

**COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL**  
**Febrero. Modelo B**

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

**PREGUNTAS CORTAS**

1. (1 punto) Sean  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  las funciones dadas por

$$f(x, y) = (xy^3, x^2 \cos y), \quad g(x, y) = (y + e^x, x - y).$$

Determine la matriz jacobiana de  $g \circ f$ .

**Solución:**

2. Determine la curva de Bézier cuyo polígono de control es  $\{(-1, 2), (0, 1), (1, 1), (1, 3)\}$ .

**Solución:**

3. (1 punto) Sea  $C$  la semicircunferencia centrada en  $(0, 0)$  y de radio  $r$ , definida por la

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

## Solución (continuación):

4. (1 punto) Estudie si, para  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , es regular la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = ((v^2 + 1) \cos u, v \sin u, v).$$

## Solución:

## EJERCICIOS

5. Sea  $C$  la curva dada por la ecuación:

$$\mathbf{x}(t) = (t^3 + 1, t^2 - t, t^2 + t).$$

- (0.75 puntos) Estudie si  $C$  es una curva regular.
- (0.75 puntos) Determine la curvatura en un punto cualquiera de  $C$ . Determine sus puntos de inflexión si los tiene (llegará a una ecuación, no hace falta que la resuelva, sólo que indique los pasos que debería seguir).
- (0.75 puntos) Determine el triedro de Frenet en  $\mathbf{x}(0)$ .
- (0.75 puntos) Determine la ecuación de la recta tangente y del plano osculador a  $C$  en  $\mathbf{x}(0)$ .

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of a light blue and orange gradient with a subtle shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- c)* (1 punto) Determine el ángulo que forman las curvas parámetro en el punto  $\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ .

## Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left( \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x, y) = \frac{(-f_y, f_x) H(f) (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

## Superficies

Formas fundamentales:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$
$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}.$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2 (EG - F^2) - (Eg - 2Ff + Ge) k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE) (du)^2 + (eG - gE) dudv + (fG - gF) (dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70