COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL

Febrero. Modelo A

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) ¿Cuál es la envoltura convexa de un conjunto de puntos $\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$? Indique cuál es su expresión y también represéntela gráficamente. Justifique la respuesta.

   Solución:

2. (1 punto) ¿Cuánto vale en el punto $(1,0,0)$ el módulo de la torsión de la curva dada por la intersección de $x^2+y+z=1$ y $x-2y=1$?

   Solución:

3. (1 punto) Sea S la curva de ecuaciones paramétricas
$$\mathbf{x}(t)=\left(\cos t, t^2+\operatorname{sen} t, t^2 e^t\right).$$
   Determine el vector tangente unitario, la recta tangente y el plano normal, en $t=0$.

   Solución:

Solución (continuación):

4. (1 punto) Sea S la curva de ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x}(t) = \left(\cos t, t^2 + \operatorname{sen} t, t^2 e^t\right).$$

Determine el vector binormal y el plano osculador, en $t = 0$.

Solución:

EJERCICIOS

5. Sea la cicloide dada, para $t \in (0, 2\pi)$ por la parametrización

$$\mathbf{x}(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t).$$

Se pide:

a) (1 punto) Determinar su longitud de arco entre 0 y $t_0 \in (0, 2\pi)$.

b) (1 punto) Determinar el triedro de Frenet en un punto genérico $\mathbf{x}(t)$.

c) (1 punto) Determinar la curvatura, el centro de curvatura y la circunferencia osculadora en un punto genérico $\mathbf{x}(t)$.

6. Sea S la superficie parametrizada , para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u, u^2 + v, u^2 - v\right).$$

a) (0.75 puntos) Estudie si es una parametrización regular.

b) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental.

c) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.

d) (0.75 puntos) Sea la curva C incluida en S, definida por

$$\alpha(t) = \left(t, t^2, t^2\right)$$

para $t \in \mathbb{R}$. Calcule la curvatura normal en $\alpha(0)$.

Curvas
Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x,y) = \frac{(-f_y, f_x)\,H(f)\,(-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Superficies
Formas fundamentales:

$$E = \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v.$$
$$e = \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{vv}.$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}, \quad H = \frac{Eg-2Ff+Ge}{2(EG-F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2\left(EG-F^2\right) - (Eg-2Ff+Ge)\,k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF-fE)(du)^2 + (eG-gE)\,du\,dv + (fG-gF)(dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

$$e(du)^2 + 2f\,du\,dv + g(dv)^2 = 0.$$

Condición de las curvas geodésicas:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (u')^2\,\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_u + 2u'v'\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_u + (v')^2\,\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_u \\ (u')^2\,\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v + 2u'v'\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v + (v')^2\,\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$