

27 de junio de 2016

1. (4 puntos) Teoría:

- a) (0,5 puntos) Define anillo.
- b) (0,5 puntos) Define anillo conmutativo y anillo con unidad.
- c) (0,5 puntos) Define elemento invertible y divisor de cero en un anillo.
- d) (0,75 puntos) Di si es cierta la siguiente afirmación: "Si A es un anillo conmutativo con unidad y $a \in A$ que es divisor de cero, entonces a no es invertible". En caso afirmativo demuéstrela y en caso negativo da un contraejemplo.
- e) (0,75 puntos) Di si es cierta la siguiente afirmación: "Si A es un anillo conmutativo con unidad y $a \in A$ que no es invertible, entonces a es un divisor de cero". En caso afirmativo demuéstrela y en caso negativo da un contraejemplo.
- f) (0,5 puntos) Define dominio de integridad.
- g) (0,5 puntos) Define cuerpo.

2. (3 puntos + 1 extra)

- a) (1 punto) Demuestra que el conjunto

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subanillo de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- b) (1 punto) Demuestra que el conjunto

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

es un ideal de T .

- c) (0,5 puntos) Demuestra que I no es un ideal de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- d) (0,5 puntos) Demuestra que en el cociente T/I cada clase tiene un representante de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ con $a, c \in \mathbb{R}$.
- e) (1 punto extra) Demuestra que T/I es isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3. (3 puntos) Di justificadamente si los siguientes cocientes de anillos son o no cuerpos. En caso de que la respuesta sea negativa, encuentra un divisor de cero en el cociente:

- a) (0,5 puntos) $\mathbb{C}[x]/(x^2 + 2)$.
- b) (0,5 puntos) $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 2)$.
- c) (0,5 puntos) $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 2)$.
- d) (0,5 puntos) $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2)$.
- e) (0,5 puntos) $\mathbb{Q}[x]/(x^8 - 6x + 2)$.
- f) (0,5 puntos) $\mathbb{Z}_7[x]/(x^2 + 5)$.

27 de junio de 2016

4. (4 puntos) Teoría:

a) (1 punto) Define grupo y subgrupo. Proporciona una caracterización (condición necesaria y suficiente) para que un subconjunto de un grupo sea subgrupo (no es necesario que demuestres la equivalencia).

b) (1 punto) Dados G un grupo y H un subgrupo de G se define la relación

$$x \equiv y \text{ mod } H \iff x^{-1}y \in H$$

Demuestra que esta relación es de equivalencia.

c) (0,5 puntos) Dado $x \in G$ definimos

$$xH := \{xh / h \in H\}$$

Demuestra que las clases de equivalencia del apartado anterior coinciden con los conjuntos definidos en este ejercicio, es decir, que $\forall x \in G$ se tiene $[x]_H = xH$.

d) (0,5 puntos) Define subgrupo normal de un grupo.

e) (1 punto) Demuestra que si H es un subgrupo normal de G y se tienen elementos $a, b, c, d \in G$ tales que $aH = bH$ y $cH = dH$ entonces $(ac)H = (bd)H$.

5. (3 puntos) Considera $R_{12} = \{z \in \mathbb{C} / z^{12} = 1\}$, el grupo de raíces 12-ésimas de la unidad.

a) (0,5 puntos) Da una descripción explícita de los elementos de R_{12} , tanto en forma cartesiana como en forma polar.

b) (0,75 puntos) ¿Es R_{12} cíclico? Justifica tu respuesta.

c) (0,75 puntos) Enumera todos los subgrupos cíclicos de R_{12} . ¿Cuáles de ellos son normales?

d) (0,5 puntos) Escribe el orden de cada uno de los elementos de R_{12}

e) (0,5 puntos) Enumera todos los elementos invertibles de R_{12} .

Pista: Te puede ayudar pensar en un grupo más sencillo al que R_{12} sea isomorfo.

6. (3 puntos + 1 punto extra)

a) (1 punto) Calcula todos los subgrupos de D_5 . Justifica que has encontrado todos los subgrupos posibles (explica por qué no puede haber más de los que enumeras).

b) (1 punto) Determina cuáles de los subgrupos del apartado anterior son cíclicos y cuáles son normales.

c) (1 punto) Describe los cocientes que producen los subgrupos normales del apartado anterior (es decir, para cada cociente, determina a qué grupo conocido es isomorfo).

d) (1 punto extra) Sea G un grupo de orden 10 y H un subgrupo de G . Supongamos que existen dos elementos $a, b \in H$ de orden 2 tales que $a \neq b$. Demuestra que $H = G$.