1º En los apuntes de teoría

2º a) a0) $T \neq \emptyset$ porque $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T$

a1) T es cerrado para la suma:

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in T,$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & c+c' \end{pmatrix} \in T$$

a2) T es cerrado para la toma de opuestos:

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T$$

$$-\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & -c \end{pmatrix} \in T$$

a3) T es cerrado para el producto.

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in T$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab'+bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \in T$$

luego T es subanillo de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

b) b1) $I \neq \emptyset$ porque $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$

b2) $\forall \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I,$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

b3) Absorción:

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T, \forall \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b'c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

luego $I$ es ideal de $T$.

ⓒ Sean $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin I$$

luego $I$ no es ideal de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

ⓓ Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T$

si tomamos la matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ se cumple

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right]_I = \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\right]_I \text{ en } T/I$$

luego toda clase tiene un representante de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

ⓔ Sea
$$\begin{aligned} f: T &\longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} &\longmapsto (a,c) \end{aligned}$$

Veamos que $f$ es homomorfismo suprayectivo de anillos:

e1 $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & c+c' \end{pmatrix}\right) = (a+a', c+c')$

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right) = (a,c) + (a',c') = (a+a', c+c')$

Luego $f$ respeta la suma.

e2 $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} aa' & ab'+bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix}\right) = (aa', cc')$

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right) = (a,c) \cdot (a',c') = (aa', cc')$

Luego $f$ respeta el producto.

e3 Dado $(a,c) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ; $(a,c) = f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right)$

Luego $f$ es suprayectiva.

Veamos que $\operatorname{Ker} f = I$

$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T \,/\, f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (0,0) \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T \,/\, (a,c) = (0,0) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T \right\} = I$

Aplicando el primer teorema de isomorfía a $f$, obtenemos que $T/I \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

3º) Aplicaremos en todos los apartados el siguiente resultado de teoría:

Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y $p(x) \in \mathbb{K}[x]$

$$\mathbb{K}[x]/(p(x)) \text{ es cuerpo} \iff p(x) \text{ irreducible en } \mathbb{K}[x]$$

ⓐ $x^2+2$ es reducible sobre $\mathbb{C}[x]$, ya que todo polinomio de grado $>1$ lo es. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{C}[x]/(x^2+2)$ NO es cuerpo.

Una factorización de $x^2+2$ nos dará un divisor de cero en el cociente:

$$x^2+2 = (x+i\sqrt{2})(x-i\sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{[0]}{\underset{\shortparallel}{[x^2+2]}} = [x+i\sqrt{2}]\cdot[x-i\sqrt{2}]$$

$\Rightarrow [x+i\sqrt{2}]$ es divisor de cero en el cociente.

ⓑ $x^2+2$ irreducible sobre $\mathbb{R}[x]$, por ser un polinomio de grado 2 sin raíces en $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \mathbb{R}[x]/(x^2+2)$ ES cuerpo

3º (c) $x^2 - 2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

es reducible sobre $\mathbb{R}[x] \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{R}[x]/(x^2-2)$ NO es cuerpo.

Como en (a), $[x+\sqrt{2}]$ es divisor de cero en el cociente.

(d) $x^2-2$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}[x]$ (por ejemplo, usando el criterio de Eisenstein con $p=2$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{Q}[x]/(x^2-2)$ ES cuerpo.

(e) $x^8-6x+2$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}[x]$ (por ejemplo, usando el criterio de Eisenstein con $p=2$)

$\Rightarrow \mathbb{Q}[x]/(x^8-6x+2)$ ES cuerpo.

(f) $x=3$ es raíz de $x^2+5$ en $\mathbb{Z}_7$,

porque $3^2+5 = 9+5 = 14 \equiv 0 \mod 7$

$\Rightarrow x^2+5$ es reducible en $\mathbb{Z}_7[x] \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_7[x]/(x^2+5)$ NO es cuerpo.

$x-3$ es un factor de $x^2+5 \Rightarrow$

$\Rightarrow [x-3]$ es divisor de cero en el cociente.

4º En los apuntes de teoría.

5º a) $R_{12} = \left\{ \alpha_j := e^{2\pi i \frac{j}{12}} \,/\, j \in \{0, 1, 2, \dots, 11\} \right\}$

(forma polar).

En forma cartesiana:

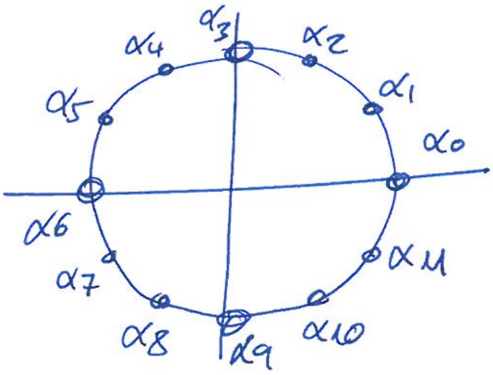
$\alpha_0 = 1$

$\alpha_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$\alpha_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{12} \cdot 2\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{12} \cdot 2\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha_3 = \cos\left(\frac{2\pi}{12} \cdot 3\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{12} \cdot 3\right) = 0 + i \cdot 1 = i$

A partir de aquí los valores se repiten, cambiando de signo según el cuadrante:




$\alpha_4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$\alpha_6 = -1$

$\alpha_7 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}$

$\alpha_8 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha_9 = -i$

$\alpha_{10} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$

b) Sabemos por teoría que $R_{12}$ es cíclico ya que $\alpha_1$ es un elemento de orden 12 y $R_{12}$ tiene 12 elementos.

$\alpha_1$ tiene orden 12 ya que $\alpha_1^j = \alpha_j \neq 1$

$$\forall j = 1, \dots, 11$$

Y $\alpha_1^{12} = 1$.

c) Para trabajar con $R_{12}$, al ser cíclico, podemos

\+ trabajar con $\mathbb{Z}_{12}$, al que es isomorfo.

d) El isomorfismo es el siguiente, visto también en teoría, que manda

$$f : R_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$$
$$\alpha_j \longmapsto j$$

Sabemos que en $\mathbb{Z}_{12}$ $\quad ord(j) = \dfrac{j}{mcd(j,12)}$

luego los elementos de orden 12 en $\mathbb{Z}_{12}$ son 1, 5, 7, 11. Los correspondientes elementos de orden 12 en $R_{12}$ son

$\alpha_1, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_{11}$.

Por tener orden 12, tenemos que

$$\langle \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_5 \rangle = \langle \alpha_7 \rangle = \langle \alpha_{11} \rangle = R_{12}$$

En $\mathbb{Z}_{12}$ los números 2, 10 cumplen que

$\text{mcd}(2.12) = 2 = \text{mcd}(10.12)$

luego $\alpha_2, \alpha_{10}$ tienen orden $\frac{12}{2} = 6$ en $R_{12}$

$$\langle \alpha_2 \rangle = \{\alpha_2, \alpha_2^2, \alpha_2^3, \alpha_2^4, \alpha_2^5, \alpha_2^6\} =$$

$$= \{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_0\} = \langle \alpha_{10} \rangle$$

En $\mathbb{Z}_{12}$, 4, 8 cumplen $\text{mcd}(4.12) = \text{mcd}(8.12) = 4$

luego $\alpha_4, \alpha_8$ tienen orden $\frac{12}{4} = 3$ en $R_{12}$

$$\langle \alpha_4 \rangle = \{\alpha_4, \alpha_4^2, \alpha_4^3\} = \{\alpha_4, \alpha_8, \alpha_0\} = \langle \alpha_8 \rangle$$

En $\mathbb{Z}_{12}$, 3, 9 cumplen $\text{mcd}(3,12) = \text{mcd}(9.12) = 3$

luego $\alpha_3, \alpha_9$ tienen orden $\frac{12}{3} = 4$ en $R_{12}$

$$\langle \alpha_3 \rangle = \{\alpha_3, \alpha_3^2, \alpha_3^3, \alpha_3^4\} = \{\alpha_3, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_0\} = \langle \alpha_9 \rangle$$

En $\mathbb{Z}_{12}$, 6 cumple $\text{mcd}(6.12) = 6$

luego $\alpha_6$ tiene orden $\frac{12}{6} = 2$ en $R_{12}$

$$\langle \alpha_6 \rangle = \{\alpha_6, \alpha_6^2\} = \{\alpha_6, \alpha_0\}$$

Por último el neutro $\alpha_0$ siempre tiene orden 1,

luego $\langle \alpha_0 \rangle = \{\alpha_0\}$

Por tanto los subgrupos cíclicos son:

$<\alpha_1> = R_{12}$

$<\alpha_2>$

$<\alpha_3>$

$<\alpha_4>$

$<\alpha_6>$

$\{\alpha_0\}$

Todos ellos son normales ya que $R_{12}$ es abeliano.

(e) Todos los elementos de $R_{12}$ son invertibles ya que $R_{12}$ es un grupo y todo elemento tiene inverso para la operación de grupo.

6º (a) En $D_5$ consideramos las 5 simetrías:

$\tau_i$ simetría cuyo eje pasa por el vértice $i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$

$\sigma$ es el giro de ángulo $\frac{2\pi}{5}$

Por tanto $D_5 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, id\}$

Como $D_5$ tiene orden 10, todos los subgrupos han de tener orden 1, 2, 5, 10 (tma. de Lagrange)

ORDEN 1: $\{id\}$ (único posible)

ORDEN 10: $D_5$ (único posible)

Todos los subgrupos de orden 2, han de estar generados por un elemento de orden 2, ya que sabemos que son cíclicos e isomorfos a $\mathbb{Z}_2$. Hay 5 de ellos, 1 por simetría:

$<\tau i> = \{id, \tau i\}$ $i=1,2,3,4,5$

Lo mismo pasa con los subgrupos de orden 5, han de ser cíclicos:

$<\sigma> = \{\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, id\}$ es el único subgrupo de orden 5, ya que

$$<\sigma> = <\sigma^2> = <\sigma^3> = <\sigma^4>$$

Como hemos razonado que todos los subgrupos de órdenes 2 y 5 son cíclicos y hemos usado todos los generadores posibles, ya no puede haber más subgrupos.

(b) Todos los subgrupos del apartado anterior son cíclicos salvo $D_5$ porque tiene orden 10 y no hay ningún elemento de orden 10 en $D_5$.

$\{id\}$, $D_5$ siempre son normales.

$<\sigma>$ es normal porque tiene índice $2 = \frac{|D_5|}{|<\sigma>|}$.

$\forall i = 1,2,3,4,5$

$\tau i \sigma \neq \sigma \tau i$, esto hace que $<\tau i>$ no sea normal, ya que

$$\sigma <\tau i> = \sigma \cdot \{id, \tau i\} = \{\sigma, \sigma \tau i\} \neq \{\sigma, \tau i \sigma\} =$$

$$= <\tau i> \sigma$$

Comprobemos que $\sigma \tau_i \neq \tau_i \sigma$

Para ellos veamos que hace con el vértice $i$

$$(\sigma \tau_i)(i) = \sigma(\tau_i(i)) = \sigma(i) = i+1 \pmod 5$$
$$(\tau_i \sigma)(i) = \tau_i(\sigma(i)) = \tau_i(i+1) \neq i+1 \pmod 5$$

Como llevan el vértice $i$ a vértices distintos, son distintas permutaciones.

**Obs**: Esto también podría verse calculando las permutaciones completas.

ⓒ $D_5/D_5 = \{[id]\}$ el grupo con un solo elemento.

$D_5/\{id\} \cong D_5$

$D_5/\langle\sigma\rangle$ tiene $2 = \frac{10}{5}$ elementos. Sabemos por teoría que todo grupo de orden 2 es cíclico y, por tanto, isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

~~$D_5/\langle\tau_i\rangle$ $i=1,2,3,4,5$ tiene $5 = \frac{10}{2}$ elementos. Sabemos por teoría que todo grupo de orden 5 (primo) es cíclico y, por tanto, isomorfo a $\mathbb{Z}_5$.~~

los $\langle\tau_i\rangle$ no son normales.

ⓓ Por el teorema de Lagrange, los posibles órdenes de los subgrupos de $G$ son 1, 2, 5, 10. $H$ no puede tener orden 1 ni 2 porque tiene 3 elementos distintos al menos: $e, a, b$.

H no puede tener orden 5 porque un grupo de orden 5 no puede contener un elemento de orden 2.

Por tanto H es de orden 10 $\Rightarrow H = G$.