FINAL ANILLOS. 13/05/2015. EA. SOLUCIÓN

1º/ En los apuntes de teoría.

2º/ a) FALSO. Contraejemplo

$A = \mathbb{Z}$ es a.c.c.u.

$I = (0)$ es ideal de A

I es primo, ya que $x \cdot y \in I \Rightarrow x \cdot y = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ó} \\ y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in I \\ \text{ó} \\ y \in I \end{array} \right.$$

I no es maximal, ya que $(0) \subsetneq (2) \subsetneq \mathbb{Z}$

b) FALSO.

Sabemos por teoría que si A es a.c.c.u. (y en este caso lo es), se cumple

$$\underset{\substack{\text{dominio} \\ \text{de integridad}}}{A/I} \Longleftrightarrow I \text{ primo}.$$

En este caso I no es primo, ya que $x^2 \in I = (x^2)$

Sin embargo $x^2 = x \cdot x$ y no se cumple $x \in I$ (ya que no es múltiplo de x^2).

Por tanto A/I no es D.I.

c) FALSO

Luego f no es homomorfismo de anillos.

$p(x) = x^2+2x+5$ en $\mathbb{R}[x]$

3º/ a) $x^2+2x+5=0$

$$x = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 5}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2} \Rightarrow p(x) \text{ no tiene raíces en } \mathbb{R}.$$

Como $p(x)$ es de grado 2 $\Rightarrow$ $p(x)$ IRREDUCIBLE

b) $p(x) = x^3+x^2+x+i$ en $\mathbb{C}[x]$

Por el teorema fundamental del álgebra $p(x)$ tiene una raíz en $\mathbb{C}$, por tanto un factor de grado 1 $\Rightarrow$ $p(x)$ REDUCIBLE

c) $p(x) = x^4+x+1$ en $\mathbb{Z}_2[x]$

$p(0)=1$
$p(1)=3=1$ en $\mathbb{Z}_2$ $\Rightarrow$ $p(x)$ no tiene raíces en $\mathbb{Z}_2$

$\Rightarrow$ $p(x)$ no puede tener factores de grado 1 ó 3.

Veamos si $p(x)$ puede descomponer en producto de factores de grado 2.

$$x^4+x+1 = (x^2+ax+b)\cdot(x^2+cx+d)$$

Como el término independiente es igual al producto $b\cdot d$ y esto tiene que ser igual a 1

$\Rightarrow b=d=1$

$(x^2+ax+1)(x^2+cx+1) =$

$a+c=1$

Luego $p(x)$ no descompone en factores de grado 2

$\Rightarrow$ $p(x)$ IRREDUCIBLE

d) Aplicamos el criterio modular con $p=2$

$p(x) = 3x^4 + 7x + 5$

Reduciendo mod 2

$\bar{p}(x) = [3]_2 x^4 + [7]_2 x + [5]_2 =$

$= [1]_2 x^4 + [1]_2 x + [1]_2$

En el apartado c) vimos que este polinomio es irreducible sobre $\mathbb{Z}_2[x]$.

Por el criterio modular $p(x)$ IRREDUCIBLE en $\mathbb{Q}[x]$

4/ a) Sabemos por teoría, dado que $\mathbb{Z}_2[x]$ a.c.c.u,

A/I cuerpo $\Leftrightarrow$ $\underset{(p(x))}{\overset{\shortparallel}{I}}$ maximal $\Leftrightarrow$ $p(x)$ irreducible

$x^2+1 = (x+1)(x+1)$ en $\mathbb{Z}_2[x] \Rightarrow$

$\Rightarrow A/I$ no es cuerpo.

b) Consideramos los polinomios

$q(x) = x^2$

$r(x) = 1$

$q(x) - r(x) = x^2 - 1 \underset{\text{en } \mathbb{Z}_2}{=} x^2+1 \in (x^2+1)$

luego en A/I $[x^2] = [1]$

Por tanto si $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ con $a_i \in \mathbb{Z}_2$

$$[f(x)] = \sum_{i=0}^{n} a_i [x^i] = b + c \cdot [x] =$$

$$= [b + cx]$$

Hemos visto que las potencias ≥ 2 son la misma clase que $[1]$ o $[x]$

Luego todo polinomio tiene un representante de grado ≤ 1.

Las 4 clases: $[0], [1], [x], [x+1]$ son todas distintas entre sí, ya que es imposible que la diferencia de dos de ellos sea múltiplo de x^2+1. Por tanto A/I tiene 4 elementos

$$A/I = \{ [0], [1], [x], [x+1] \}$$

c) Todo elemento de A/I se puede escribir como $[a+bx]$.

Fórmula para la <u>suma</u>

$$[a+bx] + [c+dx] = [(a+c) + (b+d)x]$$

Fórmula para el <u>producto</u>

$$\ldots + (ad+bc)x + (bd)x^2] =$$