COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Febrero. Modelo B

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Consideramos el espacio $\mathbb{R}^4$. Sea

$$M = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z = 0, t = 0 \right\}$$

y sea N la recta que pasa por el origen y tiene vector director $(1, -1, -1, 0)$. ¿Son ortogonales?

Solución:

2. (1 punto) Sea $\mathbf{x}(t)$, con $t \in [0, 1]$ una curva de Bézier con polígono de control $\{\mathbf{b}_0, ..., \mathbf{b}_n\}]$ ¿Cuánto valen $\mathbf{x}(0)$ y $\mathbf{x}(1)$? Razone la respuesta.

Solución:

3. (1 punto) Sea C la curva dada por la ecuación paramétrica

$$\mathbf{x}(t) = \left(1 + \cos t, \operatorname{sen} t, t^2 + 1\right).$$

Calcule el vector binormal en el punto $\mathbf{x}(0)$.

Solución:

4. (1 punto) Sea S la superficie dada por la parametrización:

$$\mathbf{x}(u,v) = (u+2v, u-v, u^2+v^2).$$

Determine en qué puntos de S el plano tangente es paralelo al plano $2x - y + 2z = 0$.

Solución:

EJERCICIOS

5. Consideramos la familia de curvas dadas, para $\lambda > 0$, por

$$\left\{ y = (x-\lambda)^2 + \lambda^2 : \lambda > 0 \right\}.$$

Se pide:

a) (0.75 puntos) Escribir la ecuación paramétrica de cada recta de la familia.

b) (0.75 puntos) Determinar la ecuación $\mathbf{e}(\lambda)$ de su envolvente.

c) (0.75 puntos) Determinar la recta tangente y el vector normal a cada punto $\mathbf{x}(t_0)$ de la curva dada, para $t \in \mathbb{R}$, por la ecuación

$$\mathbf{x}(t) = \left(2t, 2t^2\right).$$

d) (0.75 puntos) Determinar la curvatura de un punto genérico $\mathbf{x}(t)$ de la curva del apartado anterior.

6. Sea S la la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio R, dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta,\phi) = (R\cos\theta \operatorname{sen}\phi, R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\phi),$$

para $\theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0,\pi]$. Se pide:

a) (1 punto) Determinar los coeficientes de la primera forma fundamental.

b) (1 punto) Determinar las curvaturas principales y las direcciones principales.

c) (1 punto) Sabiendo que

$$A = (\theta')^2 \mathbf{x}_{\theta\theta}\cdot\mathbf{x}_\theta + 2\theta'\phi'\mathbf{x}_{\theta\phi}\cdot\mathbf{x}_\theta + (\phi')^2\mathbf{x}_{\phi\phi}\cdot\mathbf{x}_\theta = R^2\theta'\phi'\operatorname{sen}2\phi,$$
$$B = (\theta')^2 \mathbf{x}_{\theta\theta}\cdot\mathbf{x}_\phi + 2\theta'\phi'\mathbf{x}_{\theta\phi}\cdot\mathbf{x}_\phi + (\phi')^2\mathbf{x}_{\phi\phi}\cdot\mathbf{x}_\phi = -\frac{1}{2}R^2(\theta')^2\operatorname{sen}2\phi,$$

demuestre que la curva

$$\mathbf{c}(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t, 0)$$

contenida en la esfera y que pasa por $(0,R,0)$ es una curva geodésica.

Curvas
Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k\left(t\right)=\det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt},\left(\frac{d^{2}\mathbf{x}}{dt^{2}}\right)\right)\frac{1}{\left\|d\mathbf{x}/dt\right\|^{3}}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k\left(x,y\right)=\frac{\left(-f_{y},f_{x}\right)H\left(f\right)\left(-f_{y},f_{x}\right)^{t}}{\left\|\nabla f\right\|^{3}}.$$

Curvas en el espacio:

$$k\left(t\right)=\frac{\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\times\mathbf{x}''\left(t\right)\right\|}{\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\right\|^{3}},\quad\tau\left(t\right)=-\frac{\det\left(\mathbf{x}'\left(t\right),\mathbf{x}''\left(t\right),\mathbf{x}'''\left(t\right)\right)}{\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\times\mathbf{x}''\left(t\right)\right\|^{2}}.$$

Superficies
Formas fundamentales:

$$\begin{array}{l}E=\mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{u},\quad F=\mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{v},\quad G=\mathbf{x}_{v}\cdot\mathbf{x}_{v}.\\ e=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uu},\quad f=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uv},\quad g=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{vv}.\end{array}$$

Curvaturas:

$$K=\frac{eg-f^{2}}{EG-F^{2}},\quad H=\frac{Eg-2Ff+Ge}{2\left(EG-F^{2}\right)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^{2}\left(EG-F^{2}\right)-\left(Eg-2Ff+Ge\right)k-f^{2}+eg=0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$\left(eF-fE\right)\left(du\right)^{2}+\left(eG-gE\right)dudv+\left(fG-gF\right)\left(dv\right)^{2}=0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

$$e\left(du\right)^{2}+2fdudv+g\left(dv\right)^{2}=0.$$

Condición de las curvas geodésicas:

$$\left(\begin{array}{cc}E&F\\F&G\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}u''\\v''\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\left(u'\right)^{2}\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{u}+2u'v'\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{u}+\left(v'\right)^{2}\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_{u}\\\left(u'\right)^{2}\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{v}+2u'v'\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{v}+\left(v'\right)^{2}\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_{v}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}0\\0\end{array}\right).$$