

COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Febrero. Modelo B

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Consideramos el espacio \mathbb{R}^4 . Sea

$$M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z = 0, t = 0\}$$

y sea N la recta que pasa por el origen y tiene vector director $(1, -1, -1, 0)$. ¿Son ortogonales?

Solución:

2. (1 punto) Sea $\mathbf{x}(t)$, con $t \in [0, 1]$ una curva de Bézier con polígono de control $\{\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n\}$. ¿Cuánto valen $\mathbf{x}(0)$ y $\mathbf{x}(1)$? Razone la respuesta.

Solución:

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4. (1 punto) Sea S la superficie dada por la parametrización:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u + 2v, u - v, u^2 + v^2).$$

Determine en qué puntos de S el plano tangente es paralelo al plano $2x - y + 2z = 0$.

Solución:

EJERCICIOS

5. Consideramos la familia de curvas dadas, para $\lambda > 0$, por

$$\left\{ y = (x - \lambda)^2 + \lambda^2 : \lambda > 0 \right\}.$$

Se pide:

- (0.75 puntos) Escribir la ecuación paramétrica de cada recta de la familia.
- (0.75 puntos) Determinar la ecuación $e(\lambda)$ de su envolvente.
- (0.75 puntos) Determinar la recta tangente y el vector normal a cada punto $\mathbf{x}(t_0)$ de la curva dada, para $t \in \mathbb{R}$, por la ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (2t, 2t^2).$$

- (0.75 puntos) Determinar la curvatura de un punto genérico $\mathbf{x}(t)$ de la curva del apartado anterior.

6. Sea S la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio R , dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (R \cos \theta \sin \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \phi),$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi]$. Se pide:

- (1 punto) Determinar los coeficientes de la primera forma fundamental.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\mathbf{c}(t) = (R \cos t, R \sin t, 0)$$

Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x, y) = \frac{(-f_y, f_x) H(f) (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Superficies

Formas fundamentales:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$
$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}.$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2 (EG - F^2) - (Eg - 2Ff + Ge) k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE) (du)^2 + (eG - gE) dudv + (fG - gF) (dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white shadow effect, and a blue arrow-like shape points upwards from behind the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70