

1. (4 puntos) Teoría:

- a) (0,25 puntos) Sean G un grupo y $a \in G$. Definimos la función $f_a : G \rightarrow G$ como $f_a(b) := ab$. Demuestra que f es una biyección.
- b) (0,25 puntos) ¿En qué casos es f_a un isomorfismo de grupos?
- c) (0,5 puntos) Sean G un grupo y H un subgrupo de G . Definimos en G la siguiente relación:

$$x \equiv y \pmod{H} \iff x^{-1}y \in H$$

Demuestra que esta relación es de equivalencia.

- d) (0,25 puntos) Define el índice de H en G .
- e) (2 puntos) Enuncia y demuestra el teorema de Lagrange para grupos finitos. Puedes utilizar los apartados anteriores.
- f) (0,25 puntos) Dados G y un elemento $a \in G$, define $ord(a)$ y $ord(G)$.
- g) (0,5 puntos) Usa el teorema de Lagrange para demostrar que si G es un grupo finito y $a \in G$ entonces $ord(a)$ es un divisor de $ord(G)$.
2. (5 puntos) Considera el grupo $G = D_8 \cap A_8$, donde D_8 es el grupo diedral y A_8 es el grupo alternado.

- a) (1 punto) Halla razonadamente todos los elementos de G . Escríbelos como permutaciones de S_8 utilizando la notación de ciclos.
- b) (1 punto) Halla todos los subgrupos cíclicos de G .
- c) (0,5 puntos) Determina cuáles de estos subgrupos son normales en G .
- d) (0,5 puntos) Para cada uno de los subgrupos normales que hayas encontrado, estudia el cociente de G por ese subgrupo y determina a qué grupo que hayamos estudiado es isomorfo.
- e) (1 punto) Considera la acción natural del grupo G sobre $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (cada permutación actúa sobre un elemento de B ya que es una función de B en B). Halla las órbitas y los estabilizadores de todos los elementos de B .
Pista: Puedes hacer perfectamente el ejercicio considerando los elementos de G como permutaciones. Pero verlos como elementos de D_8 , es decir, como transformaciones del plano que dejan invariante un octógono regular, te puede ayudar.
- f) (Extra: 1 punto) ¿Puedes encontrar un subgrupo H de G que cumpla que la acción de H sobre B parte B en 3 órbitas distintas?

3. (2 puntos) Sean G un grupo, $H < G$ y $K < G$, es decir, H y K subgrupos de G . De las siguientes afirmaciones 2 son ciertas y 2 son falsas. Di cuáles son las ciertas y

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99