

COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Septiembre. Modelo B

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Se tiene la función $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + \cos(y^4) - 1$. ¿Se puede expresar la variable x en función de y ?

Solución:

2. (1 punto) Escriba los polinomios de Bernstein $B_0^2(t)$, $B_1^2(t)$ y $B_2^2(t)$.

Solución:

3. (1 punto) Señale el ángulo que forman los vectores tangentes a la curva $\mathbf{x}(t) = (1, 3t^3, t^2 + t - 1)$ en cualquier punto $\mathbf{x}(t)$, con el vector $(1, 1, -1)$. Es suficiente con dar la expresión de su coseno.

Solución:

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4. (1 punto) Sea $\mathbf{x} : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva de ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (\sin t, \cos t, t).$$

Determine la ecuación del plano normal a la curva en $\mathbf{x}(\pi)$.

Solución:

EJERCICIOS

5. Sea la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (t^2 - 3t - 1, t^2 - 1).$$

- (1 punto) Escribese como una curva de Bézier considerando $t \in [0, 1]$.
- (1 punto) Estudie si es una curva regular para $t \in \mathbb{R}$. Estudie si tiene puntos múltiples para $t \in \mathbb{R}$ y determínelos, en caso de que los tenga.
- (1 punto) Determine la recta tangente y la recta normal en un punto genérico $\mathbf{x}(t)$.

6. Sea el cilindro dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Determinense los vectores curvatura geodésica y curvatura normal en cada una de las siguientes curvas contenidas en él, en el punto que se indica.

- (1 punto) En el punto $\mathbf{x}(0) = (0, 1, 0)$ de la recta dada por $\mathbf{x}(s) = (\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}, s)$.
- (1 punto) En el punto $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 1)$ de la circunferencia dada por $\mathbf{x}(s) = (\cos s, \sin s, s)$.
- (1 punto) En el punto $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 0)$ de la hélice dada por $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x, y) = \frac{(-f_y, f_x) H(f) (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Superficies

Formas fundamentales:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$
$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}.$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2 (EG - F^2) - (Eg - 2Ff + Ge) k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)dudv + (fG - gF)(dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70