

EA. Final grupos mayo. Dobles grados con Matemáticas

13 de mayo de 2015

---

1. (2,5 puntos) Enuncia y demuestra el primer teorema de isomorfía para grupos. Incluye la demostración de que el núcleo de un homomorfismo  $f$  es un subgrupo normal del dominio de  $f$ .
2. (2,5 puntos) Sea  $f : A \rightarrow B$  un isomorfismo de anillos. Consideramos  $A^*$  y  $B^*$  como los conjuntos de elementos invertibles de  $A$  y  $B$  respectivamente.
  - a) Demuestra que si  $x \in A^*$  entonces  $f(x) \in B^*$ .
  - b) Lo demostrado en el apartado anterior permite definir una aplicación  $g : A^* \rightarrow B^*$  restringiendo  $f$ , es decir,  $g(x) = f(x)$ . Demuestra que  $g$  es un isomorfismo de grupos (considerando como operación de grupo la multiplicación de los anillos  $A$  y  $B$  respectivamente).
3. (2,5 puntos) Determina todos los elementos de  $A_4$  (recuerda que es el subgrupo de  $S_4$  formado por las permutaciones pares). Determina todos los subgrupos cíclicos de  $A_4$ . ¿Cuántos hay?
4. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente tus respuestas:

a) (1 punto) Sean  $\sigma_1, \sigma_2$  elementos de  $S_n$ . Se cumple:

$$\text{ord}(\sigma_1\sigma_2) = m.c.m.\{\text{ord}(\sigma_1), \text{ord}(\sigma_2)\}$$

b) (1 punto) Existen un grupo  $G$ , un conjunto  $X$ , un elemento  $a \in X$  y una acción de  $G$  sobre  $X$  tales que  $|X| = 10$ ,  $|G| = 9$  y  $|\text{orb}(a)| = 5$ .

c) (0,5 puntos) Considera el grupo  $G = D_8 \times \mathbb{Z}_2$ , el elemento  $\sigma = (12345678) \in D_8$  y el subgrupo  $H$  definido como

$$H = \{(\sigma^i, y) / i \in \{0, 1, \dots, 7\}; y \in \mathbb{Z}_2\}.$$

$H$  es un subgrupo normal en  $G$ .

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99