COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Septiembre. Modelo A

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Estudie si la función

$$f(x,y) = \left(\operatorname{sen} x + y, x^2 - e^y\right)$$

tiene inversa diferenciable en el punto $(0,0)$.

Solución:

2. (1 punto) Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^2, t, 5t^4\right).$$

Determine el radio de curvatura en $\mathbf{x}(0) = (0,0,0)$.

Solución:

3. (1 punto) Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^2, t, 5t^4\right).$$

Encuentre el vector normal principal en $\mathbf{x}(0) = (0,0,0)$.

Solución:

Solución (continuación):

4. (1 punto) Determine las ecuaciones (implícitas o paramétricas) de la superficie de revolución generada por la curva

$$x = u^2 + 1, y = 0, z = u, 0 < u < 3,$$

al girar alrededor del eje $0z$.

Solución:

EJERCICIOS

5. Sea C la curva de Bézier cuyo polígono de control es $(0, 1, -1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$. Se pide:

   a) (1 punto) Escribir su ecuación $\mathbf{x}(t)$, para $t \in [0, 1]$.

   b) (1 punto) Determinar el triedro de Frenet de esta curva en el punto $\mathbf{x}(0)$.

   c) (1 punto) Determinar la ecuación de los planos normal y rectificante y de la recta tangente en el punto $\mathbf{x}(0)$.

6. Sea S la superficie dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u, u^2 - v, u + v^3\right).$$

   a) (0.75 puntos) Estudie si es una parametrización regular.

   b) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental en un punto genérico de la superficie.

   c) (0.75 puntos) Determine el vector normal a la superficie en un punto genérico $\mathbf{x}(u, v)$.

   d) (0.75 puntos) Sea C la curva en la superficie S determinada si consideramos $(u(t), v(t)) = \left(t^2 + 1, e^t\right)$ para $t \in [-1, 1]$. Determine el vector tangente a esta curva a partir de $\mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_v$. No se considerará respuesta válida la que lo determina sin considerar estos vectores.

Curvas
Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x,y) = \frac{(-f_y, f_x)\, H(f)\, (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Superficies
Formas fundamentales:

$$\begin{array}{l} E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v. \\ e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}. \end{array}$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2\left(EG - F^2\right) - (Eg - 2Ff + Ge)\, k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)\, dudv + (fG - gF)(dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

$$e(du)^2 + 2f dudv + g(dv)^2 = 0.$$

Condición de las curvas geodésicas:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (u')^2\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u + (v')^2\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u \\ (u')^2\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + (v')^2\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$