\left(-f_{y},f_{x}\right)H\left(f\right)\left(-f_{y},f_{x}\right)^{t}}{\left\|\nabla f\right\|^{3}}.$$

Curvas en el espacio:

$$k\left(t\right)=\frac{\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\times\mathbf{x}''\left(t\right)\right\|}{\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\right\|^{3}},\quad\tau\left(t\right)=-\frac{\det\left(\mathbf{x}'\left(t\right),\mathbf{x}''\left(t\right),\mathbf{x}'''\left(t\right)\right)}{\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\times\mathbf{x}''\left(t\right)\right\|^{2}}.$$

Superficies
Formas fundamentales:

$$\begin{aligned}E&=\mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{u},\quad F=\mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{v},\quad G=\mathbf{x}_{v}\cdot\mathbf{x}_{v}.\\ e&=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uu},\quad f=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uv},\quad g=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{vv}.\end{aligned}$$

Curvaturas:

$$K=\frac{eg-f^{2}}{EG-F^{2}},\quad H=\frac{Eg-2Ff+Ge}{2\left(EG-F^{2}\right)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^{2}\left(EG-F^{2}\right)-\left(Eg-2Ff+Ge\right)k-f^{2}+eg=0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$\left(eF-fE\right)\left(du\right)^{2}+\left(eG-gE\right)dudv+\left(fG-gF\right)\left(dv\right)^{2}=0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

$$e\left(du\right)^{2}+2fdudv+g\left(dv\right)^{2}=0.$$

Condición de las curvas geodésicas:

$$\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u''\\v''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\left(u'\right)^{2}\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{u}+2u'v'\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{u}+\left(v'\right)^{2}\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_{u}\\\left(u'\right)^{2}\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{v}+2u'v'\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{v}+\left(v'\right)^{2}\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$