



E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Febrero 2018. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Estudie si la base {(-1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)} R^3 es dextrógira.

Solución: Es dextrógira si el determinante formado por estos vectores vale 1. Como

|-1 0 0|
|0 0 1| = 1
|0 1 0|

entonces sí lo es.

2. (1 punto) Demuestre que las ecuaciones paramétricas

x(t) = t^2 e^t, y(t) = t e^t^2.

definen una curva regular.

Solución: Para que sea una curva regular debe cumplirse que la función sea diferenciable y que no tenga puntos singulares. Es una función diferenciable, porque las componente son derivables, al ser producto de funciones trigonométricas con polinomios. Será regular si

(x'(t), y'(t)) != (0, 0).

Como

x'(t) = 2te^t + t^2 e^t = (2t + t^2) e^t = 0, }
y'(t) = e^t^2 + 2t^2 e^t^2 = 0, } <=> 2t + t^2 = 0 <=> t(2 + t) = 0 => t = 0 o t = -2, }
e^t^2 (1 + 2t^2) = 0 <=> 1 + 2t^2 = 0 que es imposible. }

Como no puede ser (x'(t), y'(t)) = (0, 0), es una curva regular.

3. (1 punto) Sea C la curva definida por las ecuaciones

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

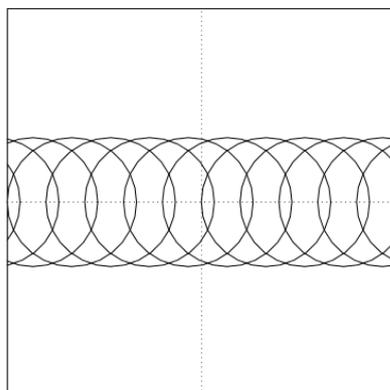
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

la recta tangente tiene las ecuaciones

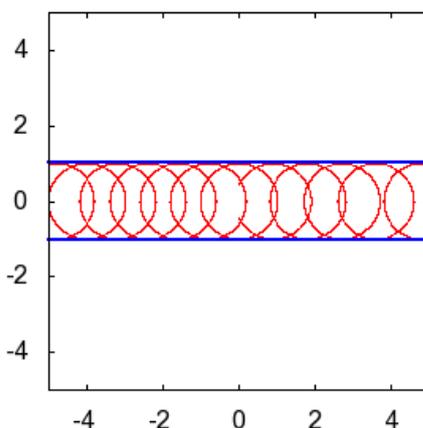
(x, y) = x(0) + lambda x'(0) + mu y'(0) = (1, 4) + lambda(1, 0)

4. (1 punto) Sea, para  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\{\mathbf{x}(\lambda, t)\}_{\lambda \in [a, b]}$  una familia de curvas dadas en ecuaciones paramétricas, donde para cada  $\lambda$  tenemos una curva regular. Defina su envolvente. Consideramos la familia de circunferencias representadas en la siguiente figura:



Dibuje su envolvente sobre la misma gráfica.

**Solución:** página 23 de los apuntes del tema 2. Es una curva que es en cada punto tangente a alguna curva de la familia y además, no está incluida en la familia de curvas.



## EJERCICIOS

5. (3 puntos) Sea  $C$  la curva dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = (t^3, t^2 - t, t - 1), t \in \mathbb{R}.$$

Determine:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\mathbf{x}(t) = (t^3, t^2 - t, t - 1)$$

es regular. Además:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= (3t^2, 2t - 1, 1), & \mathbf{x}''(t) &= (6t, 2, 0), & \mathbf{x}'''(t) &= (6, 0, 0), \\ \mathbf{x}'(0) &= (0, -1, 1), & \mathbf{x}''(0) &= (0, 2, 0), & \mathbf{x}'''(0) &= (6, 0, 0). \end{aligned}$$

Con estos valores, sabemos que el vector

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) = ((0, -1, 1) \times (0, 2, 0)) \times (0, -1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \times (0, -1, 1) \\ &= (-2, 0, 0) \times (0, -1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 2, 2) \end{aligned}$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal principal  $\mathbf{n}$  y que, por lo tanto,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(0, 2, 2)}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, 1).$$

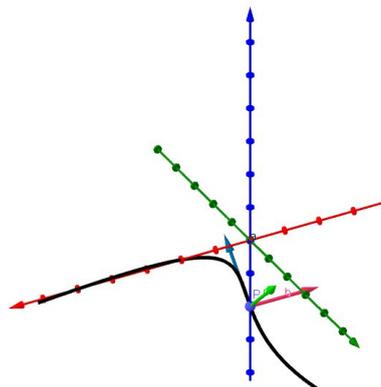
El vector tangente unitario a la curva en  $\mathbf{x}(0)$  es

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'(0)}{\|\mathbf{x}'(0)\|} = \frac{(0, -1, 1)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, 1).$$

Por tanto, el vector binormal es

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, 1) \times \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, 1) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (-2, 0, 0) = (-1, 0, 0). \end{aligned}$$

La gráfica de est



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$k(0) = \frac{\|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\|}{\|\mathbf{x}'(0)\|^3} = \frac{\|(-2, 0, 0)\|}{\|(0, -1, 1)\|^3} = \frac{\sqrt{(-2)^2}}{(1^2 + 1^2)^{3/2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

El radio de curvatura es su inverso, es decir

$$R = \frac{1}{k(0)} = \sqrt{2}.$$

- c) La recta tangente pasa por  $\mathbf{x}(0)$  y tiene por vector director al vector tangente  $\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$  o directamente al vector  $(0, -1, 1)$ . Por eso, su ecuación es

$$(x, y, z) = \mathbf{x}(0) + \lambda(0, -1, 1) = (0, 0, -1) + \lambda(0, -1, 1).$$

El plano rectificante pasa por  $\mathbf{x}(0)$  y contiene a los vectores tangente y binormal. O es perpendicular al vector normal  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ , o equivalentemente a  $(0, 1, 1)$ . Por eso, su ecuación es

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(0)) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

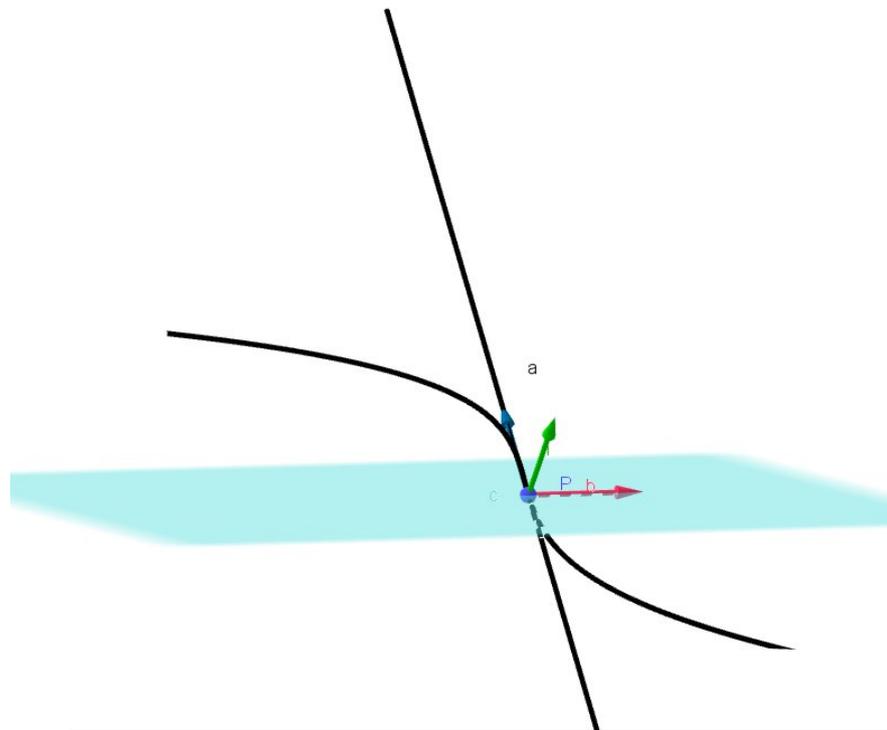
En este caso, es

$$((x, y, z) - (0, 0, -1)) \cdot (0, 1, 1) = 0.$$

Operando llegamos a

$$z + 1 = 0.$$

La gráfica es



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

- c) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.

## Solución:

a) Tenemos

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2), \quad \mathbf{x}_u(u, v) = (\cos v, \sin v, 2u), \quad \mathbf{x}_v(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, 0).$$

La superficie es regular donde

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq (0, 0, 0).$$

Para esta superficie se cumple:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u \cos^2 v + u \sin^2 v) \\ &= (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u). \end{aligned}$$

Solo se anula cuando  $u = 0$ , pero este punto no se considera, ya que debe ser  $(u, v) \in (0, 1) \times (0, 1)$ . Entonces la superficie es regular.

b) Para los coeficientes de la primera forma fundamental, hacemos

$$\begin{aligned} E &= (\cos v, \sin v, 2u) \cdot (\cos v, \sin v, 2u) = \cos^2 v + \sin^2 v + (2u)^2 = 1 + 4u^2, \\ F &= (\cos v, \sin v, 2u) \cdot (-u \sin v, u \cos v, 0) = -u \cos v \sin v + u \cos v \sin v = 0, \\ G &= (-u \sin v, u \cos v, 0) \cdot (-u \sin v, u \cos v, 0) = (-u \sin v)^2 + (u \cos v)^2 = u^2. \end{aligned}$$

c) Calculamos los coeficientes de la segunda forma fundamental en un punto genérico  $\mathbf{x}(u, v)$  a partir del vector normal unitario  $\mathbf{n}$  y las derivadas de  $\mathbf{x}$ . Empezamos con el vector normal unitario  $\mathbf{n}$ , que tiene la misma dirección y sentido que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u). \\ \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| &= \sqrt{(-2u^2 \cos v)^2 + (-2u^2 \sin v)^2 + u^2} \\ &= \sqrt{u^2 + 4u^4 \cos^2 v + 4u^4 \sin^2 v} = u\sqrt{1 + 4u^2}, \\ \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{u\sqrt{1 + 4u^2}}(-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2}}(-2u \cos v, -2u \sin v, 1). \end{aligned}$$

Además tenemos:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2), \quad \mathbf{x}_u(u, v) = (\cos v, \sin v, 2u), \quad \mathbf{x}_v(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, 0).$$

The logo for 'Cartagena99' features the word 'Cartagena' in a stylized, blue, serif font with a drop shadow, followed by '99' in a larger, bold, blue font. The entire logo is set against a light blue and white background with a subtle geometric pattern.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**