E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Septiembre 2018. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Sea f la función dada por

$$f(x,y) = \left(x^2 \cos y, e^{y^3}\right).$$

Determine su matriz jacobiana. ¿Es diferenciable al función f?

Solución: La matriz jacobiana está determinada por las derivadas parciales y es

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\cos y & 0 \\ -x^2 \operatorname{sen} y & 3y^2 e^{y^3} \end{pmatrix}.$$

Como tiene derivadas parciales que son continuas (producto y composición de funciones continuas), entonces es diferenciable y la diferencial es la aplicación lineal dada por su matriz jacobiana.

2. (1 punto) Sea C la curva dada por la representación paramétrica $(I, \mathbf{x})$, para $I = (0, 10)$ y

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, -t).$$

Encuentre una representación paramétrica natural de esta curva.

Solución: Una representación paramétrica $\mathbf{x}(t)$ es natural si su parámetro es la longitud de arco, es decir, si $1 = \|\mathbf{x}'(s)\|$ o si la longitud de arco entre 0 y s es:

$$s = \int_0^s \|\mathbf{x}'(s)\|\, ds.$$

En esta curva tenemos:

$$\alpha'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, -1), \qquad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Por eso, la longitud de arco es:

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_0^t \sqrt{2} dt = \sqrt{2} t.$$

Si hacemos el cambio de parámetro $t = \frac{s}{\sqrt{2}}$, la curva queda con la representación natural:

$$\mathbf{x}(s) = \alpha(t) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{s}{\sqrt{2}}\right).$$

3. (1 punto) Escriba las ecuaciones de Frenet para curvas planas.

Solución:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa(s)\,\mathbf{n}(s),$$
$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa(s)\,\mathbf{n}(s).$$

4. (1 punto) Estudie cuándo es regular la parametrización de la superficie S dada por

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u^2, u - v^2, u^2 - v^2\right)$$

con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Solución: Tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc} D_1x_1(u,v) & D_1x_2(u,v) & D_1x_3(u,v) \\ D_2x_1(u,v) & D_2x_2(u,v) & D_2x_3(u,v) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 2u & 1 & 2u \\ 0 & -2v & -2v \end{array}\right).$$

Si rango es 2 si $v \neq 0$ y es 1 en $(u,0)$. Por tanto, es regular en $\mathbb{R}^2 - \{(u,0)\}$.

EJERCICIOS

5. Sea la curva de ecuaciones $\mathbf{x}(t) = (x,y,z)$ donde:

$$x = t^2, y = t^3 - 1, z = t, t \in \mathbb{R}.$$

a) (1 punto) Determine la curvatura y la torsión en el punto (0).

b) (1 punto) Determine el triedro de Frenet en el punto $\mathbf{x}(0)$.

c) (1 punto) Determine las ecuaciones de los planos normal, osculador y rectificante en el punto $\mathbf{x}(0)$.

Solución:

a) Tenemos que $\mathbf{x}(0) = (0,-1,0)$ y la curva

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^2, t^3 - 1, t\right).$$

Además tenemos

$$\begin{array}{lll} \mathbf{x}'(t) = (2t, 3t^2, 1), & \mathbf{x}''(t) = (1, 6t, 0), & \mathbf{x}'''(t) = (0,6,0), \\ \mathbf{x}'(0) = (0,0,1), & \mathbf{x}''(0) = (2,0,0), & \mathbf{x}'''(0) = (0,6,0). \end{array}$$

La curvatura es

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\|}{\|\mathbf{x}'(0)\|^3}.$$

Hacemos

$$\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) = ((0,0,1) \times (2,0,0)) = \left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right| = (0,2,0).$$

Entonces la curvatura en este punto es:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\|}{\|\mathbf{x}'(0)\|^3} = \frac{\|(0,2,0)\|}{\|(0,0,1)\|^3} = 2.$$

Por otro lado, la torsión verifica:

$$\tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Para este caso, es:

$$\begin{aligned} \tau(0) &= -\frac{\det(\mathbf{x}'(0), \mathbf{x}''(0), \mathbf{x}'''(0))}{\|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\|^2} = -\frac{\left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{array}\right|}{\|(0,2,0)\|^2} \\ &= -\frac{12}{4} = -3. \end{aligned}$$

b) Como $\mathbf{x}'(0) = (0,0,1)$ es unitario , el vector tangente a la curva en $\mathbf{x}(0)$

$$\mathbf{t} = \mathbf{x}'(0) = (0,0,1).$$

Un vector con la misma dirección y sentido que el vector normal principal $\mathbf{n}$ es:

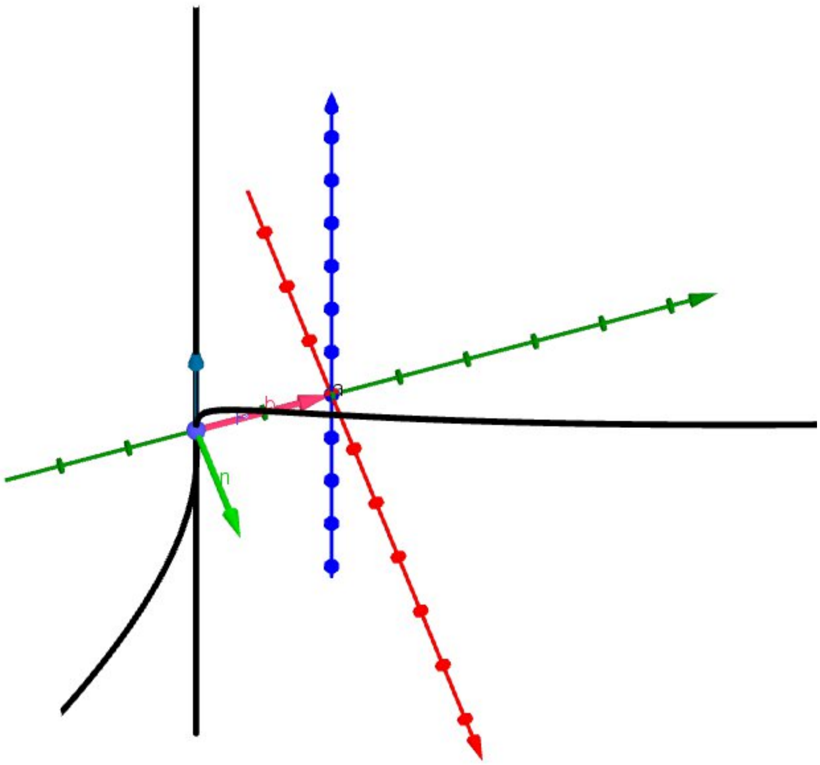
$$\mathbf{v} = (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) = ((0,0,1) \times (2,0,0)) \times (0,0,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times (0,0,1)$$

$$= (0,2,0) \times (0,0,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,0,0).$$

Por tanto, el vector normal es $\mathbf{n} = (1,0,1)$. El vector binormal es

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = (0,0,1) \times (1,0,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,1,0).$$

La gráfica de esto es la siguiente:



c) El plano osculador contiene a los vectores tangente y normal y es perpendicular al vector binormal. Por eso, su ecuación es

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

que en este caso es

$$((x,y,z) - (0,-1,0)) \cdot (0,1,0) = 0 \Longleftrightarrow y + 1 = 0.$$

El plano normal es perpendicular al vector tangente, y su ecuación es

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{0}.$$

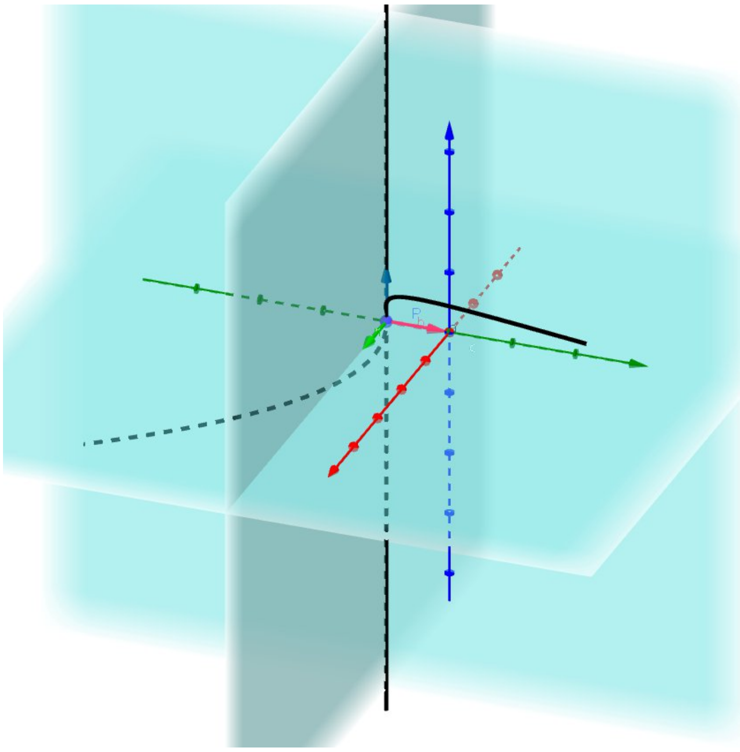
Para la curva y el punto dados, es

$$((x,y,z) - (0,-1,0)) \cdot (0,0,1) = 0 \Longleftrightarrow z = 0.$$

Entonces, tenemos

$$((x, y, z) - (0, -1, 0)) \cdot (1, 0, 0) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

porque el perpendicular al vector normal al contener a los vectores tangente y binormal. La gráfica es



6. Tenemos la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1, dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi),$$

para la latitud $\theta \in [0, 2\pi]$ y la longitud $\phi \in [0, \pi]$.

a) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental en un punto genérico de la esfera $\mathbf{x}(\theta, \phi)$.

b) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental en un punto genérico de la esfera $\mathbf{x}(\theta, \phi)$.

c) (1.5 puntos) Sea

$$\mathbf{c}_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0),$$

una curva contenida en la esfera y que pasa por el punto $\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (0, 1, 0)$. Estudie si es una geodésica.

Solución:

a) Determinarmos los coeficientes de la primera forma fundamental. En un punto $\mathbf{x}(\theta, \phi)$ se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\theta &= (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\theta \operatorname{sen}\phi, 0), \\ \mathbf{x}_\phi &= (\cos\theta\cos\phi, \operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta \\ &= (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\theta \operatorname{sen}\phi, 0) \cdot (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\theta \operatorname{sen}\phi, 0) \\ &= \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\phi = \operatorname{sen}^2\phi,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F &= \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\phi \\
&= (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\theta \operatorname{sen}\phi, 0) \cdot (\cos\theta\cos\phi, \operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi) \\
&= -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\cos\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\cos\phi = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G &= \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi \\
&= (\cos\theta\cos\phi, \operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi) \cdot (\cos\theta\cos\phi, \operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi) \\
&= \cos^2\theta\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi = 1.
\end{aligned}
$$

b) Se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\theta\theta} &= (-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 0), \\
\mathbf{x}_{\theta\phi} &= (-\operatorname{sen}\theta\cos\phi, \cos\theta\cos\phi, 0), \\
\mathbf{x}_{\phi\phi} &= (-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -\cos\phi).
\end{aligned}
$$

Tenemos que calcular el vector normal **N**. El vector

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi &= (-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0) \times (\cos\theta\cos\phi, \operatorname{sen}\theta\cos\phi, -\operatorname{sen}\phi) \\
&= \left(-\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, -\cos\phi\operatorname{sen}\phi\right),
\end{aligned}
$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal a la superficie. Además:

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi\| &= \sqrt{(-\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi)^2 + (-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi)^2 + (-\cos\phi\operatorname{sen}\phi)^2} \\
&= \operatorname{sen}\phi.
\end{aligned}
$$

Por eso:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi}{\|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi\|} = \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\left(-\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, -\cos\phi\operatorname{sen}\phi\right) \\
&= (-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -\cos\phi).
\end{aligned}
$$

Ya podemos calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$
\begin{aligned}
e &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{\theta\theta} = (-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -\cos\phi) \cdot (-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 0) \\
&= \operatorname{sen}^2\phi \\
f &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{\theta\phi} = (-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -\cos\phi) \cdot (-\operatorname{sen}\theta\cos\phi, \cos\theta\cos\phi, 0) \\
&= 0, \\
g &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{\phi\phi} = (-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -\cos\phi) \cdot (-\cos\theta\operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, -\cos\phi) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

c) La condición de las curvas geodésicas es

$$
\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (u')^2\,\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_u + 2u'v'\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_u + (v')^2\,\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_u \\ (u')^2\,\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v + 2u'v'\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v + (v')^2\,\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_v \end{pmatrix} = 0.
$$

En este caso, es:

$$\begin{aligned}
A &= (\theta')^2\,\mathbf{x}_{\theta\theta}\cdot\mathbf{x}_\theta + 2\theta'\phi'\mathbf{x}_{\theta\phi}\cdot\mathbf{x}_\theta + (\phi')^2\,\mathbf{x}_{\phi\phi}\cdot\mathbf{x}_\theta\\
&= (\theta')^2\left(-\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, 0\right)\cdot\left(-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\theta \operatorname{sen}\phi, 0\right)\\
&+ 2\theta'\phi'\left(-\operatorname{sen}\theta\cos\phi, \cos\theta\cos\phi, 0\right)\cdot\left(-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\theta \operatorname{sen}\phi, 0\right)\\
&+ (\phi')^2\left(-\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, -\cos\phi\right)\cdot\left(-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\theta \operatorname{sen}\phi, 0\right)\\
&= \theta'\phi' \operatorname{sen} 2\phi,\\
B &= (\theta')^2\,\mathbf{x}_{\theta\theta}\cdot\mathbf{x}_\phi + 2\theta'\phi'\mathbf{x}_{\theta\phi}\cdot\mathbf{x}_\phi + (\phi')^2\,\mathbf{x}_{\phi\phi}\cdot\mathbf{x}_\phi\\
&= (\theta')^2\left(-\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, 0\right)\cdot\left(\cos\theta\cos\phi, \operatorname{sen}\theta\cos\phi, -\operatorname{sen}\phi\right)\\
&+ 2\theta'\phi'\left(-\operatorname{sen}\theta\cos\phi, \cos\theta\cos\phi, 0\right)\cdot\left(\cos\theta\cos\phi, \operatorname{sen}\theta\cos\phi, -\operatorname{sen}\phi\right)\\
&+ (\phi')^2\left(-\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, -\cos\phi\right)\cdot\left(\cos\theta\cos\phi, \operatorname{sen}\theta\cos\phi, -\operatorname{sen}\phi\right)\\
&= -\frac{1}{2}(\theta')^2 \operatorname{sen} 2\phi.
\end{aligned}$$

Con esta notación, la condición que cumplen las geodésicas es

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta'' \\ \phi'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta'\phi' \operatorname{sen} 2\phi \\ -\frac{1}{2}(\theta')^2 \operatorname{sen} 2\phi \end{pmatrix}\\
&\Longrightarrow \begin{cases} 0 = \theta'' \operatorname{sen}^2\phi + \theta'\phi' \operatorname{sen} 2\phi, \\ 0 = \phi'' - \frac{1}{2}(\theta')^2 \operatorname{sen} 2\phi. \end{cases}
\end{aligned}$$

Para el punto $(0,1,0) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, podemos escribir la curva $\mathbf{c}_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ como

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_1(t) &= (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)\\
&= \mathbf{x}\left(\theta(t), \phi(t)\right) = \mathbf{x}\left(t, \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\theta(t) = t,\ \phi(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Entonces

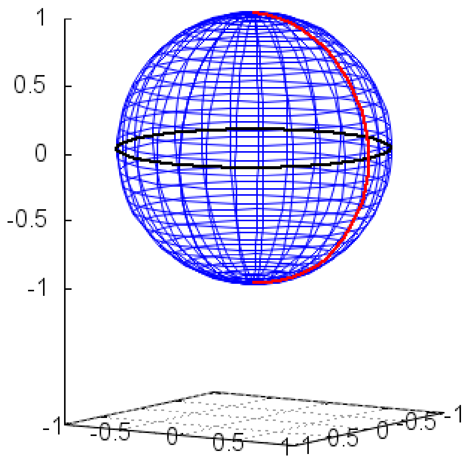
$$\begin{aligned}
&\phi'(t) = 0, \quad \phi''(t) = 0,\\
&\theta'(t) = 1, \quad \theta''(t) = 0.
\end{aligned}$$

La ecuación de las geodésicas es

$$\begin{cases} 0 = 0 + 1\cdot 0\cdot \operatorname{sen} 2\phi(t), \\ 0 = 0 - \frac{1}{2}(1)^2 \operatorname{sen} 2\phi(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi. \end{cases}$$

Como estas igualdades son ciertas, entonces esta línea (corresponde al ecuador) es una geodésica.

Se representan en negro en la siguiente figura:


1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
1
0.5
0
-0.5
-1