E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Septiembre 2019. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Estudie si la función

$$f(x,y) = \left(\operatorname{sen} x + y, x^2 - e^y\right)$$

tiene inversa diferenciable en el punto $(0,0)$.

Solución. Comprobamos dónde es diferenciable la función f. Es infinitas veces derivable en $\mathbb{R}^2$, por ser cada una de las tres componentes de f de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ (por tratarse de sumas de funciones infinitas veces derivables: trigonométricas, exponenciales y polinomios). Según el teorema de la función inversa, f admite inversa diferenciable en un entorno de cada punto donde el determinante jacobiano de f sea distinto de 0. Puesto que

$$\det f'(x,y) = \begin{vmatrix} \cos x & 1 \\ 2x & -e^y \end{vmatrix} = -\cos x e^y - 2x,$$

entonces

$$\det f'(0,0) = \cos 0 \cdot e^0 - 2 \cdot 0 = 1.$$

Por eso, f admite inversa diferenciable en $(0,0)$.

2. (1 punto) Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^2, t, 5t^4\right).$$

Determine el radio de curvatura en $\mathbf{x}(0) = (0,0,0)$.

Solución.

El radio de curvatura R es el inverso de la curvatura k. Sabemos que

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Para esta curva, tenemos:

$$\mathbf{x}'(t) = \left(2t, 1, 20t^3\right), \quad \mathbf{x}''(t) = \left(2, 0, 60t^2\right),$$
$$\mathbf{x}'(0) = (0,1,0), \quad \mathbf{x}''(t) = (2,0,0), \quad \|\mathbf{x}'(0)\| = 1,$$
$$\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2k, \quad \|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\| = 2.$$

Entonces

$$k(0) = \frac{2}{1^3} = 2,$$

y el radio de curvatura es

$$R(0) = \frac{1}{2}.$$

3. (1 punto) Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^2, t, 5t^4\right).$$

Encuentre el vector normal principal en $\mathbf{x}(0) = (0,0,0)$.

Solución. El vector normal tiene la misma dirección y sentido que

$$(\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t).$$

En este caso, es

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) &= ((0,1,0) \times (2,0,0)) \times (0,1,0) = (0,0,-2) \times (0,1,0) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2,0,0).\end{aligned}$$

Por eso, el vector normal es el vector

$$\mathbf{n}(0) = (1,0,0).$$

4. (1 punto) Determine las ecuaciones (implícitas o paramétricas) de la superficie de revolución generada por la curva

$$x = u^2 + 1, y = 0, z = u, 0 < u < 3,$$

al girar alrededor del eje $0z$.

Solución. Las ecuaciones paramétricas de la curva son: $\mathbf{x}_1(u) = (u^2 + 1, 0, u)$. Llamamos (x, y, z) a las coordenadas de un punto de la superficie. Entonces existe u tal que

$$(u^2 + 1, 0, u) = (x, y, z).$$

Pero además, los puntos que están en la superficie y que tienen la misma coordenada z deben estar a la misma distancia del eje z, lo que significa que debe ser

$$x^2 + y^2 = \left(u^2 + 1\right)^2 = \left(z^2 + 1\right)^2.$$

Por eso, la ecuación implícita de la superficie es

$$x^2 + y^2 = (z^2 + 1)^2.$$

Las ecuaciones paramétricas se deducen considerando a z como parámetro y multiplicando por $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, al estar generada al girar una recta alrededor de uno de los ejes de coordenadas. Así, tenemos:

$$\begin{aligned} x &= (u^2 + 1)\cos\theta, \\ y &= (u^2 + 1)\operatorname{sen}\theta, \quad 0 < u < 3,\ 0 < \theta < 2\pi \\ z &= u, \end{aligned}$$

EJERCICIOS

5. Sea C la curva de Bézier cuyo polígono de control es $(0,1,-1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,0)$. Se pide:

   a) (1 punto) Escribir su ecuación $\mathbf{x}(t)$, para $t \in [0,1]$.

   b) (1 punto) Determinar el triedro de Frenet de esta curva en el punto $\mathbf{x}(0)$.

   c) (1 punto) Determinar la ecuación de los planos normal y rectificante y de la recta tangente en el punto $\mathbf{x}(0)$.

Solución.

a) El polígono de control es

$$\mathbf{b}_0 = (0,1,-1),\ \mathbf{b}_1 = (1,0,1),\ \mathbf{b}_2 = (0,1,0).$$

La curva de Bézier cumple

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{2} \mathbf{b}_i B_i^2(t),$$

para los polinomios de Bernstein

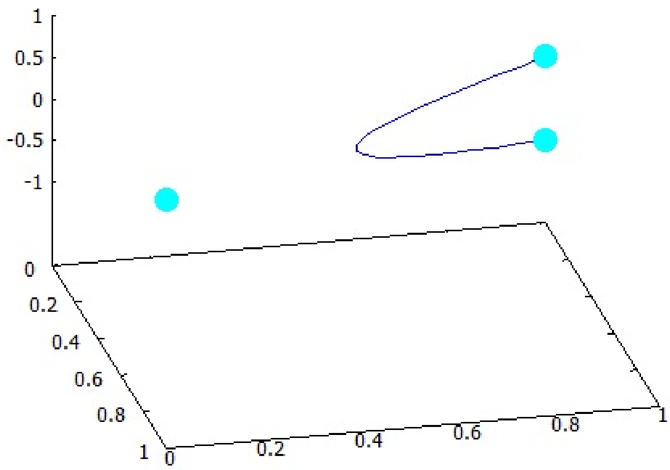
$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},\ B_i^2(t) = \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i}.$$

Entonces la curva de Bézier es

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (0,1,-1)B_0^2(t) + (1,0,1)B_1^2(t) + (0,1,0)B_2^2(t)\\
&= (0,1,-1)\binom{2}{0} t^0 (1-t)^2 + (1,0,1)\binom{2}{1} t^1 (1-t)^1 + (0,1,0)\binom{2}{2} t^2 (1-t)^0\\
&= (0,1,-1)t^0 (1-t)^2 + (1,0,1)2t^1 (1-t)^1 + (0,1,0)t^2 (1-t)^0\\
&= \left(2t - 2t^2, 2t^2 - 2t + 1, -3t^2 + 4t - 1\right).
\end{aligned}$$

La representación gráfica, con Maxima, de esta curva es y se ha hecho con la sentencia

```
wxdraw3d(parametric([2*t-2*t^2,2*t^2-2*t+1,--3*t^2+4*t-1,t,0,1),
point_type=filled_circle, point_size=2, color=cyan,points(control),view=[72,24]);
```



b) Para esta curva, $\mathbf{x}(t) = (2t - 2t^2, 2t^2 - 2t + 1, -3t^2 + 4t - 1)$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= (2 - 4t, 4t - 2, -6t + 4), \\
\mathbf{x}''(t) &= (-4, 4, -6), \\
\mathbf{x}'(0) &= (2, -2, 4), \quad \mathbf{x}''(0) = (-4, 4, -6), \\
\|\mathbf{x}'(0)\| &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}, \\
\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 4 \\ -4 & 4 & -6 \end{vmatrix} = (-4, -4, 0), \\
\|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\| &= \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 0^2} = 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Con estos valores, sabemos que el vector

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) = ((2, -2, 4) \times (-4, 4, -6)) \times (2, -2, 4) \\
&= (-4, -4, 0) \times (2, -2, 4) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= (-16, 16, 16) = 16(-1, 1, 1)
\end{aligned}$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal principal $\mathbf{n}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{16(-1, 1, 1)}{16\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1).$$

El vector tangente unitario a la curva en $\mathbf{x}(0)$ es

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'(0)}{\|\mathbf{x}'(0)\|} = \frac{(2, -2, 4)}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2).$$

Por tanto, el vector binormal es

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2) \times \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}(-3, -3, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0).
\end{aligned}$$

Entonces el triedro de Frenet es

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 0) \right\}.$$

c) El plano rectificante es el plano perpendicular a la recta normal, es decir, pasa por $\mathbf{x}(0) = (1, 0, -1)$ y es perpendicular al vector normal. Sus puntos (x, y, z) verifican

$$\begin{aligned}
&0 = ((x, y, z) - (1, 0, -1)) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1) \iff \\
&0 = (x - 1, y, z + 1) \cdot (-1, 1, 1) \iff y - x + z + 2 = 0.
\end{aligned}$$

El plano normal contiene a los vectores normal y binormal, y es perpendicular al vector tangente. Luego su ecuación es

$$
\begin{aligned}
0 &= ((x,y,z)-(1,0,-1))\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2) \Longleftrightarrow \\
0 &= (x-1,y,z+1)\cdot(1,-1,2) \Longleftrightarrow x-y+2z+1=0.
\end{aligned}
$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$(x,y,z)=(1,0,-1)+\lambda(1,-1,2).$$

6. Sea S la superficie dada por

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(u,u^2-v,u+v^3\right).$$

   a) (0.75 puntos) Estudie si es una parametrización regular.
   b) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental de la superficie en un punto genérico de la superficie.
   c) (0.75 puntos) Determine el vector normal a la superficie en un punto genérico $\mathbf{x}(u,v)$.
   d) (0.75 puntos) Sea C la curva en la superficie S determinada si consideramos $(u(t),v(t))=(t^2+1,e^t)$ para $t\in[-1,1]$. Determine el vector tangente a esta curva a partir de $\mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_v$. No se considerará respuesta válida la que lo determina sin considerar estos vectores.

Solución.

a) Sí lo es porque si $\mathbf{x}(u,v)=(u,u^2-v,u+v^3)$, entonces

$$rg\begin{pmatrix} D_1x_1(u,v) & D_1x_2(u,v) & D_1x_3(u,v)\\ D_2x_1(u,v) & D_2x_2(u,v) & D_2x_3(u,v)\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1 & 2u & 1\\ 0 & -1 & 3v^2\end{pmatrix}=2$$

para todo $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

b) Partimos de

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(u,v) &= \left(u,u^2-v,u+v^3\right),\\
\mathbf{x}_u(u,v) &= (1,2u,1),\\
\mathbf{x}_v(u,v) &= \left(0,-1,3v^2\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u=(1,2u,1)\cdot(1,2u,1)=4u^2+2,\\
F &= \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=(1,2u,1)\cdot\left(0,-1,3v^2\right)=3v^2-2u,\\
G &= \mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v=\left(0,-1,3v^2\right)\cdot\left(0,-1,3v^2\right)=9v^4+1.
\end{aligned}
$$

c) Comenzamos determinando un vector normal. Las derivadas parciales de $\mathbf{x}(u,v)$ son

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(u,v) &= (1,2u,1),\\
\mathbf{x}_v(u,v) &= (0,-1,3v^2),
\end{aligned}
$$

y entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(u,v)\times\mathbf{x}_v(u,v) &= (1,2u,1)\times\left(0,-1,3v^2\right)\\
&= \begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2u & 1\\ 0 & -1 & 3v^2\end{vmatrix}=\left(6uv^2+1,-3v^2,-1\right).
\end{aligned}
$$

El vector normal unitario $\mathbf{N}$ en un punto genérico es

$$\mathbf{N}(u,v)=\frac{\mathbf{x}_u(u,v)\times\mathbf{x}_v(u,v)}{\|\mathbf{x}_u(u,v)\times\mathbf{x}_v(u,v)\|}=\frac{(6uv^2+1,-3v^2,-1)}{\sqrt{\left(6uv^2+1\right)^2+\left(-3v^2\right)^2+(-1)^2}}.$$

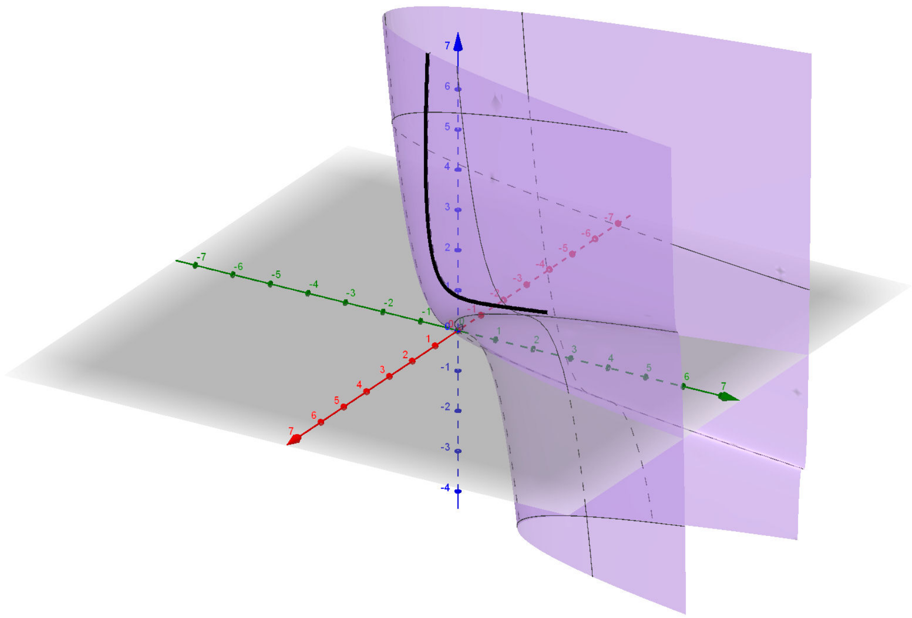
d) Consideramos la curva dada por

$$(u(t), v(t)) = \left(t^2+1, e^t\right)$$

para $t \in [-1, 1]$ contenida en la superficie. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u(t), v(t)) = \mathbf{x}(u, v) &= \left(u(t), (u(t))^2 - v(t), u(t) + (v(t))^3\right) \\ &= \left(t^2+1, \left(t^2+1\right)^2 - e^t, t^2+1+\left(e^t\right)^3\right)\end{aligned}$$

está contenida en la superficie S. Se representa en la siguiente figura:



Determinamos el vector tangente a la curva en $t = 0$. Como

$$\begin{aligned}u'(t) = 2t, \quad v'(t) &= e^t, \\ \mathbf{x}_u(u, v) &= (1, 2u, 1), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= \left(0, -1, 3v^2\right),\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= u'(t)\mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\mathbf{x}_v(u(t), v(t) \\ &= 2t\,(1, 2u(t), 1) + e^t\left(0, -1, 3(v(t))^2\right) \\ &= \left(2t, 4t\left(t^2+1\right), 2t\right) + \left(0, -e^t, 3e^t e^{2t}\right) \\ &= \left(2t, 4t\left(t^2+1\right) - e^t, 2t + 3e^{3t}\right).\end{aligned}$$