1º/ TEORÍA

2º/ a) $\sigma^2 = (1\,3\,5)(2\,4\,6)$

$\sigma^{-2} = (\sigma^2)^{-1} = (1\,3\,5)^{-1}(2\,4\,6)^{-1} = (1\,5\,3)(2\,6\,4)$

$\tau^{-1} = (1\,5)$

$\alpha = \sigma^{-2} \cdot \tau^{-1} = (1\,5\,3)(2\,6\,4)(1\,5) =$

$= (1\,5\,3)(\cancel{2}\,5)(2\,6\,4) = (1\,3)(2\,6\,4)$

$ord(\alpha) = mcm(2,3) = 6$

$\alpha = (1\,3)(2\,4)(2\,6) \Rightarrow \alpha$ es impar.

b) Elegimos $\beta = (1\,2)$

$\beta^{-1}\sigma\beta = (1\,2)(1\,2\,3\,4\,5\,6)(1\,2) = (1\,3\,4\,5\,6\,2) \notin \langle\sigma\rangle$

Luego $\langle\sigma\rangle$ no es normal en S_6

$|D_6| = 12, \; |\langle\sigma\rangle| = 6 \Rightarrow [D_6 : \langle\sigma\rangle] = 2 \underset{\text{TEORÍA}}{\Rightarrow}$

$\langle\sigma\rangle$ es normal en $D6$.

3º/ a) $R_8 = \left\{ e^{i \cdot 2\pi \cdot \frac{n}{8}} \;/\; n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \right\}$

b) R_8 es isomorfo a $\mathbb{Z}_8$

$$\begin{aligned} R_8 &\longrightarrow \mathbb{Z}_8 \\ e^{i 2\pi \cdot \frac{n}{8}} &\longmapsto n \end{aligned} \quad \text{isomorfismo.}$$

Es más fácil pensar en los subgrupos cíclicos de $\mathbb{Z}_8$

$<0> = \{0\}$

1, 3, 5, 7 tienen orden 8, ya que ~~[illegible]~~ son ~~primo~~ relativamente primos con 8. Luego

$<1> = <3> = <5> = <7> = \mathbb{Z}_8$

2 tiene orden 4, porque mcm$(2,8) = 2$

$<2> = \{2,4,6,0\} = <6> = K$

$\uparrow$

6 tiene orden 4, porque mcm$(6,8) = 2$

$<4> = \{4,0\} = H$

Hay 4 subgrupos cíclicos den $\mathbb{Z}_8$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Hay 4 subgrupos cíclicos en R_8:

- $< e^0 > = <1>$
- R_8
- $K = < e^{i2\pi \cdot \frac{2}{8}} >$
- $H = < e^{i2\pi \frac{4}{8}} >$

c) Todos los subgrupos son ~~cíclico~~ normales porque R_8 es abeliano.

4º a) $\mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\}$

$$\left.\begin{array}{l} 1^2 = 1 \\ 3^2 = 9 = 1 \\ 5^2 = 25 = 1 \\ 7^2 = 49 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Todos los elementos tienen orden 2, no hay ningún elemento de orden 4

$\Rightarrow \mathbb{Z}_8^*$ no es cíclico

$\boxed{\text{FALSO}}$

b) $\mathbb{Z}_{10}^* = \{1, 3, 7, 9\}$

$3^2 = 9 \neq 0 \Rightarrow$ orden$(3) \neq 2 \Rightarrow$ orden$(3) = 4$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_{10}^* = \langle 3 \rangle \Rightarrow \mathbb{Z}_{10}^*$ cíclico $\boxed{\text{VERDADERO}}$

c) $\boxed{\text{FALSO}}$ $A = D_5$, $|D_5| = 10$

D_5 no tiene elementos de orden 10

(solo giros y simetrías)

orden máximo $= 5$.

d) $\boxed{\text{VERDADERO}}$

Sabemos por teoría que $\text{ord}(g) \mid \text{ord}(G) = n$

$\Rightarrow g^n = e \Rightarrow g^{2n} = e \Rightarrow g^{2n+1} = g^{2n} \cdot g = eg = g$

e) $\boxed{\text{FALSO}}$

$$\left| D_4 / \langle \sigma \rangle \right| = |D_4| / \langle \sigma \rangle = 8/4 = 2$$

$|\mathbb{Z}_4| = 4$

No pueden ser isomorfos.