1º Todo está en los apuntes de teoría salvo

(b) Caso 1 $a = e \Rightarrow f_a = id_G : G \longrightarrow G$
$b \longmapsto b$

que es, trivialmente, un isomorfismo.

Caso 2 $a \neq e \Rightarrow f_a(e) = a \cdot e = a \neq e$

luego f_a no lleva el neutro al neutro y, por tanto, no es homomorfismo (ni isomorfismo).

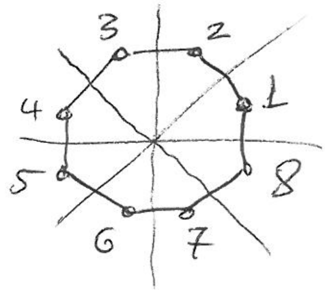
2º (a) Hay 2 tipos de elementos en D_8, giros y simetrías. Sea

$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8)$ el giro de ángulo $\frac{2\pi}{8}$

Por ser un ciclo de longitud 8 se puede escribir como producto de 7 transposiciones y es impar.

Sus potencias pares, que también son giros, son permutaciones pares, mientras que sus potencias impares serán permutaciones impares.

[illegible] los giros pares son



Hay 2 tipos de simetrías, respecto a ejes que pasan por 2 vértices opuestos y respecto a ejes que pasan por puntos medios de lados opuestos.

Las primeras intercambian 3 pares de vértices, por lo que son producto de 3 transposiciones, luego impares.

Las segundas intercambian 4 pares de vértices con lo que son pares. Son:

$\tau_h = (18)(27)(36)(45)$

$\tau_v = (23)(14)(58)(67)$

$\tau_d = (12)(38)(47)(56)$

$\tau_\delta = (34)(25)(16)(78)$

Así que $A_8 \cap D_8 = \{id, \sigma^2, \sigma^4, \sigma^6, \tau_h, \tau_v, \tau_d, \tau_\delta\}$

(b) $ord(id) = 1 \Rightarrow H_0 = \langle id \rangle = \{id\}$

$ord(\sigma^2) = 4 \Rightarrow K = \langle \sigma^2 \rangle = \{id, \sigma^2, \sigma^4, \sigma^6\}$

El grupo $\langle \sigma^6 \rangle$ es también igual a K.

El resto de elementos tienen orden 2.

Por tanto:

$H_1 = \langle \sigma^4 \rangle = \{id, \sigma^4\}$

... los subgrupos cíclicos de ...

$H_0, K, H_1, \ldots, H_5$ son

(c) $H_0 = \{id\} \triangleleft G$, el subgrupo trivial siempre lo es.

$K \triangleleft G$ porque $[G:K] = 2$

Veamos si $H_1 = \langle \sigma^4 \rangle$ es normal: Calculamos clases por izquierda y derecha.

$idH_1 = \{id, \sigma^4\} = H_1 \cdot id$

$\sigma^2 H_1 = \{\sigma^2, \sigma^6\} = H_1 \cdot \sigma^2$

$\tau_h H_1 = \{\tau_h, \tau_h \sigma^4\} = \{\tau_h, \tau_v\}$

$H_1 \cdot \tau_h = \{\tau_h, \sigma^4 \tau_h\} = \{\tau_h, \tau_v\}$

Necesariamente $\tau_f H_1 = H_1 \tau_f = \{\tau_f, \tau_d\}$

Por tanto $H_1 \triangleleft G$

Veamos que H_2, H_3, H_4, H_5 no son normales.

Esto es consecuencia de que σ^2 no conmuta con las simetrías:

(Usaremos el criterio $H \triangleleft G \Leftrightarrow (\forall g \in G\ \forall h \in H\ \ g^{-1} h g \in H)$

(H_2) $g = \sigma^2$, $h = \tau_h$

$\sigma^6 \tau_h \sigma^2 = (1753)(2864)(18)(27)(36)(45)(1357) \cdot$

$\cdot (2468) = (14)(23)(58)(67) = \tau_v$

$\tau_v \notin \langle \tau_h \rangle$ luego H_2 no es normal en G.

luego $H_3 \ntriangleleft G$

H4 $\sigma^6 \tau_d \sigma^{-2} = \ldots = \tau_f \notin \langle \tau_d \rangle$

$\Rightarrow H_4 \ntriangleleft G$

H5 $\sigma^6 \tau_f \sigma^{-2} = \ldots = \tau_d \notin \langle \tau_f \rangle \Rightarrow H_5 \ntriangleleft G.$

d $G/H_0 = G/\{id\} \cong G$

Observación: $G \cong D_4$, si os dais cuenta, está formado por los mismos movimientos.

G/K tiene orden 2, por tanto $G/K \cong \mathbb{Z}_2$

G/H_1 tiene 4 elementos. Veamos sus órdenes

$(\tau_h H_1)(\tau_h H_1) = id H_1 \Rightarrow \tau_h H_1$ tiene orden 2
$(\tau_f H_1)(\tau_f H_1) = id H_1 \Rightarrow \tau_f H_1$ tiene orden 2
$(\sigma^2 H_1)(\sigma^2 H_1) = \sigma^4 H_1 = id H_1 \Rightarrow \sigma_2 H_1$ tiene orden 2

G/H_1 tiene que ser isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ o a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
Como no tiene elementos de orden 4,

$G/H_1 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

5 Veamos quién es $o(1)$

luego $o(1) = 5$

Como las órbitas son clases de equivalencia, hay una única órbita (la acción es transitiva). Por tanto

$$o(g) = B \quad \forall g = 1, \dots, 8$$

Por el teorema de la órbita-estabilizador, si $g \in \{1, \dots, 8\}$

$$|o(g)| = \frac{|G|}{|Stab(g)|} \Rightarrow 8 = \frac{8}{|Stab(g)|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |Stab(g)| = 1 \Rightarrow Stab(g) = \{id\}$$

f) Hemos visto que el único elemento del grupo G que deja fijo puntos de B es la identidad. Por tanto, si elijo un subgrupo cualquiera H, tendré que

$$|o(g)| = \frac{|H|}{|Stab(g)|} = \frac{|H|}{1} = |H| \quad \forall g = 1, \dots, 8$$

Así que todas las órbitas tienen el mismo cardinal, que es igual a $|H|$.

Por el teorema de Lagrange, los posibles valores de $|H|$ son $1, 2, 4, 8$.

... el número de órbitas será

3º

a) $\boxed{\text{Falso}}$.

Contraejemplo:

$G = S_3$; $H = \{id, (1\,2)\}$; $K = \{id, (2\,3)\}$

$H \cup K = \{id, (1\,2), (2\,3)\}$ no es subgrupo de G

porque $(1\,2)(2\,3) = (1\,2\,3) \notin H \cup K$

b) $\boxed{\text{Verdadero}}$

Sean $H, K < G$. Veamos que $H \cap K < G$

① $e \in H, e \in K$ por ser ambos subgrupos $\Rightarrow e \in H \cap K$

② $a, b \in H \cap K \Rightarrow a, b \in H, \; a, b \in K \underset{H, K < G}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow a \cdot b \in H, \; ab \in K \Rightarrow ab \in H \cap K$.

③ $a \in H \cap K \Rightarrow a \in H, \; a \in K \underset{H, K < G}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow a^{-1} \in H, \; a^{-1} \in H \Rightarrow a^{-1} \in H \cap K$. $\boxed{\text{c.q.d.}}$

c) $\boxed{\text{Falso}}$ Contraejemplo

$G = S_3$; $H = S_3$; $K = \langle (1\,2) \rangle = \{id, (1\,2)\}$

$H \trianglelefteq G$ (porque el total siempre es normal en el total).

d) $\boxed{\text{Verdadero}}$

Sean $H, K \triangleleft G$. Veamos que $H \cap K \triangleleft G$

Ya sabemos, por a), que $H \cap K < G$.

Sean $g \in G$, $a \in H \cap K \Rightarrow a \in H, a \in K$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Como } H \triangleleft G \Rightarrow gag^{-1} \in H \\ \text{Como } K \triangleleft G \Rightarrow gag^{-1} \in K \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow gag^{-1} \in H \cap K$. $\boxed{\text{cqd}}$