

COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Febrero. Modelo A

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Determine las coordenadas baricéntricas del punto $\mathbf{p} = (0, 0)$ en la referencia afín $\mathbf{p}_0 = (1, -1)$, $\mathbf{p}_1 = (1, 1)$ y $\mathbf{p}_2 = (2, -1)$.

Solución:

2. (1 punto) Escriba los polinomios de Bernstein $B_0^2(t)$, $B_1^2(t)$ y $B_2^2(t)$.

Solución:

3. (1 punto) Estudie si las ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x}(t) = (t^2, \cos t + \sin t).$$

definen una curva regular.

Solución:

4. (1 punto) Señale el ángulo que forman los vectores tangentes a la curva

$$\mathbf{x}(t) = (2t, t^2 + 1, e^t)$$

en cualquier punto $\mathbf{x}(t)$, con el vector $(1, 0, 1)$. Es suficiente con dar la expresión de su coseno.

Solución:

EJERCICIOS

5. Sea C la curva dada, para $t > 0$, por

$$\mathbf{x}(t) = \left(8\sqrt{t}, 2t^2, \frac{2}{t} \right).$$

Se pide:

- a) (1 punto) Calcular la longitud de arco entre 1 y $t_0 \in [1, 2]$.
 - b) (1 punto) Determinar la curvatura y la torsión en $\mathbf{x}(1)$.
 - c) (1 punto) Determinar el plano osculador en el punto $\mathbf{x}(1)$.
6. Sea S la superficie parametrizada, para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2).$$

Se pide:

- a) (0.75 puntos) Estudiar si es una parametrización regular.
- b) (1 punto) Determinar el plano tangente y la normal a la superficie en el punto $\mathbf{x}(1, 0)$.
- c) (1.25 puntos) Determinar el ángulo que forman las curvas parámetro en el punto $\mathbf{x}(1, 0)$.

Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x, y) = \frac{(-f_y, f_x) H(f) (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Superficies

Formas fundamentales:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, & F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, & G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v. \\ e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, & f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, & g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}. \end{aligned}$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2(EG - F^2) - (Eg - 2Ff + Ge)k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)dudv + (fG - gF)(dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

$$e(du)^2 + 2fdudv + g(dv)^2 = 0.$$

Condición de las curvas geodésicas:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (u')^2 \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u + 2u'v' \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u + (v')^2 \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u \\ (u')^2 \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + 2u'v' \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + (v')^2 \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$