FINAL GRUPOS. 13/05/2015. EA. SOLUCIÓN

1º/ ~~En los apuntes de teoría~~

2º/ a) Supongamos $x \in A^* \Rightarrow \exists y \in A$ t.q. $xy = yx = 1_A$

Sabemos que y es único. $\underbrace{y = x^{-1}}_{\text{NOTACIÓN}}$

Veamos que $f(x^{-1})$ es el inverso de $f(x)$

$$f(x)\cdot f(x^{-1}) \underbrace{=}_{f \text{ homomorfismo de anillos}} f(x \cdot x^{-1}) = f(1_A) \underbrace{=}_{f \text{ isomorfismo de anillos}} 1_B$$

Análogamente

$$f(x^{-1})\cdot f(x) = f(x^{-1}\cdot x) = f(1_A) = 1_B$$

Luego $f(x)$ es invertible, esto es $f(x) \in B^*$

b) Tenemos que ver que
$$g: A^* \longrightarrow B^*$$
$$x \longmapsto g(x) = f(x)$$

es isomorfismo de grupos, donde la operación es la multiplicación.

① Veamos que g homomorfismo:

Dados $x, y \in A^*$

② Veamos g inyectiva:

$$g(x) = g(y) \underset{def}{\Rightarrow} f(x) = f(y) \underset{f \text{ inyectiva}}{\Rightarrow} x = y \quad \checkmark$$

③ Veamos g supraγectiva.

Sea $b \in B^*$. Como f es isomorfismo, en particular es supraγectiva $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, a \in A$ t.q. $f(a) = b$.

Necesitamos ver que $a \in A^*$

Como f isomorfismo, $\exists f^{-1}$ que también es isomorfismo

$$f(a) = b \Rightarrow a = f^{-1}(b)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Como } b \in B^* \\ f^{-1}: B \to A \text{ isomorfismo} \end{array}\right\} \underset{\text{apartado a)}}{\Rightarrow} a \in A^*$$

Luego $g(a) = f(a) = b$

con lo que hemos visto g supraγectiva. ✓

3º/ Sabemos que A_4 tiene $\frac{4!}{2} = \frac{4\cdot3\cdot2}{2} = 12$ elementos

e es par (ya que $e=(12)(12)$)

Todo ciclo de longitud 3 será par, ya que

$$(a\,b\,c) = (a\,c)(a\,b)$$

Encontrémoslos todos:

$(1\,2\,3)$, $(1\,2\,4)$, $(1\,3\,4)$, $(2\,3\,4)$

$(1\,3\,2)$, $(1\,4\,2)$, $(1\,4\,3)$, $(2\,4\,3)$

Por último, el producto de 2 ciclos disjuntos de longitud 2 también es par:

$(1\,2)(3\,4)$, $(1\,3)(2\,4)$, $(1\,4)(2\,3)$

Ya hemos encontrado 12 elementos, por tanto tenemos todos los elementos de A_4.

Los grupos cíclicos serán los generados por cada uno de los elementos, teniendo en cuenta que los generados por los ciclos de longitud 3 tienen 3 elementos:

$H_1 = \langle e \rangle = \{e\}$

$H_2 = \langle (123) \rangle = \{e, (123), (132)\} = \langle (132) \rangle$

$H_3 = \langle (124) \rangle = \{e, (124), (142)\} = \langle (142) \rangle$

$H_4 = \langle (134) \rangle = \{e, (134), (143)\} = \langle (143) \rangle$

Luego hay 8 subgrupos cíclicos.

4º/ a) FALSO

En S_3, $\sigma_1 = (12)$, $\sigma_2 = (13)$

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = (12)(13) = (132)$$

$$\mathrm{ord}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = 3 \neq \mathrm{mcm}(o(\sigma_1), o(\sigma_2)) = \mathrm{mcm}(2,2) = 2$$

b) FALSO

Por el teorema de la órbita/estabilizador sabemos

$$|G| = |\mathrm{orb}(a)| \cdot |\mathrm{Stab}(a)| \quad \forall a \in X$$

luego $|\mathrm{orb}(a)|$ divide a $|G|$.

Así que es imposible $|\mathrm{orb}(a)| = 5$, $|G| = 9$

c) VERDADERO

$$|G| = |D_8| \circ |\mathbb{Z}_2| = 16 \cdot 2 = 32$$

Para contar los elementos de H tenemos que ver

$$(\underbrace{\sigma^i}_{8 \text{ opciones}}, \underbrace{y}_{2 \text{ opciones}}) \;/\; i = 0,1,\dots,7,\; y \in \mathbb{Z}_2$$

luego $|H| = 8 \cdot 2 = 16$

Por tanto $[G:H] = |G|/|H| = 32/16 = 2$

$f: G \to H$ homomorfismo de grupos

1º/ $\operatorname{Ker} f \overset{def}{=} \{ a \in G \,/\, f(a) = e_H \}$

Prop Ker f es subgrupo normal de G.

Demo Ker f es subgrupo de G:

① $a, b \in \operatorname{Ker} f$

$$f(a \cdot b) \underset{f \text{ homom.}}{=} f(a) \cdot f(b) = e_H \cdot e_H = e_H \Rightarrow a \cdot b \in \operatorname{Ker} f \quad \checkmark$$

② $$f(e_G) \underset{f \text{ homom.}}{=} e_H \Rightarrow e_G \in \operatorname{Ker} f \quad \checkmark$$

③ $a \in \operatorname{Ker} f$

$$f(a^{-1}) \underset{f \text{ homom}}{=} (f(a))^{-1} = (e_H)^{-1} = e_H \Rightarrow a^{-1} \in \operatorname{Ker} f \quad \checkmark$$

Para ver que $\operatorname{Ker} f \triangleleft G$ veamos que $\forall a \in G$

$a \operatorname{Ker} f a^{-1} \subseteq \operatorname{Ker} f$

Sea $b \in \operatorname{Ker} f$; $f(a \cdot b a^{-1}) \underset{f \text{ homon}}{=} f(a) \cdot f(b) \cdot f(a^{-1}) =$

$$\underset{b \in \operatorname{Ker} f}{=} f(a) \cdot e_H (f(a))^{-1} = f(a) \cdot (f(a))^{-1} = e_H$$

$\Rightarrow a \cdot b a^{-1} \in \operatorname{Ker} f \quad \checkmark$

1er tma isomorfía (enunciado)

$f: G \longrightarrow H$ homomorfismo suprayectivo de grupos

$\Rightarrow \ G/_{\ker f} \cong H$

Demo Definimos la aplicación $g: G/_{\ker f} \longrightarrow H$

$a \cdot \ker f \longmapsto f(a)$

⊛ Veamos que g está bien definida:

Supongamos $a \cdot \ker f = b \cdot \ker f \Rightarrow a^{-1} b \in \ker f \Rightarrow$

$\Rightarrow f(a^{-1}b) = e_H \Rightarrow (f(a))^{-1} \cdot f(b) = e_H \Rightarrow f(b) = f(a)$ ✓

⊛ Veamos que g es homomorfismo:

Sean $a\ker f, b\ker f \in G/_{\ker f}$

$$g\big((a\ker f)(b\ker f)\big) \underset{\substack{\text{mult.}\\ \text{en } G/\ker f}}{=} g\big((ab)\ker f\big) \underset{\text{def de } g}{=} f(ab) =$$

$$= f(a)f(b) = g(a\ker f)\, g(b\ker f)$$ ✓

⊛ Veamos que g es inyectiva:

$g(a\ker f) = e_H \Rightarrow f(a) = e_H \Rightarrow a \in \ker f \Rightarrow$

$\Rightarrow a \cdot \ker f = e_{G/\ker f}$ ✓

Por tanto g es isomorfismo de grupos